



文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计



传承辉煌的历史 **2009 版** 开启成功的未来

考研数学 复习指南

陈文灯 黄先开 编著

(经济类)



正版书超值惊喜!

内含

陈文灯教授数学精妙复习方法指导视频
60小时的考研重难点全新视频
本书课后习题全部详解资料

世界图书出版公司

传承辉煌的历史 **2009 版** 开启成功的未来

考研数学 复习指南

陈文灯 黄先开 编著
潘正义 审订

(经济类)



正版书超值惊喜!

内含 | 陈文灯教授数学精妙复习方法指导视频
60小时的考研重难点全新视频
本书课后习题全部详解资料

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 经济类 / 陈文灯等编著. —14 版. —北京: 世界图书出版公司北京分
2004. 1

ISBN 978-7-5062-5213-3

I. 数... II. 陈... III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002) 第 014885 号

数学复习指南(经济类) (2009 版)

主 编: 陈文灯 黄先开

编 审: 潘正义

责任编辑: 王志平

封面设计: 章 良

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话 88861708 邮编 100089)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 北京忠信诚胶印厂印刷

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 33

字 数: 502 千字

版 次: 2008 年 2 月第 14 版 2008 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5213-3/O · 334

定价: 67.80 元

服务热线: 010 - 88861708

前言

数学统考从1987年至今经历了22个年头。其间“数学考试大纲”虽然变化不大，每年的试题均有所创新，不过仔细分析还是万变不离其宗。只要把本书归纳总结的题型、方法和技巧掌握住，研读我们精心设置的典型例题，即可达到触类旁通、融会贯通的境界。

我们要提醒读者的是，数学想要考高分，一定要了解考研数学究竟要考什么？综观一二十年试题可知，主要考查如下四方面：

- (1) 基础（基本概念、基本理论、基本方法）；
- (2) 解综合题的能力；
- (3) 分析问题和解决问题的能力，即解应用题的能力；
- (4) 解题的熟练程度（通过大题量、大计算量进行考核）。

真正了解了要考查的东西，复习时才能有的放矢。关于数学基础、数学题型与考试目标之间的逻辑关系，我写了四句话，供大家参考、体会：**数学基础树的根，技巧演练靠题型；勤学苦练强磨砺，功到高分自然成。**

本书特点：

(1) 对大纲要求的重要概念、公式、定理进行剖析，增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性错误、错用公式和定理的错误。

(2) 归纳、总结了二十多个思维定式，无疑这对读者解题会有所帮助，但我们的目的是引导读者去归纳总结，养成习惯。这样应试的时候就能很快找到解题突破口。

(3) 用“举题型讲方法”的格式代替传统的“讲方法套题型”的做法，使读者应试时，思路畅通、有的放矢，许多书的跟进也说明这种做法的确很有效。

(4) 广泛采用表格法，使读者便于对照、比较，对要点一目了然。

(5) 介绍许多新的快速解题方法和技巧。例如，中值定理证明中的辅助函数的做法、不定积分中的凑微分法、不等式证明尤其是定积分不等式的证明方法等，都是我们教学研究的成果，对读者应试能起到“事半功倍”的效果。

(6) 创新设计出很多好的例题，以期提高读者识别题型变异的能力。

历经十三载的再版和修订，本书已成为广大考研读者的良师诤友，同时也有很多教师同行用该书做教学参考。为了精益求精，恳请朋友们拨冗指正。

陈灯

2008年元月

目 录

第1篇 微积分

篇要 微积分的四种思维定势	1
第1章 函数·极限·连续	6
第1节 函数	6
知识点精讲	6
题型归纳及思路提示	9
第2节 极限及连续性	14
知识点精讲	14
题型归纳及思路提示	19
精选习题一	34
参考答案	36
第2章 导数与微分	37
第1节 导数与微分	37
知识点精讲	37
题型归纳及思路提示	40
第2节 高阶导数	46
知识点精讲	46
题型归纳及思路提示	47
精选习题二	49
参考答案	51
第3章 一元函数积分学	52
第1节 不定积分	52
知识点精讲	52
题型归纳及思路提示	63
精选习题三(1)	72
参考答案	73
第2节 定积分	75
知识点精讲	75
题型归纳及思路提示	81
精选习题三(2)	102
参考答案	103
第3节 反常积分	104

