



普通高等教育“十五”国家级规划教材

(高职高专教育)

高等数学

第三版

上册

盛祥耀 主编

高等教育出版社



013

59:1

普通高等教育“十五”国家级规划教材

(高职高专教育)

高等数学

(第三版)

上册

盛祥耀 主编

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部高职高专规划教材。作者根据教育部新制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”,结合多年教学经验,对本书第二版进行了适当修订,使其能够适应目前高职高专教育的现状。本书分为上、下册,上册包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何、向量代数等内容。本书第一版获国家教育委员会第二届普通高等学校优秀教材二等奖。

本书内容符合高职高专的教学要求,文字较通顺,推理正确,叙述清晰,易教易学,可作为高职高专院校工科各专业教材,也可供工程技术人员参考。

与本书配套的教材有《高等数学辅导》。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/盛祥耀主编.—3版.—北京:高等教育出版社,2004.4

ISBN 7-04-014690-8

I. 高... II. 盛... III. 高等数学-高等学校:技术学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 015577 号

策划编辑 蒋 青 责任编辑 丁鹤龄 封面设计 杨立新 责任绘图 黄建英
版式设计 马静如 责任校对 王 雨 责任印制 孔 源

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 新华书店北京发行所
印 刷 北京星月印刷厂

开 本 787×1092 1/16
印 张 14
字 数 340 000

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

版 次 1987 年 10 月第 1 版
2004 年 4 月第 3 版
印 次 2004 年 9 月第 2 次印刷
定 价 16.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号:14690-00

第一版前言

这本《高等数学》是为大学专科各专业编写的。全书共十二章,分上下两册出版。上册包括:空间解析几何、函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分和定积分及其应用等七章。把空间解析几何放在第一章讲授,是考虑到新生入学时学习热情很高,他们期待学习新的知识。如把函数作为第一章似不能满足这个要求。几年实践说明,这样安排较合适。当然,把它放在定积分之后,也是可以的。下册包括:多元函数及其微分法、重积分、线面积分、级数和常微分方程等五章,最后附有数学史料。

在编写过程中除考虑到大学专科各专业的要求和特点外,还参考了为大学本科四年制所制订的高等数学课程的教学基本要求(讨论稿)及中央电大的教学大纲。另外,我们吸收了不少从事大学专科各专业高等数学教学的教师的想法:全书不写多余的内容,所写内容均为教学所必需,但根据各专业的需要可以有所选取。例如,某些专业可以不学面积分、富氏级数。类似这些内容我们用*号表示。为了便于自学,安排了不少数量的例题,讲授时可酌情采用。本书每节后有习题,每章后有总习题。习题数量适中,多数应让学生完成。答案附在每章之后。

本书内容用150学时左右就能讲完,如果每学期以17周计算,那么第一学期每周可排5学时,第二学期每周可排4学时。

编写本书时,参考了清华大学应用数学系盛祥耀、居余马、李欧、程紫明等编的《高等数学》,同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第二版),盛祥耀、葛严麟、胡全德、张元德四人编的《高等数学辅导》,同济大学数学教研室编的《高等数学习题集》,别尔曼著、景毅等译的《数学解析习题集编》及盛祥耀、葛严麟编的《习题集》(未出版)。在此,对以上所提到的作者表示感谢。

限于编者水平,有不当之处,希望广大读者提出宝贵意见。

盛祥耀

1985年12月于清华园

第二版前言

本书根据国家教委组织制定的高等学校工程专科“高等数学课程教学基本要求”及第一版使用情况,对第一版作了以下的一些修改:

一、在内容的要求和安排上作了适度的调整。

空间解析几何中增加二、三阶行列式的简介,这是因为中学没有学,并将这一章调至定积分之后;降低了对极限 $\varepsilon-\delta$ 定义的要求;泰勒公式作为泰勒级数的准备知识来处理,并将它放在级数一章之中;洛必达法则中删去“ 0^0 ”,“ 1^∞ ”,“ ∞^0 ”等未定型的极限;略去了富氏级数中在 $[-l, l]$ 上的展开式等。

二、更加注意教学法。

向量代数中的叉积定义由洛伦兹力引入。中学生对此是非常熟悉的,从而使叉积定义容易理解和接受;加强了微分运算,使之与工程技术要求更加接近;对一些重要理论和方法加强了分析和解释,增加了小结等。

