读书是最美的姿态 Reading is most graceful

9

拓展数学课堂系列读本——走进数学乐园

华罗庚实验学校数学课本

九年级

丛书编委会

顾　　问：肖承运　徐伟宣

主　　任：曹少华

副 主 任：周怡和　陈国富　吕水庚　杨国华　吴友庚

丛书编委：潘小本　贺小黑　佘双富　张俊　陈斌　李继锋　谭年平　戴苏庆　冯建伟　孔粉富　王权　潘建明　蒋守成　孟国伟

丛书主编：吕水庚

小学主编：吴友庚

本册主编：荆春芳

本册编写：荆春芳　吴友庚　陈锁华　姚珍　田伟平

吉林出版集团有限责任公司

前言

为纪念华罗庚教授诞辰一百周年，华罗庚实验学校名师工作室特别为同学们奉献了这套《华罗庚实验学校数学课本》。它是向九年制数学素质教育更高目标进军的杰作，是华罗庚实验学校全体数学老师数十年教学智慧的结晶。华罗庚教授的一生是勤奋好学的一生，是自学成才的典范。他的格言“天才在于积累，聪明在于勤奋”充分地阐释了这一成功的秘诀。在数学学习上，相信你只要勇于攀登，不断超越，就一定会在美妙的数学乐园中玩转数学摩天轮。《华罗庚实验学校数学课本》将带你遨游数学的海洋，给你增添无限的智慧。

《华罗庚实验学校数学课本》依据现行数学课程标准，紧密结合当前九年义务教育数学教材，力求体现创新的元素：内容创新体现数学来源于现实；呈现方式创新体现让学生自主探究；结构创新体现不同的人学习不同的数学。它的每一章节都分为三部分：知识要点、典例评析和巩固练习。“知识要点”便于同学们在自学前即了解其结构脉络与学习要求，以提高同学们自主探究的针对性；“典例评析”精选了与现学数学课本内容、生活紧密相联的内容作为载体，引领同学们进行自主探究，学会学习；“巩固练习”主要目的是让同学们在练习中进一步体验自主学习所带来的成功感受，题目设置注意了问题的层次性，其中有与例题紧密配套的基本题，只要同学们模仿“典例”即可完成，也有极少数题目需要发挥你的聪明才智，灵活运用所学的知识进行思考。

总之，《华罗庚实验学校数学课本》的定位是要让同学们奠定扎实的数学基础，在动手实践、自主探索、合作交流的学习过程中促进数学思维更好地发展，让每一位同学都能走进数学的乐园，享受学习数学所带来的无限乐趣。它将成为教师的好参谋，为教师的教学提供更好的教学素材，以不断提高当前的课堂教学效益。它也会成为家长们辅导孩子学好数学的好帮手，在不加重孩子学习负担的前提下，与孩子一道分享探索与思考的乐趣，感受孩子成长的喜悦。

衷心祝愿每位同学都能在“数学乐园”里尽情畅游，快乐成长。《华罗庚实验学校数学课本》为你们插上思维飞翔的翅膀，为你们的终生发展奠定坚实的基础。

华罗庚金杯全国少年数学邀请赛组委会副主任
主试委员会主任委员
中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长
徐坤宝

目录

上 篇

第一章　一元二次方程的解法

知识要点

形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的方程叫做一元二次方程的一般形式，任何一元二次方程都可以通过去分母、去括号、移项、合并同类项等过程化为一般形式.

配方法、公式法、因式分解法是解一元二次方程的基本方法，而公式法是解一元二次方程的最普遍、最具有一般性的方法.

求根公式 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 内涵丰富：它包含了初中阶段已学过的全部代数运算；它回答了一元二次方程的诸如怎样求实根、实根的个数、何时有实根等基本问题；它展示了数学的简洁美.

降次转化是解方程的基本思想，有些条件中含有(或可转化为)一元二次方程相关的问题，直接求解可能会有许多不便，往往不是去解这个二次方程，而是对方程进行适当的变形来代换，从而使问题易于解决，解题时常用到变形降次、整体代入、构造零值等技巧与方法.

典例评析

例 1　选用适当的方法解下列一元二次方程.