知识点精讲	104
题型归纳及思路提示	105
精选习题三(3)	106
参考答案	106
第4章 微分中值定理与泰勒公式	107
第1节 中值定理	107
知识点精讲	107
题型归纳及思路提示	107
第2节 泰勒公式	116
知识点精讲	116
题型归纳及思路提示	117
精选习题四	121
参考答案	121
第5章 一元微积分的应用	123
第1节 函数的单调性	123
知识点精讲	123
题型归纳及思路提示	123
第2节 极值与最值	124
知识点精讲	124
题型归纳及思路提示	125
第3节 方程的根	131
题型归纳及思路提示	131
第4节 函数的图形性质	136
知识点精讲	136
题型归纳及思路提示	137
第5节 微元法	140
知识点精讲	140
题型归纳及思路提示	141
精选习题五	144
参考答案	146
第6章 多元函数微分学	147
第1节 二元函数	147
知识点精讲	147

题型归纳及思路提示	147
第2节 二元函数的极限及连续性	148
知识点精讲	148
题型归纳及思路提示	149
第3节 二元函数的偏导数、全导数及全微分	150
知识点精讲	150
题型归纳及思路提示	152
第4节 多元函数的极值及应用	161
知识点精讲	161
题型归纳及思路提示	162
精选习题六	166
参考答案	167
第7章 二重积分	168
知识点精讲	168
题型归纳及思路提示	171
精选习题七	182
参考答案	183
第8章 无穷级数*	185
第1节 常数项级数	185
知识点精讲	185
题型归纳及思路提示	187
第2节 函数项级数与幂级数	194
知识点精讲	194
题型归纳及思路提示	196
第3节 无穷级数的求和	201
题型归纳及思路提示	201
精选习题八	209
参考答案	211
第9章 常微分方程及差分方程	212
第1节 常微分方程	212
知识点精讲	212
题型归纳及思路提示	216
第2节 差分方程*	225
知识点精讲	225
题型归纳及思路提示	226
精选习题九	230
参考答案	231

第10章 函数方程与不等式证明	232
------------------------------	-----

精选习题十	241
参考答案	242

第11章 微积分在经济中的应用	244
------------------------------	-----

知识点精讲	244
题型归纳及思路提示	246

精选习题十一	251
参考答案	252

第2篇 线性代数

篇要 线代的八种思维定势	253
---------------------------	-----

第1章 行列式	259
----------------------	-----

第1节 排列与逆序	259
知识点精讲	259
题型归纳及思路提示	259

第2节 行列式	260
知识点精讲	260
题型归纳及思路提示	263

精选习题一	272
参考答案	273

第2章 矩阵	274
---------------------	-----

第1节 矩阵	274
知识点精讲	274
题型归纳及思路提示	276

第2节 逆矩阵	281
知识点精讲	281
题型归纳及思路提示	284

精选习题二	296
参考答案	299

第3章 向量	301
---------------------	-----

第1节 向量	301
知识点精讲	301

第2节 向量的线性组合、线性表示及线性相关性	302
知识点精讲	302
题型归纳及思路提示	304

第3节 向量组的秩和矩阵的秩.....	314
知识点精讲	314
题型归纳及思路提示	315
精选习题三	321
参考答案	322
第4章 线性方程组	323
知识点精讲	323
题型归纳及思路提示	327
精选习题四	344
参考答案	346
第5章 特征值和特征向量	348
第1节 矩阵的特征值和特征向量	348
知识点精讲	348
题型归纳及思路提示	350
第2节 相似矩阵、对称矩阵及矩阵的对角化	356
知识点精讲	356
题型归纳及思路提示	357
精选习题五	368
参考答案	369
第6章 二次型	371
第1节 二次型	371
知识点精讲	371
题型归纳及思路提示	374
第2节 二次型的正定性及正定矩阵	381
知识点精讲	381
题型归纳及思路提示	382
精选习题六	385
参考答案	386

