工程力學教程
材料力學

上　冊

徐芝綸　吳永禎　合編

上海新亞書店出版

工程力學教程

第三冊

材料力學

上冊

徐芝綸 吳永禎 合編

新亞書店出版

工程力學教程

第三册

材料力學

上册

一九五三年三月初版

新定價人民幣六三〇〇元

編　者　徐芝綸　吳永禎

出版者　新亞書店

發行所　新亞書店
上海河南中路159號
電話：94258

分銷處　漢口　重慶　貴陽　新亞書店

1—5000—12

前　言

這一部材料力學是繼靜力學和運動學及動力學之後編寫的工程力學教程的第三册．

我們編寫本書的目的，和編寫前兩册的目的一樣，是希望對於解決目前教本缺乏的問題有所幫助．由於編寫的時間倉促，內容方面，不是應有盡有，而只包括了必須講授的部份和目前可能講授的部份．因此，本書並不是一本很完備的材料力學教本，更不是一本完備的材料力學參考書．我們在編寫的時候，關於內容的多寡和次序方面，曾徵求過幾個學校的工程力學教研組的意見，也有幾個學校的教研組自動地向我們提過意見；總結起來，大家有一個相同的意見，那就是：必須爭取時間，叫這本書早些出版，以應急需，日後再加以補充修正．因此，有些章節，本來打算編列進去的，後來又被删略了．

這本書共有十五章，分七十二節，大致恰供十六星期八十小時的講授之用． 若是“平面圖形的慣矩與慣積”一章已在應用力學中講授過，則八十小時是很充裕的；若是這一章要在材料力學中講授，則可能須將次要的內容删略幾節．

我們建議，對於講授時間不足八十小時的班級，或是對於專修科中非結構非機械的班級，可依次將下列章節删略：§9-3, §11-5, §8-4, §10-4, §10-3, §6-4, §13-5, 第十二章，§3-5, §7-4, §5-4, §3-6, §15-4, §15-3, 第十四章．這樣，不致影響未删略部份的連貫性．

薛鴻達同志奉調去哈，工作較忙，且以郵箋往返費時，故本書只由我們兩人編寫，不免有些考慮不周或疏忽不當之處，還望讀者們，特別是採用本書作爲教本的教師和同學們，多加指正！無論在內容、次序或講述方式方面，都請多提意見，以便訂正．

編寫本書時所用的主要參考書如下:

М. М. ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ: КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ, 1949.

Н. М. БЕЛЯЕВ: СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ, 1951.

Р. С. КИНАСОШВИЛИ: ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ, 1951.

А. Н. ДИННИКА: СПРАВОЧНИК ПО ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ, 1949.

Н. И. ИВАНОВ: СБОРНИК ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ, 1951.

G. DREYER: FESTIGKEITSLEHRE UND ELASTIZITÄTSLEHRE, 1923.

S. TIMOSHENKO: STRENGTH OF MATERIALS, 1941.

S. TIMOSHENKO AND GLEASON H. MAC-CULLOUGH: ELEMENTS OF STRENGTH OF MATERIALS, 1949.

太田友彌:新制材料力學, 1951.

編 者 一九五三年一月

目　次

材 料 力 學

第 一 章

緒 論

1-1. 材料力學中的問題. 設計一個結構或一部機器,必須使其在指定力的作用下,每一構件都不致有斷裂的危險,也不致過分改變形狀.因爲,一般而論,若是任一構件斷裂,則整個結構或機器都不安全;任一構件過分改變形狀,則整個結構或機器可能因此而有很大的變形,終致不再適用.因此,設計結構或機器時,首先須滿足安全適用的要求.視察已成的結構或機器時,亦須以是否安全適用爲主要的標準.

但是,設計結構或機器時,不只是要求安全適用而已,同時還須顧到經濟的原則.顯然,安全適用與經濟兩者之間往往是有矛盾的;前者通常要求增加材料的消費,而後者則要求減低材料的消費.材料力學提供了初步解決這一矛盾的原則,而這一矛盾,也就成爲促進材料力學發展的主要因素.