三、文字上作了一些修改。

经过以上的修改,作者相信这一版会更受读者的欢迎。

感谢读者对第一版的厚爱,希望第二版能继续得到读者的帮助和支持。

作者

1994.6.27. 于清华园

第三版前言

根据新近制定的“高等数学课程的教学基本要求”(送审稿),本版对第二版作了如下的一些修改。

1. 极限的“ $\varepsilon-N$ ”与“ $\varepsilon-\delta$ ”定义,改为描述性的,相应部分也随之修改。
2. 无穷小量的比较一节中保留定理一,删去定理二。
3. 导数的应用章中删除:罗尔定理与拉格朗日定理的证明;方程的近似根。
4. 积分章中删除:有理函数的积分法;近似积分法。改写了部分内容。
5. 多元函数及其微分法章中删除:全微分在近似计算中的应用;曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{cases}$ 的切线方程与法平面方程。引进记号 f'_1, f'_2 等。
6. 无穷级数章中删除:幂级数收敛半径的存在性;近似计算。改写了泰勒级数的部分内容。
7. 常微分方程章中删除:可化为 $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 型的方程;伯努利方程;微分方程的近似解;可降阶的高阶微分方程;弹簧振动问题的解法。
8. 订正了几处错误或不当之处。
9. 数学家史略分散到各有关内容之中。

编者

于清华园

2003年12月

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分。改革开放以来,在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下,各地已出版了一批高职高专教育教材。但从整体上看,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,不少院校尚在借用本科或中专教材,教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要。为此,1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》),通过推荐、招标及遴选,组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师,成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍,并在有关出版社的积极配合下,推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种,用5年左右时间完成。出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程。计划先用2~3年的时间,在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上,充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验,解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题;然后再用2~3年的时间,在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,通过研究、改革和建设,推出一大批教育部高职高专教育教材,从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

“教育部高职高专规划教材”是按照《基本要求》和《培养规格》的要求,充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的,适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2000年4月3日

目 录

第一章 函数	1	习题	75
§ 1. 集合 绝对值 区间	1	§ 4. 高阶导数	76
习题	4	习题	79
§ 2. 映射与函数 反函数	5	总习题	80
习题	9	第三章习题答案	81
§ 3. 初等函数	9	第四章 导数的应用	84
习题	12	§ 1. 极值	84
§ 4. 函数的简单形态	12	习题	91
习题	14	§ 2. 未定型的极限	92
§ 5. 几种常用的函数作图法	15	习题	98
习题	16	§ 3. 曲线的凸性及拐点 函数作图	98
总习题	16	习题	102
第一章习题答案	17	* § 4. 曲率	102
第二章 极限与连续	19	习题	106
§ 1. 数列的极限 函数的极限	19	总习题	106
习题	24	第四章习题答案	107
§ 2. 无穷小量与无穷大量 无穷小量的		第五章 不定积分	109
运算	24	§ 1. 原函数与不定积分	109
习题	26	习题	112
§ 3. 极限运算法则	27	§ 2. 凑微分法(简称凑法)	112
习题	30	习题	120
§ 4. 两个重要极限	30	§ 3. 变量替换法	121
习题	36	习题	124
§ 5. 无穷小量的比较	37	§ 4. 分部积分法	124
习题	39	习题	126
§ 6. 函数的连续性	39	§ 5. 积分表的使用	127
习题	47	习题	128
总习题	47	总习题	129
第二章习题答案	48	第五章习题答案	129
第三章 导数与微分	50	第六章 定积分及其应用	132
§ 1. 导数概念	50	§ 1. 定积分概念	132
习题	55	习题	136
§ 2. 函数的微分法	56	§ 2. 定积分的性质	136
习题	64	习题	140
§ 3. 微分及其在近似计算中的应用	66	§ 3. 定积分的基本公式(牛顿-莱布尼	

茨公式)	140	§ 3. 二、三阶行列式简介	172
习题	144	习题	175
§ 4. 变量置换法与分部积分法	144	§ 4. 向量及其加减法 数与向量的乘积	
习题	149	向量的坐标表示式	176
§ 5. 定积分的几何应用	150	习题	182
习题	155	§ 5. 数量积 向量积	182
§ 6. 定积分的物理应用	156	习题	189
习题	159	§ 6. 平面的方程	189
§ 7. 反常积分	160	习题	194
习题	163	§ 7. 直线的方程	194
总习题	163	习题	199
第六章习题答案	164	§ 8. 常用的二次方程的图形	200
第七章 空间解析几何 向量代数	166	习题	202
§ 1. 空间直角坐标系	166	总习题	202
习题	167	第七章习题答案	203
§ 2. 曲面、曲线的方程	168	附 积分表	206
习题	171		