第3篇 概率论与数理统计

篇要 概率统计的九种思维定势	387
-----------------------------	-----

第1章 随机事件和概率	395
第1节 随机试验和随机事件	395
知识点精讲	395
题型归纳及思路提示	397

第2节 条件概率与事件的独立性	404
知识点精讲	404
题型归纳及思路提示	406
精选习题一	411
参考答案	412
第2章 随机变量及其分布	413
第1节 一维随机变量与分布函数	413
知识点精讲	413
题型归纳及思路提示	416
第2节 多维随机变量与分布函数	427
知识点精讲	427
题型归纳及思路提示	430
精选习题二	445
参考答案	448
第3章 随机变量的数字特征	451
第1节 一维随机变量的数字特征	451
知识点精讲	451
题型归纳及思路提示	453
第2节 多维随机变量的数字特征	458
知识点精讲	458
题型归纳及思路提示	460
精选习题三	473
参考答案	475
第4章 大数定律和中心极限定理	476
第1节 切比雪夫不等式与大数定律	476
知识点精讲	476
题型归纳及思路提示	477
第2节 中心极限定理	479
知识点精讲	479
题型归纳及思路提示	480
精选习题四	482
参考答案	483
第5章 数理统计的基本概念*	484
第1节 总体、样本和统计量	484
知识点精讲	484
题型归纳及思路提示	485
第2节 抽样分布	487
知识点精讲	487

题型归纳及思路提示	489
精选习题五	492
参考答案	493
第6章 参数估计*	494
第1节 点估计	494
知识点精讲	494
题型归纳及思路提示	496
第2节 区间估计	502
知识点精讲	502

注:带*的内容,数四考生不作要求。

题型归纳及思路提示	504
精选习题六	506
参考答案	508
第7章 假设检验*	509
知识点精讲	509
题型归纳及思路提示	511
精选习题七	514
参考答案	516

第1篇 微积分

篇要 微积分的四种思维定势

思维定势一:在题设条件中给出一个函数 $f(x)$ 在某点处的导数值即 $f'(a) = k(a, k$ 均为常数),“不管三七二十一”,根据所求(证)结论把 $f(x)$ 在该点的导数定义式“凑”出来再说.

【例1】设 $f(x)$ 可微, $f(0) = 0, f'(0) = 1, F(x) = \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt$,试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4}$.

【解】对定积分作变量代换 $x^2 - t^2 = u$,则

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du, \quad \text{且} \quad F'(x) = x f(x^2).$$

于是由洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{4x^3} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \quad (\text{以下利用导数 } f'(0) \text{ 的定义}) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2 - 0} = \frac{1}{4} f'(0) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

【例2】设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 定义,且对定义域中任何 x, y 均满足方程 $f(xy) = f(x)f(y)$,且 $f'(1) = n(n > 0)$,求 $f(x)$.

【解】在方程中令 $x = y = 1$ 得 $f(1) = f(1) \cdot f(1)$,由此得 $f(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$.

(1) 若 $f(1) = 0$,令 $y = 1$,由函数方程得 $f(x) = f(x) \cdot 0 = 0$,即 $f(x) \equiv 0$,但由 $f'(1) = n$ 知不合题意.

(2) 若 $f(1) = 1$,令 $y = 1 + h$,由函数方程得 $f(x + hx) = f(x) \cdot f(1 + h)$,则(设 $h \neq 0$)

$$\frac{f(x + hx) - f(x)}{hx} = \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}.$$

令 $h \rightarrow 0$,对上式两边取极限,并由 $f'(1) = n$,得 $f'(x) = n \frac{f(x)}{x}$.

这是可分离变量的微分方程,解得 $f(x) = Cx^n$.由条件 $f'(1) = n$,得 $C = 1$,即 $f(x) = x^n, x > 0$.

思维定势二:在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时,则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例3】设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $f(0) = f(\frac{1}{2})$, $2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$. 证明: 存在一个 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【证】 $f(2) = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \xrightarrow{\text{积分中值定理}} 2(1 - \frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta)$, $\frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta, 2]$ 上满足罗尔定理, 即存在一个 $\xi_1 \in (\eta, 2)$, 使 $f'(\xi_1) = 0$. ①

又 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上满足罗尔定理, 于是存在一个 $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$, 使

$$f'(\xi_2) = 0. \quad \text{②}$$

由①, ②可知 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. 再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_1]$ 上使用罗尔定理, 于是 $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【例4】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负、单调递减的连续函数, 且 $0 < a < b < 1$. 证明:

$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【证】由积分中值定理

$$\int_0^a f(x) dx = af(\xi_1) \geq af(a), \quad \xi_1 \in [0, a],$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi_2) \leq (b-a)f(a), \quad \xi_2 \in [a, b].$$

$$\text{于是 } \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{故 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【另证】 $\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^b f(x) dx.$

$$\text{令 } F(x) = b \int_0^x f(t) dt - x \int_x^b f(t) dt,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } F'(x) &= bf(x) - \int_x^b f(t) dt + xf(x) = \int_x^b f(x) dt - \int_x^b f(t) dt + 2xf(x) \\ &= \int_x^b [f(x) - f(t)] dt + 2xf(x) \geq 0, \quad (\text{由于 } f(x) \geq f(t) \geq 0). \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0) = 0$,

$$\text{故 } F(a) \geq F(0) = 0, \text{ 即 } b \int_0^a f(x) dx - a \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

$$\text{亦即 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

思维定势三:在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 或 $f(a) = f(b) = 0$, 则“不管三七二十一”先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \xrightarrow{f(a)=0} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$