要判斷某一構件是否安全,必須考察該構件是否能承受其所應受的力.於此,首先須根據構件的平衡條件,求出構件所受的力,然後將此力與該構件的材料強度相比較,即可判斷該構件是否有斷裂的危險,即是否安全.反之,若已知某一構件所受的力及其材料的強度,即可據以選擇構件的尺寸,使其恰能承受該力,則既安全而又不浪費.或者,知道構件的尺寸及其材料的強度,則可算出該構件所能承受的安全載荷.這是材料力學中所要解決的第一類問題.

由每一構件所受的力和該構件的尺寸與材料性質,可以推算該構件的形狀的改變,即所謂形變.已知各構件的形變,又可根據幾何關係求

出各構件以及整個結構或全部機器因此而有的位置改變，即所謂位變，藉以判斷結構或機器是否適用．如何推算形變與位變，是材料力學中所要解決的第二類問題．

在某些問題中，構件所受的力不能僅由平衡條件求得，而必須藉構件的形變情況來確定．此種問題稱爲超靜定問題．如何利用形變條件與平衡條件的結合以解決超靜定問題，是材料力學中所要解決的第三類問題．

例如，有一木梁，支承於兩端．在任一載荷的作用下，梁內各處都受有力的作用，並且梁將彎曲．如何利用平衡條件以求得梁內各處所受的力，以及此力是否爲木料所能承受，木梁是否會彎斷等，都屬於材料力學中的第一類問題．如何根據木梁所受的力，木料的性質，與木梁的尺寸求出木梁的彎曲率，進而求出木梁任一截面的位變，都屬於材料力學中的第二類問題．假設在木梁上再加第三個支座，而使該梁成爲一超靜定梁，則三支座的反力以及任一段梁所受的力如何求得，都屬於材料力學中的第三類問題．

由此可見，解答材料力學中的問題，須以下列三者爲依據：(1)作用於物體的各力之間的平衡關係——靜力學條件；(2)形變的及形變與位變之間的幾何關係——幾何學條件；(3)材料的性質，主要是材料的強度與彈性，也就是力與形變之間的關係——試驗的結果．又由此可見，在材料力學中，和在其他許多工程學科中一樣，理論推演與試驗結果有同等重要的地位．若是沒有材料試驗的結果爲根據，則材料力學的理論無從建立；若是沒有日益發展的理論來指導試驗，則試驗的方法不易改進，並且試驗的結果也將成爲片斷的知識，而不能廣泛地應用．本書的主要內容在於理論的推演和工程問題的解答，至於材料性質，試驗方法，以及試驗的結果，則另有工程材料和材料試驗方面的專書討論，本書只在必要時作簡略的介紹．

1-2．外力與內力——以應力量度內力． 物體所受的力可分爲兩大類，即**外力**與**內力**．一物體所受的外力，乃是其他物體對於該物體所施

的力．外力又可分爲兩種：一種是分佈作用於物體表面的力，如梁上的載荷及壩面的水壓力等，稱爲**面力**；另一種是分佈作用於物體的體積內的力，如重力，運動體的慣性力等，稱爲**體力**．

內力是一物體的各部分之間互相作用的力，是由於物體抵抗外力或形變的影響而產生的．物體受了外力，物體內固然將發生內力；有時，即使物體不受外力，內力亦可能存在，例如，不均勻的加熱或冷卻就會使物體內發生內力．但材料力學中所討論的，主要是由外力所引起的內力．