第一章 函 数

§ 1. 集合 绝对值 区间

I. 集合

一般可以把集合理解为具有某种属性的一些对象所组成的全体. 例如某班全体同学组成一个集合; 所有三角形组成一个集合; 地球上所有的国家组成一个集合; 数 1、2、3、4、5 组成一个集合; 满足不等式 $a < x < b$ 的 x 组成一个集合; 第一、三象限分角线上所有的点组成一个集合等等. 集合里的各个对象叫做这个集合的元素. 习惯上集合用大写字母如 A 、 B 、 C ... 等表示, 而元素用小写字母如 a 、 b 、 c ... 等表示.

含有有限个元素的集合称为有限集, 含有无限个元素的集合称为无限集. 如果 a 是集合 A 的元素, 则记作 $a \in A$, 读作“ a 属于 A ”. 否则记作 $a \notin A$ (或 $a \notin A$), 读作“ a 不属于 A ”.

所谓给定一个集, 就是给出这个集合由哪些元素组成. 给出的方式不外两种: 列举法和描述法. 所谓列举法就是把集合中所有元素都列举出来写在大括号内. 例如集合 A 包含 1、2、3、4、5 五个数, 就可记为

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

所谓描述法, 就是把集合中的元素的公共属性描述出来. 它记为

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}$$

或

$$A = \{x : x \text{ 具有性质 } p\}.$$

大括号内先写上这个元素的一般形式, 再画一竖线或“:”, 然后写上这个集合的元素所具有的共同属性. 例如满足不等式 $a < x < b$ 的所有 x 的集合, 可表示为

$$A = \{x \mid a < x < b\},$$

或

$$A = \{x : a < x < b\}.$$

集合

$$M = \{C \mid C \text{ 是圆心在原点的圆}\}$$

表示所有圆心在原点的圆的集合. 集合

$$P = \{(x, y) \mid y = 2x + 1, x \in \mathbf{R}\}$$

表示所有在直线 $y = 2x + 1$ 上的点的集合, 其中 $\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合. 显然点 $(1, 2) \notin P$, 而点 $(1, 3) \in P$.

不含任何元素的集合叫做空集, 记为 $\emptyset$, 例如, 方程 $x^2 + y^2 = -1$ 的实数解是一个空集.

II. 子集、交集、并集和补集

定义一 如果集合 A 中的每一个元素都属于集合 B , 则称 A 为 B 的子集. 记为

$$A \subseteq B,$$

或

$$B \supseteq A,$$

读作“ A 含于 B ”或“ B 包含于 A ”。例如 $\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合, $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合. 显然 $\mathbf{Q}$ 中每一个元素都属于 $\mathbf{R}$. 所以集合 $\mathbf{Q}$ 是集合 $\mathbf{R}$ 的子集.

如果 A 是 B 的子集, 并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A . 那么集合 A 叫做集合 B 的真子集, 记作

$$A \subsetneq B.$$

例如, 所有有理数的集合 $\mathbf{Q}$ 是所有实数的集合 $\mathbf{R}$ 的真子集. 即

$$\mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}.$$

由定义可知, 任何一个集合 A 是它自己的子集, 即 $A \subseteq A$. 空集可认为是任何集合的子集.

定义二 设两个集合 A, B . 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 则称集合 A 与集合 B 相等. 记作

$$A = B.$$

这里要注意, 如果集合 A 只有一个元素 a 组成, 不能写为

$$A = a,$$

应写为

$$A = \{a\}.$$

如果元素 a 属于 A , 不能写为

$$a \subset A,$$

应写为

$$a \in A,$$

也就是说记号 $\subsetneq, \subseteq$ 是在集合之间使用的.

定义三 既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素的集合叫做集合 A 与集合 B 的交集, 记作

$$A \cap B,$$

如图 1.1.