或 $f(x) \stackrel{f(b)=0}{=} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), x < \xi < b.$

若 $f(a) = f(b) = 0$, 则 $\begin{cases} f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), a < \xi_1 < x, \\ f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), x < \xi_2 < b. \end{cases}$

【例5】设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, 试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【证】 $f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi_1), a < \xi_1 < x,$

则 $|f(x)| = (x-a)|f'(\xi_1)| \leq (x-a)M.$

同理 $|f(x)| \leq (b-x)M.$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M dx = \frac{(b-a)^2}{4} M. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

$$\text{即 } \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【例6】已知在 $[0, a]$ 上 $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最大值, 试证:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

【证】设 $f(c) = \max_{x \in (0, a)} \{f(x)\}$, 则 $f'(c) = 0$. (费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0, c]$ 与 $[c, a]$ 内分别用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, \quad 0 < \xi_1 < c,$$

$$f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c), \quad c < \xi_2 < a.$$

$$\text{于是 } |f'(0)| = |f''(\xi_1)c| \leq Mc,$$

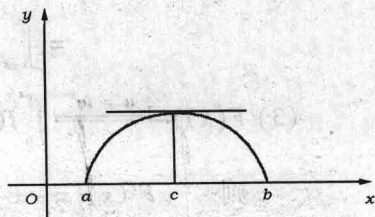
$$|f'(a)| = |f''(\xi_2)(a-c)| \leq M(a-c).$$

$$\text{故 } |f'(0)| + |f'(a)| \leq Mc + M(a-c) = Ma.$$

【例7】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的 $f''(x)$, 且 $f''(x) < 0, f(a) = f(b) = 0$, 则在 (a, b) 上 $f(x) > 0$, 且

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{4}{b-a}.$$

【证】由 $f''(x) < 0$ 可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹函数(图形上凸); 由凹函数性质知, $f(x)$ 大于连接 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y = 0$ (x 轴), 所以在 (a, b) 上 $f(x) > 0$. 再由 $f''(x) < 0$ 知, $f'(x)$ 是严格单调减少的, 从而知 $f(x)$ 在 (a, b) 内有唯一的极大值点, 记为 $x = c$. 此时 $f'(c) = 0$, 如右图



所示, 而在 (a, c) 上 $f'(x) > 0$, 在 (c, b) 上 $f'(x) < 0$. 由拉格朗日中值定理,

当 $x \in [a, c]$ 时, $f(x) = f'(\xi_1)(x-a) + f(a), \quad \xi_1 \in (a, x).$

由 $f'(x)$ 严格递减, $f'(\xi_1) < f'_+(a)$, 注意到 $f(a) = 0$, 有

$$f(x) < f'_+(a)(c-a), x \in [a, c].$$

当 $x \in [c, b]$ 时, 同理可得

$$f(x) < [-f'_-(b)](b-c), x \in [c, b].$$

于是 $\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(c-a)f'_+(a)}, x \in [a, c],$

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]}, x \in [c, b].$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &= - \int_a^b \frac{f''(x)}{f(x)} dx = \int_a^c \frac{-f''(x)}{f(x)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{f(x)} dx \\ &> \int_a^c \frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{(b-c)[-f'_-(b)]} dx \\ &= \frac{1}{(c-a)f'_+(a)} [f'_+(a) - f'_+(c)] + \frac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]} [f'_-(c) - f'_-(b)] \\ &= \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} > (b-a) \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}. \end{aligned}$$

思维定势四: 对定限或变限积分, 若被积函数或其大部分为复合函数, 则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例8】 求下列函数的导数(设 $f(u)$ 是 u 的连续函数):

(1) $F(y) = \int_0^y f(x-y) dx$, 求 $F'(y)$; (2) $F(x) = \int_0^{x^2} tf(x-t) dt$, 求 $F'(x)$;

(3) $F(x) = \int_0^1 f(te^x) dt$, 求 $F'(x)$; (4) $F(x) = \int_0^{x^2} xf(x+t) dt$, 求 $F'(x)$.