(1) $x^2+4x-2005=0$

(2) $x^2-9x-5=0$

(3) $x(x+2)=2+x$

分析　方程(1)的二次项系数为 1，一次项系数为 4，可以考虑用配方法解；方程(2)的一次项系数是奇数，用配方法会出现分数运算，比较繁琐，在有理数范围内也无法用因式分解法来解，所以用公式法来解；方程(3)的左右两边有相同因式，可以考虑先把方程右边的式子移到方程左边，然后用因式分解法来解.

解　(1) $x^2+4x+4=2009$

$(x+2)^2=2009$

$x+2=\pm\sqrt{2009}$.

$\therefore\ x_1=-2+\sqrt{2009}$，$x_2=-2-\sqrt{2009}$.

(2) $\Delta=b^2-4ac=(-9)^2-4\times1\times(-5)=101>0$

$\therefore\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}=\dfrac{9\pm\sqrt{101}}{2}$，

$\therefore\ x_1=\dfrac{9+\sqrt{101}}{2}$，$x_2=\dfrac{9-\sqrt{101}}{2}$.

(3) $x(x+2)-(x+2)=0$

$(x-1)(x+2)=0$

$\therefore\ x_1=1$，$x_2=-2$.

说明　根据方程的结构特点和各项系数特点选择适当的方法来解方程，可以迅速准确地求得方程的解，但要注意所选的方法要合理准确，如方程(3)就不能在方程两边同时除以 $(x+2)$.

例 2　解方程：$x^2-|x|-2=0$.

分析　该方程与上例的相比，增添了绝对值符号，我们可以利用转化思想，通过讨论，脱去绝对值符号，把绝对值方程转化为

一般的一元二次方程来解.

解 (1)当 $x\geqslant 0$ 时,原方程化为 $x^2-x-2=0$.

解得 $x_1=2$,$x_2=-1$(不合题意,舍去);

(2)当 $x<0$ 时,原方程化为 $x^2+x-2=0$.

解得 $x_1=1$(不合题意,舍去),$x_2=-2$;

$\therefore$ 原方程的根是 $x_1=2$,$x_2=-2$.

说明 在解方程时,转化思想的运用非常广泛,通过转化常常能把高次方程转化为低次方程、多元方程转化为一元方程、分式方程转化为整式方程、无理方程转化为有理方程,请看下面的例题.

例 3 解下列方程.

(1)$2x^3-x^2-6x+3=0$

(2)$(x-2)^2(x+1)(x-5)+8=0$

(3)$(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)-168x^2=0$

分析 以上方程都是整式方程,且方程中未知数的最高次数均大于 2,我们把这样的方程称为高次方程.解高次方程的基本思想是降次,即把高次方程转化为二次方程或一次方程,转化的方法有因式分解法和换元法.

解 (1)原方程可化为:$x^2(2x-1)-3(2x-1)=0$,

即:$(2x-1)(x^2-3)=0$,$\therefore$ $2x-1=0$ 或 $x^2-3=0$,

由 $2x-1=0$ 得:$x=\dfrac{1}{2}$,由 $x^2-3=0$ 得:$x=\pm\sqrt{3}$,

$\therefore$ 原方程的解为:$x_1=\dfrac{1}{2}$,$x_2=\sqrt{3}$,$x_3=-\sqrt{3}$.

(2)原方程可化为:$(x^2-4x+4)(x^2-4x-5)+8=0$,

$\therefore$ $(x^2-4x)^2-(x^2-4x)-20+8=0$,

即:$(x^2-4x)^2-(x^2-4x)-12=0$,

设 $y=x^2-4x$,则以上方程可化为:$y^2-y-12=0$,

即:$(y-4)(y+3)=0$,$\therefore$ $y=4$ 或 $y=-3$,

当 $y=4$ 时,即 $x^2-4x-4=0$,$\therefore$ $x=2\pm 2\sqrt{2}$,

当 $y=-3$ 时,即 $x^2-4x+3=0$,$\therefore$ $x=1$ 或 $x=3$,

$\therefore$ 原方程的解为:$x_1=2+2\sqrt{2}$,$x_2=2-2\sqrt{2}$,$x_3=1$,$x_4=3$.