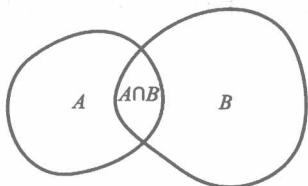


图 1.1

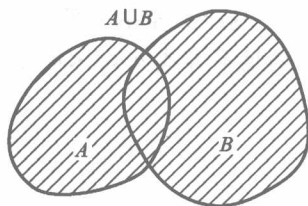


图 1.2

定义四 所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的并集. 记作

$$A \cup B.$$

如图 1.2 中阴影部分表示集合 A 与 B 的并集.

例如, $A = \{x \mid 1 < x < 3\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 2\}$, 那么

$$A \cap B = \{x \mid 1 < x < 2\}; \text{ 而 } A \cup B = \{x \mid 0 < x < 3\}.$$

又例如,

$$\{1, 2, 3, 4, 6\} \cap \{0, 2, 4, 8, 10\} = \{2, 4\},$$

$$\{1, 2, 3, 4, 6\} \cup \{0, 2, 4, 8, 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}.$$

如果所讨论的集合都是某一个集合 I 的子集. 那么集合 I 称为全集.

定义五 如果集合 A 是全集 I 的子集, 则在 I 中不属于 A 的元素所组成的集合, 叫做集合 A 在集合 I 的补集, 简称集合 A 的补集, 记作 $\complement A$. 如图 1.3 中阴影部分是集合 A 的补集 $\complement A$ (长方形表示全集 I), 它可表示为

$$\complement A = \{x \mid x \in I, \text{ 且 } x \notin A\}.$$

显然, $A \cup \complement A = I, A \cap \complement A = \emptyset. \complement \complement A = A$. 其中 $\complement \complement A$ 表示: 集合 $\complement A$ 的补集. 例如, 全集 I 为所有实数的集合 $\mathbf{R}$. $\mathbf{Q}$ 表示所有有理数的集合, 则

$$\complement \mathbf{Q} = \{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{ 且 } x \notin \mathbf{Q}\},$$

即 $\complement \mathbf{Q}$ 为所有无理数的集合.

III. 绝对值

定义六 实数 a 的绝对值 (记作 $|a|$) 规定为

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{若 } a \geq 0; \\ -a, & \text{若 } a < 0. \end{cases}$$

a 的绝对值在数轴上表示点 a 到原点的距离.

绝对值有以下的一些性质:

- (1) $-|a| \leq a \leq |a|$;
- (2) 如果 $|x| < \varepsilon$, 则 $-\varepsilon < x < \varepsilon$, 反之亦然;
- (3) 如果 $|x| > N$, 则 $x > N$ 或 $x < -N$, 反之亦然.

绝对值有以下的一些运算规则:

- (1) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (a, b 为实数).

事实上

$$\begin{aligned} -|a| &\leq a \leq |a|, \\ -|b| &\leq b \leq |b|, \end{aligned}$$

两式相加, 得

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

所以

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

- (2) $|a - b| \geq |a| - |b|$ (a, b 为实数)

事实上,

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|,$$

即

$$|a - b| \geq |a| - |b|.$$

- (3) $|ab| = |a||b|$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$).

这两个公式是显然的.

IV. 区间

集合 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b) . 它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段, 但不包

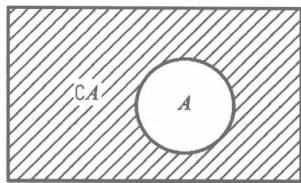


图 1.3

括端点 a 及端点 b (图 1.4); 集合 $\{x|a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$. 它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段, 包括其两个端点 (图 1.5).



图 1.4

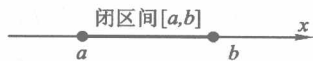


图 1.5

还有其他类型的区间:

$\{x|a < x \leq b\}$ 记作 $(a, b]$, 称为半开区间;

$\{x|a \leq x < b\}$ 记作 $[a, b)$, 称为半开区间;

$\{x|x > a\}$ 或 $\{x|x < a\}$ 记作 $(a, +\infty)$ 或 $(-\infty, a)$, 称为半无穷区间;

$\{x|x \text{ 为任何实数}\}$ 记作 $(-\infty, +\infty)$, 称为无穷区间等.

集合 $\{x||x-a| < \varepsilon\}$ 称为点 a 的 ε 邻域. 它也可以用开区间来表示. 事实上,

$$|x-a| < \varepsilon,$$

去绝对值, 得

$$-\varepsilon < x-a < \varepsilon,$$

即

$$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon.$$

就是说, 点 a 的 ε 邻域就是开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. 从数轴上看, 点 a 的 ε 邻域表示: 以点 a 为中心, 长度为 2ε 的开区间 (图 1.6).