設圖 1-1(a) 代表一受有外力而在平衡狀態中的物體(靜力平衡或動力平衡)．假想用一截面 mn 將該物體分爲 A 及 B 兩部分，而考察其

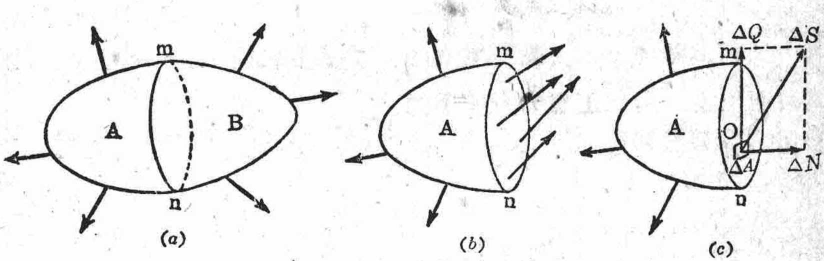

圖 1-1

中的一部分，如 A．由於 A 是在平衡狀態中，故可知 B 必施力於 A，以與 A 所受的外力維持平衡，如圖 1-1(b) 所示．又由反作用定律而知，A 亦必對 B 施以大小相等、方向相反的力．B 施於 A 的力，或 A 施於 B 的力，就是物體 AB 的內力．當考慮全物體 AB 的平衡時，此項內力無須顧及；但當考慮 A 或 B 的平衡時，此項內力就成爲與普通外力同一性質的力了．若是全物體 AB 的外力都是已知，則由 A 或 B 的平衡條件，可以求出內力的合力及合力偶．

通常，內力是連續分佈在截面 mn 上的．試在截面 mn 上任一點 O 處取一微小面積 ΔA，圖 1-1(c)，並假定該面積上的內力爲 ΔS，則該面積上的平均的內力強度爲

$$s_m = \frac{\Delta S}{\Delta A}. \qquad (1\text{-}1)$$

這一平均的內力強度稱爲 ΔA 上的平均應力．若將 ΔS 分解爲垂直於截面的分力 ΔN 及平行於截面的分力 ΔQ，則

$$\sigma_m = \frac{\Delta N}{\Delta A}, \quad \tau_m = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \tag{1-2}$$

各稱爲面積 ΔA 上的**平均正應力**及**平均剪應力**．

在一般情況下，截面 mn 上的內力並不是均勻分佈的．因此，平均應力並不足以表明內力分佈的眞實情況．若將 ΔA 的位置或大小予以改變，則 s_m, σ_m, τ_m 亦將隨而改變．今將 ΔA 逐漸縮小而趨於一點 O，則 ΔS, ΔN, ΔQ 都將逐漸減小，當 $\Delta A \to 0$ 時，方程(1-1)及(1-2)成爲

$$s = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta A}, \quad \sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}, \quad \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}, \tag{1-3}$$

其中 s 稱爲截面 mn 上點 O 處的**合應力**或簡稱**應力**，σ 及 τ 則分別稱爲截面上點 O 處的**正應力**及**剪應力**．

因 $(\Delta S)^2 = (\Delta N)^2 + (\Delta Q)^2$，除以 $(\Delta A)^2$，則由(1-1)及(1-2)得

$$s_m^2 = \sigma_m^2 + \tau_m^2. \tag{1-4}$$

若 $\Delta A \to 0$，則由(1-3)而得

$$s^2 = \sigma^2 + \tau^2 \text{ 或 } s = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \tag{1-5}$$

因爲應力是以面積除力而得出，故知應力也是矢量，其方向與內力的方向相同，並可用平行四邊形定律合成或分解．顯然，應力的因次爲(力)/(長度)^2；工程上常用的單位爲 $\mathrm{kg/cm^2}$, $\mathrm{kg/mm^2}$ 或 $\mathrm{t/m^2}$．

1-3．形變的類型． 任何物體受力後都將改變形狀．隨着物體原來的形狀及其所受的力的不同，發生的形變也不同．例如，繩受拉力而伸長，柱受壓力而縮短，梁的主要形變是彎曲，軸的主要形變是扭轉．但是，物體的任何形變都可分解爲兩種極簡單的形變．試假想將一發生形變的物體，在其變形之前，分割成爲無數個微小的立方體．物體變形以後，其每一微小立方體的形變不外兩種：(1)立方體的稜邊的長度改變，即伸長或縮短，(2)各稜邊間的直角的改變，即變爲鈍角或銳角．長度的改變稱爲**線形變**或**伸縮**，直角的改變稱爲**角形變**或**剪變角**．若是

物體的所有各點的線形變及角形變已知，則整個物體的形變完全確定.

線形變或伸縮可用一個無單位的數字表明. 設有一桿，原長度爲 l，受力後的伸縮爲 Δl，則該桿每單位長度的伸縮爲

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}. \tag{1-6}$$

若是對於 l 及 Δl 都用同樣的單位，則 ε 爲一無單位的比值，稱爲**相對伸縮**或**正應變**. Δl 則稱爲**絕對伸縮**.