(3)原方程可化为:$[(x-1)(x-6)][(x-2)(x-3)]-168x^2=0$,

即:$(x^2-7x+6)(x^2-5x+6)-168x^2=0$,

设 $y=x^2+6$,则原方程可化为:$(y-7x)(y-5x)-168x^2=0$,

即:$y^2-12xy+35x^2-168x^2=0$,

$\therefore$ $y^2-12xy-133x^2=0$,

$\therefore$ $(y-19x)(y+7x)=0$,

$\therefore$ $y=19x$ 或 $y=-7x$,

当 $y=19x$ 时,$x^2-19x+6=0$,$\therefore$ $x=\dfrac{19\pm\sqrt{337}}{2}$

当 $y=-7x$ 时,$x^2+7x+6=0$,$\therefore$ $x=-1$,或 $x=-6$

$\therefore$ 原方程的解为:$x_1=\dfrac{19+\sqrt{337}}{2}$,$x_2=\dfrac{19-\sqrt{337}}{2}$,$x_3=-1$,$x_4=-6$.

例 4 解下列分式方程.

(1)$\dfrac{3x-1}{x+1}+\dfrac{2-x}{x-1}=1+\dfrac{2}{x^2-1}$

(2)$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=0$

解 (1)方程两边同时乘 x^2-1,得:

$(3x-1)(x-1)+(2-x)(x+1)=(x^2-1)+2$

即 $x^2-3x+2=0$.

解得：$x_1=2, x_2=1$.

经检验，$x=1$ 是增根，$x=2$ 是方程的根.

(2)原方程可化为：$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2-4}=0$，

方程两边同时乘$(x^2-1)(x^2-4)$，得

$2x(x^2-4)+2x(x^2-1)=0$

即 $2x(2x^2-5)=0$

解得：$x_1=0, x_2=\frac{\sqrt{10}}{2}, x_3=-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

经检验，$x_1=0, x_2=\frac{\sqrt{10}}{2}, x_3=-\frac{\sqrt{10}}{2}$ 均是原方程的解.

说明 解分式方程的基本思想是将分式方程转化为整式方程，在转化时，可将方程两边同时乘各分母的最简公分母. 由于在上述转化过程中可能产生增根，所以最后必须验根.

例 5 解下列分式方程.

(1)$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$

(2)$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{2x^2+x+2}{x^2+x+1}=\frac{19}{6}$

(3)$\frac{1}{x^2+11x-8}+\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{x^2-13x-8}=0$

分析 本题的三个小题若采用直接去分母的办法，则方程组将转化为高次方程，给解决问题带来很大的麻烦，仔细观察三个方程，可以发现方程中的项与项之间存在着某种联系，可以考虑将方程适当变形，然后采用换元的方法来解决.

解 (1)$x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，

令 $x+\frac{1}{x}=a$，则原方程可化为：$6(a^2-2)+5a-38=0$

即：$6a^2+5a-50=0$，所以 $a_1=\frac{5}{2}, a_2=-\frac{10}{3}$.

当 $a=\frac{5}{2}$ 时，即 $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$，则 $2x^2-5x+2=0$，所以 $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$；

当 $a=-\frac{10}{3}$ 时，即 $x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$，则 $3x^2+10x+3=0$，所以 $x_3=-3, x_4=-\frac{1}{3}$.

经检验，$x_1=2, x_2=\frac{1}{2}, x_3=-3, x_4=-\frac{1}{3}$ 均是原方程的解.

(2)原方程可化为 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+1+\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{19}{6}$.

令 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=a$，则原方程可化为 $a+\frac{1}{a}=\frac{13}{6}$，$6a^2-13a+6=0$.

所以：$a_1=\frac{3}{2}, a_2=\frac{2}{3}$.

当 $a=\frac{3}{2}$ 时，即 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{3}{2}$，则 $x^2-2x+1=0$，所以 $x_1=1$；

当 $a=\frac{2}{3}$ 时，即 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{2}{3}$，则 $x^2+3x+1=0$，所以 $x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$，$x_3=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

经检验，$x_1=1, x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, x_3=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ 均是原方程的解.