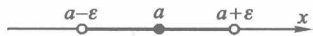


图 1.6

例如, 把 -1 的 $\frac{1}{2}$ 邻域表示成开区间. 即

$$|x - (-1)| < \frac{1}{2}.$$

去绝对值, 得

$$-\frac{1}{2} < x+1 < \frac{1}{2},$$

即

$$-1 - \frac{1}{2} < x < -1 + \frac{1}{2},$$

就是开区间 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

习 题

1. 设 $A = \{-1, 2, 4, 9, 10\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. 求 $A \cap B, A \cup B$.
2. 设 $A = \{x|x \geq 0\}$, $B = \{x|x < 5\}$ 求 $A \cap B, A \cup B$.
3. 设全集 $\mathbf{Z}$ 为所有整数的集合, $\mathbf{N}$ 为所有自然数的集合, 即 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, 求 $\mathbf{N}$ 的补集, 即 $\complement \mathbf{N}$.
4. 写出集合 $A = \{1, 2, 0\}$ 的所有子集.
5. 解不等式 $|x| > |x+1|$.
6. 解等式 $|x+1| + |x-1| = 4$.
7. 把集合 $A = \{x||x-2| \leq 3\} \cap B = \{x||x+1| < 2\}$ 用区间记号表示.
8. 把点 2 的 $\frac{1}{3}$ 邻域用集合表示.

§ 2. 映射与函数 反函数

I. 映射

定义一 设 A, B 是两个非空集合, 如果按照一个确定的规则 f , 对于集合 A 中每一个元素, 在集合 B 中都有唯一的元素和它对应, 则称 f 是由集合 A 到集合 B 的映射. 记作

$$f: A \rightarrow B.$$

如果 A 中的元素 a , 对应的是 B 中的元素 b . 则称 b 为 a 的像, a 为 b 的原像.

在定义中, 要注意按照规则 f 确定的集合 B 中的元素存在且是唯一的. 例如图 1.7(b), 1.7(c) 不表示由集合 A 到集合 B 的映射. 因为图 1.7(b) 中集合 A 的元素 a 对应集合 B 中的两个元素 b, c , 不符合映射定义中唯一性的要求. 而图 1.7(c) 中集合 A 的元素 a_2 在集合 B 中无元素对应, 也不符合映射定义中存在性的要求, 但要注意, 图 1.7(d) 所表示的是映射, 尽管集合 A 中存在两个元素 a_1, a_3 对应集合 B 中的同一个元素 b , 但不违背映射的定义.

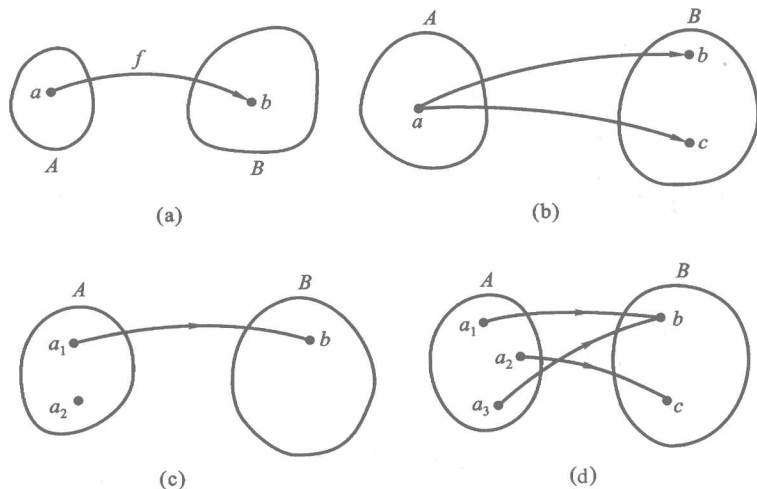


图 1.7

例 1 设 A 表示某一瞬间出生在地球上的人的集合, B 表示地球上每一点的坐标(经纬度)的集合, 规则 f 是 A 中的人对应其出生地的坐标, 则 f 是由 A 到 B 的映射.