角形變或剪變角亦可用兩個長度的比值來表明. 設矩形 mnpq 在變形之後成爲平行四邊形 m′npq′，圖 1-2. 假定形變極爲微小，則角形變或剪變角可表爲

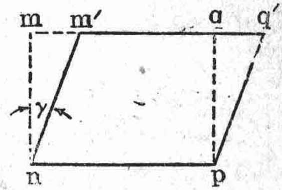

圖 1-2

$$\gamma=\frac{mm'}{mn}. \tag{1-7}$$

其中 mm' 稱爲**絕對剪變**，而角形變或剪變角 γ 又稱爲**相對剪變**或**剪應變**.

1-4. 材料的彈性——應力與應變的關係. 所有的材料都具有一定限度的彈性，就是說，由這些材料所構成的物體，在受到外力以後，都將發生形變，但如果外力不超過某一限度，則當外力移去後形變亦隨而消失. 在材料力學所討論的問題中，除極少數特別指明的問題以外，總是假定材料是**完全彈性**的，即，假定外力移去後物體能完全恢復其原有的形狀.

前已說明，物體內任一點的內力情況可用正應力 σ 及剪應力 τ 表明，形變情況可用正應變 ε 及剪應變 γ 表明. 對於完全彈性的材料，當應力不超過一定的限度時，兩種應力與應變之間有極簡單的關係. 此種關係，和靜力學或動力學中的基本原理一樣，是根據累積的經驗與試驗的結果而建立的. 例如，當桿被拉伸或壓縮時，正應力 σ 與正應變 ε 有比例關係

$$\sigma=E\varepsilon, \tag{1-8}$$

其中的比例常數 E 稱爲**縱彈性模數**或**拉壓彈性模數**. 同樣，剪應力 τ

與剪應變 γ 亦有比例關係.

$$\tau = G\gamma, \tag{1-9}$$

其中的比例常數 G 稱為**剪彈性模數**或**剛性模數**.

必須指出,當外力超過某一限度以後,尤其是當材料即將破裂時,上述比例關係並不存在. 但是,應力與應變之間仍有一定的關係,可用函數表為

$$\sigma = f(\varepsilon) \text{ 及 } \tau = f_1(\gamma).$$

第　二　章

簡單的拉伸與壓縮

2-1. 應力與應變. 當柱形桿的兩端截面上受到相等而相反的力時,桿卽受到拉伸[圖 2-1(*a*)]或壓縮[圖 2-1(*b*)].

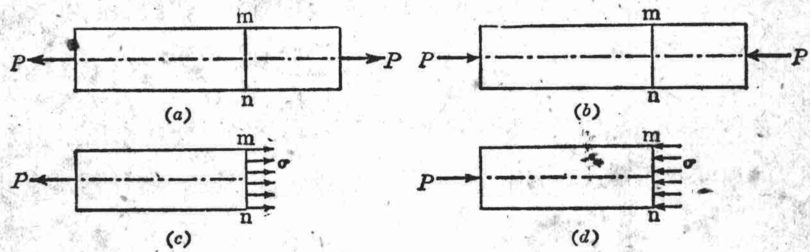

圖 2-1

拉力(或壓力)可用不同的方式施於兩端截面上,但試驗證明:只要桿是均質的柱形桿,而拉力(或壓力)的合力 P 的作用線又與桿軸相合,則在離兩端較遠的截面 mn 上,正應力就是均勻分佈的,而剪應力則不存在. 此種情況稱爲**簡單拉伸**或**簡單壓縮**. 如取截面左邊的桿的一部分爲脫離體,圖 2-1(*c*) 及 2-1(*d*),則由靜力平衡得

$$P=\sigma A \text{ 或 } \sigma=\frac{P}{A}, \qquad (2\text{-}1)$$

其中 σ 爲截面 mn 上的正應力,A 爲桿的截面積. 如爲拉伸,則 σ 稱爲**拉應力**,習慣上用(＋)號表示;如爲壓縮,則 σ 稱爲**壓應力**,用(－)號表示.