(3)令 $x^2-8=y$，则原方程可化为 $\frac{1}{y+11x}+\frac{1}{y+2x}+\frac{1}{y-13x}=0$

即：$(y+2x)(y-13x)+(y+11x)(y-$

$13x)+(y+11x)(y+2x)=0$

则 $3y^2-147x^2=0$.

所以 $y_1=7x, y_2=-7x$.

当 $y=7x$ 时,即 $x^2-8=7x$,所以 $x_1=8, x_2=-1$;

当 $y=-7x$ 时,即 $x^2-8=-7x$,所以 $x_3=-8, x_4=1$.

经检验,$x_1=8, x_2=-1, x_3=-8, x_4=1$ 均是原方程的解.

说明 换元的方法在解分式方程中是十分常见的,一方面它能简化方程,另一方面也是解方程的一种必然需要,因为有些方程若不采用换元,则去分母后转化得到的将是二次以上的整式方程,而这类方程我们没有统一可行的解法.换元时,有明显相同的部分我们可以直接换元,若没有明显的相同部分,则需采用适当的变形,使方程中产生可换元的相同部分;另外有些问题中我们只采用部分换元的办法.

例 6 解下列无理方程.

(1) $\sqrt{3x^2+x}+2=4x$

(2) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-3}=7$

解 (1) $\sqrt{3x^2+x}=4x-2$,

两边平方得 $3x^2+x=16x^2-16x+4$,

$13x^2-17x+4=0$.

所以 $x_1=1, x_2=\frac{4}{13}$.

经检验,$x=\frac{4}{13}$是增根,$x=1$ 是原方程的解.

(2) $\sqrt{x+4}=7-\sqrt{x-3}$

两边平方得 $x+4=49+x-3-14\sqrt{x-3}$

$3=\sqrt{x-3}$

两边平方得 $9=x-3$

所以 $x=12$.

经检验,$x=12$ 是原方程的解.

说明 解无理方程的基本思路是通过方程两边同时乘方,使无理方程转化为有理方程,然后再解出相应的有理方程.由于在方程两边同时乘方的过程中方程不一定能保持同解性,因此解出的有理方程的解必须代入原方程进行检验,以判断它是否为原方程真正的解.

例 7 解下列无理方程.

(1) $x^2-x+2\sqrt{2x^2-2x+1}-2=0$

(2) $\sqrt{1+\frac{9}{4x}}-2\sqrt{\frac{x}{4x+9}}=\frac{3}{2}$

解 (1)原方程可整理为:

$\frac{1}{2}(2x^2-2x+1)+2\sqrt{2x^2-2x+1}-2-\frac{1}{2}=0$

令 $\sqrt{2x^2-2x+1}=a$,则方程可转化为:

$\frac{1}{2}a^2+2a-\frac{5}{2}=0$,

所以 $a_1=-5, a_2=1$.

当 $a=-5$ 时,即 $\sqrt{2x^2-2x+1}=-5$,无解;

当 $a=1$ 时,即 $\sqrt{2x^2-2x+1}=1$,即 $2x^2-2x+1=1$,

所以 $x_1=1, x_2=0$.

经检验,$x_1=1, x_2=0$ 均是原方程的解.

(2)原方程可整理为:

$\sqrt{\frac{4x+9}{4x}}-2\sqrt{\frac{x}{4x+9}}=\frac{3}{2}$

令$\sqrt{\frac{x}{4x+9}}=a$,则方程可转化为:

$\frac{1}{2a}-2a=\frac{3}{2}$

$1-3a-4a^2=0$.

所以 $a_1=-1, a_2=\frac{1}{4}$.

当 $a=-1$ 时,即$\sqrt{\frac{x}{4x+9}}=-1$,无解;

当 $a=\frac{1}{4}$ 时，即 $\sqrt{\frac{x}{4x+9}}=\frac{1}{4}$，即 $\frac{x}{4x+9}=\frac{1}{16}$，所以 $x=\frac{3}{4}$.

经检验，$x=\frac{3}{4}$ 是原方程的解.

说明 当采用两边乘方的办法使方程有理化时，有时会产生高次方程，因此采用换元法常可避免高次项的产生，一般地，在解无理方程的换元中，应连带整个根号一起换元，这样首先可以达到有理化的目的，其次，在解出所换元的值后，可直接根据二次根式的性质（非负性）来判定负值时无解.