例 2 设 $\mathbf{N}^*$ 是除去 0 的自然数集合, $\mathbf{N}^*$ 中所有大于 1 的元素集记为 A , $\mathbf{R}^+$ 是所有正实数的集合, 对应规则 f 是将 A 中元素取对数(常用对数), 则 f 是由 A 到 $\mathbf{R}^+$ 的映射.

例 3 设 $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{y | 1 \leq y \leq 9\}$, 对应规则 f 是将集合 A 中元素取平方, 则 f 是由 A 到 B 的映射.

II. 函数

定义二 设有两个非空实数集合 D, B , 如果对于数集 D 中的每一个数 x , 按照确定的规则 f 对应着数集 B 中唯一的一个数 y , 则称 f 是定义在集合 D 上的函数.

事实上, 函数就是集合 D 到集合 B 的一种映射.

D 称为函数的定义域, 与 $x \in D$ 对应的实数 y 记作 $y = f(x)$. 与 x_0 对应的 y 值有时记为

$f(x)|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$, 集合 $B_f = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域. 显然 $B_f \subseteq B$.

习惯上, x 称为自变量, y 称为因变量. 要注意 f 是函数, 而 $f(x)$ 是函数值. 但是研究函数总是通过函数值来进行的. 为了方便, 以后也把 $f(x)$ 称作 x 的函数. 或 y 是 x 的函数.

如果对于自变量 x 的某一个值 x_0 , 因变量 y 能得出一个确定的值, 那么就说函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处有定义.

对于不同的函数, 应该用不同的记号, 如 $f(x), g(x), F(x), G(x)$ 等等.

有时, 会出现对于变量 x 的一个值, 有几个 y 值与之对应的情形, 根据函数定义, y 不是 x 的函数. 但为了方便, 我们约定把这种情况称之为 y 是 x 的多值函数. 对于多值函数通常是限制其 y 的变化范围使之成为单值, 再进行研究. 例如, 反三角函数 $y = \text{Arcsin } x$ 是多值函数, 当 y 限制在 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 就是单值了 (这时习惯上称为主值, 记作 $y = \arcsin x$). 通过对 $y = \arcsin x$ 的研究就可了解 $y = \text{Arcsin } x$.

例 4 设函数 $f(x) = x^4 + x^2 + 1$. 求 $f(0), f(t^2), [f(t)]^2, f\left(\frac{1}{t}\right), \frac{1}{f(t)}$.

解 $f(0) = 0^4 + 0^2 + 1 = 1,$

$$f(t^2) = (t^2)^4 + (t^2)^2 + 1 = t^8 + t^4 + 1,$$

$$[f(t)]^2 = (t^4 + t^2 + 1)^2,$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t}\right)^4 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 + 1 = \frac{1+t^2+t^4}{t^4},$$

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{t^4 + t^2 + 1}.$$

例 5 设 $f(x+3) = \frac{x+1}{x+2}$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+3=t$, 则 $x=t-3$.

$$f(x+3) = \frac{(t-3)+1}{(t-3)+2} = \frac{t-2}{t-1}.$$

即

$$f(t) = \frac{t-2}{t-1}.$$

所以

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1}.$$

例 6 设 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, 证明 $f(x) = f(-x)$.

证明 因为

$$f(-x) = \frac{1}{-x} \cdot \sin \frac{1}{-x} = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

所以

$$f(x) = f(-x).$$

例 7 求函数 $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \lg(x-1)$ 的定义域.

解 这个函数是两项之和,所以当且仅当每项都有定义时,函数才有定义. 第一项的定义域是 $D_1 = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 第二项的定义域是 $D_2 = \{x | x > 1\}$. 所以函数 $f(x)$ 的定义域是

$$D = D_1 \cap D_2 = \{x | 1 < x \leq 2\},$$

或写为区间 $(1, 2]$.

III. 函数的表示法

函数有三种表示法:公式表示法;图形表示法;表格表示法. 图形表示法在工程中常用. 例如生产的进度,仪器的记录等. 它的优点是直观,一目了然,它的缺点是不便于分析研究. 表格表示法在设计工作中常用. 它的优点是使用方便,如对数表,三角函数表,它的缺点也是不便于分析研究. 公式表示法在理论研究中、推导论证中使用,它的优点是表达清晰、紧凑,缺点是抽象,不易理解.

IV. 建立函数关系

寻找函数关系是高等数学所要研究的课题之一. 在这儿我们仅介绍利用简单的几何或物理关系建立函数关系. 在以后的一些章节中还将介绍利用微积分建立函数关系.