在簡單拉伸與壓縮的情況下,形變的幾何性質亦極爲簡單. 試驗證明:桿的任一原爲平面的截面,如 mn,在拉伸(或壓縮)後仍然保持爲平面,而桿則沿着拉伸(或壓縮)的方向伸長(或縮短),如圖 2-2(*a*) 及(*b*)所示. 令桿的原長爲 l, 拉伸(或壓縮)後的桿長爲 l_1, 則桿的絕對伸縮

爲:

$$\Delta l = l_1 - l. \tag{2-2}$$

顯然,在拉伸的情況下,Δl 爲正值;而在壓縮的情況下,Δl 爲負值. 桿的縱應變則爲 $\varepsilon = \Delta l/l$. 試驗證明,在彈性限度內,正應力 σ 與縱應變 ε 的關係爲:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ 或 } \sigma = \varepsilon E, \tag{2-3}$$

式中的 E 爲縱彈性模數. 就一般材料說,拉伸時和壓縮時的縱彈性模數是相同的. 若干材料的縱彈性模數見附表 1.

將式(2-1)及(2-3)代入關係式 $\varepsilon = \Delta l/l$ 中,得

$$\Delta l = \frac{Pl}{AE}, \tag{2-4}$$

卽,拉(或壓)桿的伸長(或縮短)與其長度及所受的拉力(或壓力)成正比,而與其截面積及其材料的縱彈性模數成反比. 這一關係稱爲虎克❶定律.

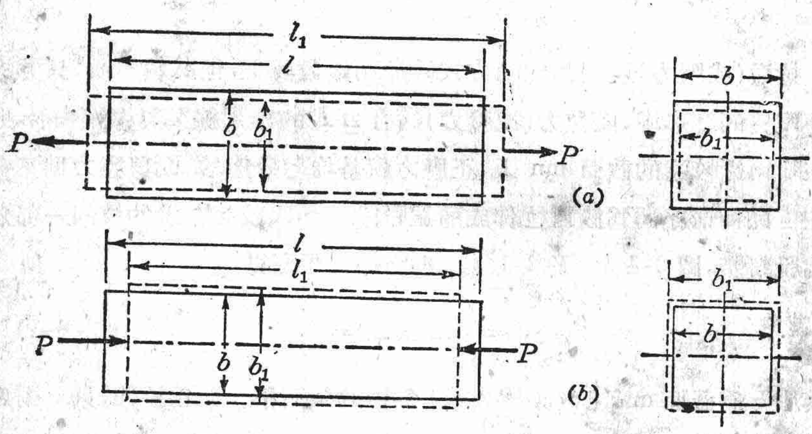

圖 2-2

桿受拉伸(或壓縮)時,除了沿拉力(或壓力)作用方向有伸長(或縮短)的縱應變外,在垂直於拉力(或壓力)的方向,還有側收縮(或側膨脹)隨同發生,圖 2-2. 令桿截面的原寬度爲 b, 拉伸(或壓縮)後的寬度爲 b_1, 則其側向絕對伸縮爲 $\Delta b = b_1 - b$, 而其側應變爲 $\varepsilon' = \Delta b/b$. 當然,

❶ Hooke.

拉伸時 Δb 與 ε' 都爲負值；而壓縮時 Δb 與 ε' 都爲正值．試驗結果又證明，側應變 ε' 與縱應變 ε 有如下的比例關係：

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \tag{2-5}$$

其中 μ 是一個沒有因次的係數，稱爲泊松[1]係數，亦稱泊松比．因爲 ε' 與 ε 的符號總是相反，故 μ 總是正值．若干材料的泊松係數亦見於附表 1 中．

前面曾說明：當"桿是均質的柱形桿，而拉力（或壓力）的合力的作用線又與桿軸相合"時，截面上的正應力是均勻分佈的．對於非均質的桿（如鋼筋混凝土柱），或合力的作用線與桿軸不相合的情形，將在後面討論．若桿的截面在某處有突然的變化，如桿內有孔或桿邊有槽等，則孔或槽附近的截面上的應力分佈就不再是均勻的．孔邊或槽邊的應力 σ_{max}，常遠較均勻應力 σ 爲高，如圖 2-3 所示．這種情形，稱爲**應力集中**，而 σ_{max} 與 σ 的比數 σ_{max}/σ 稱爲**應力集中因子**．在圖 2-3(*a*) 所示的情形下，應力集中因子約爲 3，而在圖 2-3(*b*) 所示的情形下，應力集中因子約爲 2．設計時應儘可能避免截面的突然改變，如不能避免，則可在孔或槽邊加上鑲邊，以減低應力集中的影響．