【解】 (1) $F(y) \xrightarrow{\text{令 } u = x-y} \int_{-y}^0 f(u) du$, 则 $F'(y) = -f(-y) \cdot (-1) = f(-y)$.

$$\begin{aligned} (2) F(x) &\xrightarrow{\text{令 } u = x-t} \int_x^{x-x^2} (x-u)f(u)(-du) \\ &= -x \int_x^{x-x^2} f(u) du + \int_x^{x-x^2} uf(u) du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } F'(x) &= - \int_x^{x-x^2} f(u) du - x[f(x-x^2) \cdot (1-2x) - f(x)] \\ &\quad + (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x) \\ &= \int_{x-x^2}^x f(u) du + x^2(2x-1)f(x-x^2). \end{aligned}$$

$$(3) F(x) \xrightarrow{\text{令 } u = te^x} \int_0^{e^x} f(u) \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{e^x} \int_0^{e^x} f(u) du = e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du,$$

$$\text{则 } F'(x) = -e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du + e^{-x} f(e^x) \cdot e^x = f(e^x) - e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du.$$

$$(4) \int_0^{x^2} f(x+t) dt \xrightarrow{\text{令 } u = x+t} \int_x^{x+x^2} f(u) du, \text{ 于是有 } F(x) = x \int_x^{x+x^2} f(u) du,$$

$$\text{则 } F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u) du + x[f(x+x^2) \cdot (1+2x) - f(x)].$$

【例9】* 设 $f(x)$ 可微, 且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t-x) dt$, 求 $f(x)$.

【解】 $\int_0^x t f(t-x) dt \xrightarrow{\text{令 } u=t-x} \int_{-x}^0 (u+x) f(u) du = -\int_0^{-x} u f(u) du + x \int_{-x}^0 f(u) du.$

于是原方程变为 $x = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{-x} u f(u) du - x \int_0^{-x} f(u) du.$

两边对 x 求导, 得 $1 = f(x) - (-x)f(-x)(-1) - \int_0^{-x} f(u) du - xf(-x)(-1).$

整理, 得 $1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u) du,$

两边再对 x 求导, 得 $0 = f'(x) - f(-x)(-1),$

即 $f'(x) = -f(-x),$ ①

上式两边对 x 求导, 得 $f''(x) = f'(-x),$ ②

由 ①, ② 得 $f''(x) = -f(x),$

即 $f''(x) + f(x) = 0,$

解此方程得 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

注意到 $f(0) = 1, f'(0) = -1$, 故 $f(x) = \cos x - \sin x.$

①

②

第1章 函数·极限·连续

第1节 函数

知识点精讲

一、基本概念

1. 函数

设有两个变量 x 和 y , 变量 x 的变域为 D , 如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照一定的法则, 变量 y 有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作: $y = f(x)$.

其中 x ——自变量, y ——因变量, 变域 D 为定义域, 记为 D_f , 变量 y 的取值的集合称为函数的值域, 记作 Z_f .

函数概念的两要素:

- ① 定义域 $\triangle$ 自变量 x 的变化范围 (若函数是解析式子表示的, 则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).
- ② 对应关系 $\triangle$ 给定 x 值, 求 y 值的方法.

记住下列简单函数的定义域:

$y = \frac{1}{x},$	$D_f: x \neq 0, \quad (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = \sqrt[n]{x},$	$D_f: x \geq 0, \quad [0, +\infty)$
$y = \log_a x,$	$D_f: x > 0, \quad (0, +\infty)$
$y = \tan x,$	$D_f: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$
$y = \cot x,$	$D_f: x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$y = \arcsin x \text{ (或 } \arccos x),$	$D_f: x \leq 1, \quad [-1, 1]$

2. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Z_f , 如果对于 Z_f 中任一 y 值, 从关系式 $y = f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值, 则称变量 x 为变量 y 的函数, 记为: $x = \varphi(y)$, 其中 $\varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记为: $y = f^{-1}(x)$.

- 注 ① $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图形重合; $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.
- ② 只有一一对应的函数才有反函数.

3. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ , 若 $D_f \supset Z_\varphi$, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

其中 x ——自变量, u ——中间变量, y ——因变量.

4. 初等函数

由常数 C 及基本初等函数通过有限次的四则运算或复合而成的只能用一个式子表示的函数, 称为初等函数. 基本初等函数包括五类函数: 幂函数 $y = x^\mu (\mu \in R)$; 指数函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$; 对数函数 $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$; 三角函数如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等; 反三角函数如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等.