例 8 有一块边长为 a 的正方形铁皮, 将它的四角剪去适当的大小相等的小正方形, 制成一只无盖盒子, 求盒子的体积与小正方形边长之间的函数关系.

解 设剪去的小正方形的边长为 x , 盒子的体积为 V . 由图 1.8, 容易得到

$$V = x(a - 2x)^2 \quad \left(x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)\right).$$

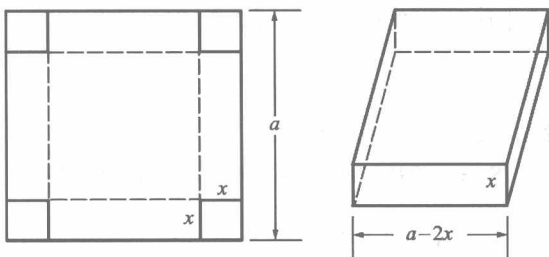


图 1.8

例 9 设有一圆锥容器, 容器的底半径为 R 厘米, 高为 H 厘米. 现以 a 立方厘米每秒的速率往容器内注入水. 试把容器中的水的容积 V 分别表示成时间 t 及水高 h 的函数(图 1.9).

解 (1) 显然 t 秒时容器中水的容积为

$$V = at.$$

(2) 设当容器中水的高度为 h 时水的容积为 V , 并设此时水面的半径为 r . 根据锥体体积公式有

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H - h).$$

因为 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, 所以有

$$\frac{r}{R} = \frac{H - h}{H},$$

即

$$r = \frac{R}{H}(H - h),$$

代入锥体体积公式,得

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} \left(1 - \left(1 - \frac{h}{H} \right)^3 \right), h \in [0, H].$$

有时变量之间的函数关系较为复杂,需要用几个式子来表示. 如下面的例 10.

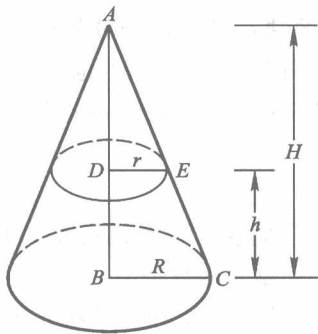


图 1.9

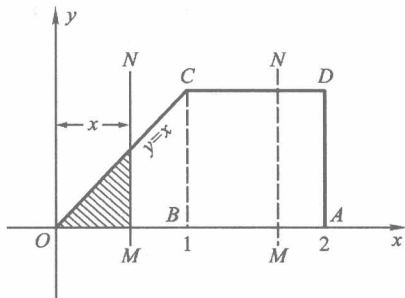


图 1.10

例 10 如图 1.10 所示的图形,在 O 与 A 之间引一条平行于 y 轴的直线 MN ,试将 MN 左边阴影部分的面积 S 表示为 x 的函数.

解 当直线 MN 位于区间 $[0, 1]$ 内时,即 $x \in [0, 1]$ 时.

$$S = \frac{1}{2}x^2.$$

当直线 MN 位于区间 $[1, 2]$ 内时,即 $x \in [1, 2]$ 时,

$$\begin{aligned} S &= \triangle OBC \text{ 面积} + \text{矩形 } BCNM \text{ 的面积} \\ &= \frac{1}{2} + (x - 1) = x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以面积 S 为

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{当 } x \in [0, 1] \text{ 时,} \\ x - \frac{1}{2}, & \text{当 } x \in (1, 2] \text{ 时.} \end{cases}$$

这是在定义域内不同区间上用不同式子表示的一个函数,这种形式的函数,称为分段函数. 要注意它是用两个式子表示的函数,而不是两个函数.

V. 反函数

设函数 f 定义在数集 A , 其值域为数集 B . 如果对于数集 B 中每一个数 y , 数集 A 中都有唯一的一个数 x , 使 $f(x) = y$. 记由 y 对应于 x 的规则为 φ , 则称 φ 为 f 的反函数, 也常称 $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 二者的图形是相同的. 习惯上自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示. 因此, 也可说 $y = \varphi(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 但这时二者的图形是对称于直线 $y = x$.

求反函数的步骤一般是这样: 从 $y = f(x)$ 中解出 x , 得 $x = \varphi(y)$ 再将 x, y 分别换为 y, x . 即 $y = \varphi(x)$ 就是 $y = f(x)$ 的反函数.