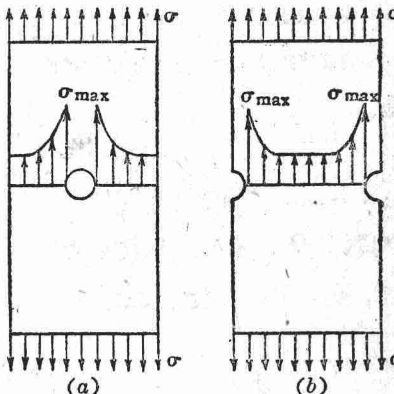

圖 2-3

例題 2-1．鋼桿長 16 cm，受力後的伸縮 $\Delta l = 0.12\,\text{mm}$，$E = 2 \times 10^6\,\text{kg/cm}^2$，求其應力．

解：縱應變 $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{0.12}{160} = 0.00075$．由方程(2-3)得

$$\sigma = \varepsilon E = 0.00075 \times 2 \times 10^6 = 1500\,\text{kg/cm}^2.$$

例題 2-2．有一鉛直懸掛的柱形桿，長 l，每單位體積重 w，圖 2-4(*a*)，求因自己重量而有的極大應力及其伸長

[1] Poisson.

解: 取截面 mn 以下的一段桿爲脫離體，其長度爲 x，圖 2-4(b)．令桿的截面積爲 A，則脫離體所受的重力 $P=wAx$．由方程(2-1)得截面 mn 上的應力爲

$$\sigma=\frac{P}{A}=wx. \qquad (a)$$

極大應力發生在桿的最上端截面上，以 $x=l$ 代入(a)，即得 $\sigma_{\max}=wl$．

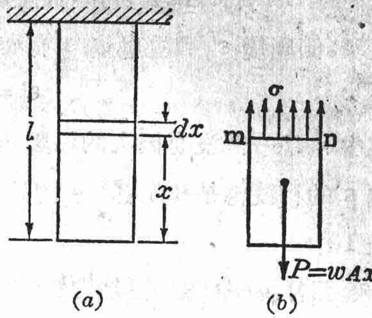

圖 2-4

試考慮截面 mn 處一段微長度 dx 的伸長．因 dx 極爲微小，故該微長度的桿的上下兩面上的應力可以認爲相等．由方程(2-3)得該微長度桿的縱應變爲 $\varepsilon=\frac{\sigma}{E}=\frac{wx}{E}$，而其伸長爲 $\varepsilon dx=\frac{wx}{E}dx$．沿桿長求積分，即得全桿的伸長爲

$$\Delta l=\int_0^l \varepsilon\, dx=\int_0^l \frac{wx}{E}dx=\frac{wl^2}{2E}=\frac{Wl}{2AE},$$

其中 $W=wAl$ 爲桿的總重量．

例題 2-3． 木梁 AB 與鋼桿 CB 鉸接於 B，並在 B 點懸一重 15t 的物體，圖 2-5(a)．設木梁的截面爲邊長 20 cm 的正方形，鋼桿的截面爲

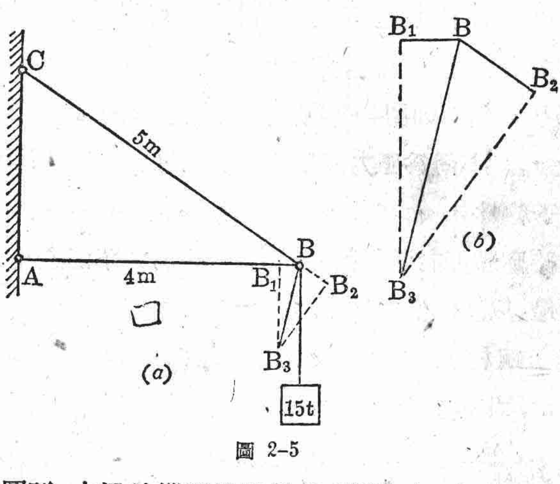

圖 2-5

直徑 5 cm 的圓形，木梁的縱彈性模數爲 $10^5\ \mathrm{kg/cm^2}$，鋼桿的縱彈性模數爲 $2\times10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$，求木梁的縮短，鋼桿的伸長，及 B 點的位變．