5. 分段函数

如果一个函数在其定义域内, 对应于不同的区间段有着不同的表达形式, 则该函数称为分段函数. 常见的分段函数:

$$\textcircled{1} \text{ 符号函数 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0, \\ 0 & \text{当 } x = 0, \\ -1 & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

② y 是 x 的最大整数部分, 记为 $y = [x]$.

$$\textcircled{3} \text{ 狄利克莱 (Dirichlet) 函数 } y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases} \quad x \in \mathbb{Q}$$

二、基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义, 如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x))$$

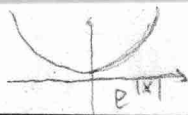
则称 $f(x)$ 为偶函数 (或 $f(x)$ 为奇函数).

图形特征: 偶函数 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称, 奇函数 $f(x)$ 的图形关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

- ① 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数.
- ② 偶数个奇 (或偶) 函数之积为偶函数; 奇数个奇函数的积为奇函数.
- ③ 一奇一偶函数的乘积为奇函数.
- ④ 奇函数的导数是偶函数, 偶函数的导数是奇函数.
- ⑤ $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是 $f(x)$ 的原函数

(i) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $F(x)$ 是偶函数



(ii) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 是奇函数的充要条件为 $a = 0$.

常见的偶函数: $|x|$, $\cos x$, x^{2n} (n 为正整数), $e^{|x|}$, e^{x^2} , ...

常见的奇函数: $\sin x$, $\tan x$, $\frac{1}{x}$, x^{2n+1} , $\arcsin x$, $\arctan x$, ...

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使对于任一 $x \in X$, 恒有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质:

- ① 若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.
- ② 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.
- ③ 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2, T_1 \neq T_2$ 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.
- ④ 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 则原函数 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 为周期函数的充要条件为

$$\int_0^T f(x) dx = 0. \quad \text{在一个周期内的积分为0}$$

常见函数的周期: $\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$;

$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$, 其周期 $T = \pi$.

3. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果 $\exists M > 0$, 使得对于一切 $x \in X$, 恒有: $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界; 若不存在这样的 $M > 0$, 则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注 函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数: $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, $(-\infty, +\infty)$

$|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$, $|\arccos x| \leq \pi$, $[-1, 1]$

$|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, $|\operatorname{arccot} x| < \pi$, $(-\infty, +\infty)$

4. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果对 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有:

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是严格单调增加 (或严格单调减少) 的; 如果对于 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geq f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加 (或单调减少) 的.

题型归纳及思路提示

题型1 判断函数的等价性

思路提示: 当且仅当给定的两个函数, 其定义域和对应关系完全相同时, 才表示同一函数, 否则表示不同的函数.

【例 1.1】 在下列各组函数中, 找出两个函数等价的一组.

$$(1) y = x^0 \text{ 与 } y = 1; \quad (2) y = (\sqrt{x})^2 \text{ 与 } y = \sqrt{x^2};$$

$$(3) y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x} \text{ 与 } y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}.$$

【解】 (1) $y = x^0$ 的定义域为 $\{x \neq 0\}$; $y = 1$ 的定义域为 R , 故该组的两个函数不等价.

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x \geq 0\}$; $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为 R , 故该组的两个函数不等价.

(3) 两个函数的定义域均为 $\{x \neq 0\}$ 且对应法则也相同, 故该组的两个函数等价.

【注】 由函数概念的两要素, 我们还容易看出, 函数的表示法只与定义域和对应法则有关, 而与用什么字母表示变量无关, 这被称为函数表示法的“无关特性”. 据此, 可得出由 $f[g(x)]$ 的表达式求解 $f(x)$ 表达式的有效方法: 令 $g(x) = t$, 解出 $x = \varphi(t)$, 代入函数表达式.

题型2 函数定义域的求法

思路提示: 求复杂函数的定义域, 就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集.

【例 1.2】 求函数 $y = \sqrt{\arcsin x + \frac{\pi}{4}}$ 的定义域.

【解】
$$\begin{cases} \arcsin x + \frac{\pi}{4} \geq 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1, \text{ 即 } [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1].$$

【例 1.3】 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x+3); \quad (2) f(2x).$$

【解】 (1) $\therefore f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$$\therefore f(x+3) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x+3 \leq 1 \\ -2 & 1 < x+3 \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} 1 & -3 \leq x \leq -2 \\ -2 & -2 < x \leq -1 \end{cases}$$

故 $D_f: [-3, -1]$.