解: 由節點 B 的平衡求得木梁內的壓力爲 20 t，鋼桿內的拉力爲 25 t，因此，木梁的縮短爲 $\Delta l_1=\frac{20000\times400}{20^2\times10^5}=0.2\ \mathrm{cm}$，而鋼桿的伸長爲 $\Delta l_2=\frac{25000\times500}{\frac{\pi5^2}{4}\times2\times10^6}=0.32\ \mathrm{cm}$．縮短

AB 至 AB_1，令 $BB_1 = \Delta'_1$；延長 CB 至 CB_2，令 $BB_2 = \Delta l_2$，以 A 與 C 爲中心，各以 AB_1 及 CB_2 爲半徑，畫圓弧 B_1B_3 及 B_2B_3 相交於 B_3，則 B_3 卽爲 B 點移動後的位置，而 BB_3 卽爲 B 點的位變．因伸縮及位變均遠較梁長或桿長爲小，故可用直線代替圓弧．又爲便於圖解起見，將圖形放大如圖 2-5(*b*)．由圖 2-5(*b*) 量出 B 點的位變 $BB_3 = 0.83$ cm.

習題 2-1. 某桿長 43 cm，截面積爲 3 cm²，受拉力 3000 kg 後，伸長 0.2 mm，求該桿材料的縱彈性模數．　答：2.15×10^6 kg/cm².

習題 2-2. 一空心圓鋼桿，長 2 m，外半徑 5 cm，內半徑 3 cm，$E = 2 \times 10^6$ kg/cm²，受軸向力 64 t，求其伸長．　答：0.127 cm.

習題 2-3. 8 cm 長的圓柱形鋼桿，直徑 3 cm，受壓力後，長度縮短 0.0064 cm，直徑增加 0.00065 cm，求泊松係數．　答：0.27.

習題 2-4. 混凝土墩高 20 m，截面積 2 m²，頂上受載荷 1.11×10^6 kg，混凝土每立方公尺重 2250 kg，$E = 0.15 \times 10^6$ kg/cm²．求極大應力及其縮短．

答：6 kg/cm²，0.77 cm.

習題 2-5. 同材料，同長度，同截面的細桿 AC 及 BC 聯合承受重 W 的物體，圖 2-6．求

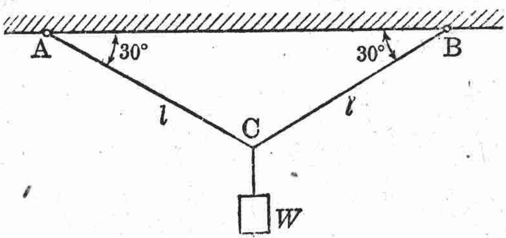

圖 2-6

證 C 點的位變爲 $\dfrac{2Wl}{AE}$，鉛直向下，其中 A 爲每桿的截面積，E 爲兩桿材料的縱彈性模數．

習題 2-6. 長 150 cm 的直角三角形鋼鈑(厚度均勻)懸以等長的鋼絲 AB 及 CD，如圖 2-7 所示．欲使鋼絲伸長後鋼鈑只有移動而無轉動，問鋼絲 AB 的直徑應幾倍於 CD？

答：2 倍.

圖 2-7

2-2. 拉伸圖． 柱形桿被拉伸後，可用一曲線來表示桿的伸長與其所受的力的關係．此種曲線稱爲拉伸圖．

依照一定的比例尺，以拉力 P 爲縱坐標，伸長 Δl 爲橫坐標，將試驗過程中任一瞬時桿所受的力與其對應的伸長在圖上用一點表明．連接各點而成的曲線就是拉伸圖．顯然，這樣作出來的圖是隨着拉桿的尺寸而改變的．因爲，同樣的力，對於較長或截面較小的桿，將產生較大的