例 8 若关于 x 的分式方程 $\frac{2a}{x-2}+\frac{a+3}{x+3}=\frac{6}{x^2+x-6}$ 有实数根，求 a 的取值范围.

解 去分母得 $2a(x+3)+(a+3)(x-2)=6$，

整理得：$(3a+3)x+4a-12=0$ $\quad *$

因为原方程有解，

所以 $\begin{cases}3a+3=0\\4a-12=0\end{cases}$ 或 $3a+3\neq0$.

而当 $\begin{cases}3a+3=0\\4a-12=0\end{cases}$ 时，a 不存在.

所以 $3a+3\neq0$，则 $a\neq-1$，方程 * 有唯一解 $x=\frac{12-4a}{3a+3}$，故此根不能是原方程的增根.

即 $\frac{12-4a}{3a+3}\neq2$，则 $a\neq\frac{3}{5}$，

且 $\frac{12-4a}{3a+3}\neq-3$，则 $a\neq-\frac{21}{5}$.

综上所述，当 $a\neq-1$，且 $a\neq\frac{3}{5}$，且 $a\neq-\frac{21}{5}$ 时，原方程有实数根.

例 9 若关于 x 的分式方程 $\frac{ax-2}{x+1}-\frac{a}{x-1}=1$ 有且只有一个实数根，求 a 的值.

解 去分母得 $(ax-2)(x-1)-a(x+1)=x^2-1$，

可整理为：$(a-1)x^2-(2a+2)x+3-a=0$ $\quad *$

因为原方程有且只有一个实数根，

所以（1）当 $a-1=0$ 时，即 $a=1$，则 $x=\frac{1}{2}$ 是原方程的解；

（2）当 $a-1\neq0$ 时，方程 * 为一元二次方程，

因为 $\Delta=(2a+2)^2-4(a-1)(3-a)$

$=8a^2-8a+16=8\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+14>0$

所以方程 * 有两个不同的实根，则必须有一个为增根.

①当增根为 $x=1$ 时，代入方程 * 得 $(a-1)-(2a+2)+3-a=0$，所以 $a=0$，此时方程 * 为 $-x^2-2x+3=0$，方程两根为：$x_1=1$，$x_2=-3$，符合题意.

②当增根为 $x=-1$ 时，代入方程 * 得 $(a-1)+(2a+2)+3-a=0$，所以 $a=-2$，此时方程 * 为 $-3x^2+2x+5=0$，方程两根为：$x_1=-1$，$x_2=\frac{5}{3}$，符合题意.

综上所述，当 $a=0,1,-2$ 时，原方程有且只有一个实数根.

例 10 若关于 x 的无理方程 $\sqrt{3-kx}+k-3=0$ 有实数根，求 k 的取值范围.

解 因为 $\sqrt{3-kx}=3-k$ 有实数根，

所以 $3-k\geqslant0$，即 $k\leqslant3$.

又当 $k=0$ 时，$\sqrt{3}-3\neq0$，故方程无实数根.

所以当 $k\leqslant3$ 且 $k\neq0$ 时，原方程有实数根.

例 11 若关于 x 的无理方程 $\sqrt{4-2x}-kx+2=0$ 有实数根，求 k 的取值范围.

解 移项得：$\sqrt{4-2x}=kx-2$，

两边平方得：$4-2x=k^2x^2-4kx+4$，

则 $k^2x^2+(2-4k)x=0$　　　　*

因为原方程有实数根，所以方程 * 要有实数根.

(1)当 $k^2=0$ 时，即 $k=0$，则 $x=0$，经检验是增根；

(2)当 $k^2\neq0$ 时，即 $k\neq0$，则方程 * 的两根为 $x_1=0$（增根），$x_2=\frac{4k-2}{k^2}$，所以 $x=\frac{4k-2}{k^2}$ 必是原方程的根.

代入原方程检验：

$$\text{左边}=\sqrt{4-2\cdot\frac{4k-2}{k^2}}-k\cdot\frac{4k-2}{k^2}+2$$

$$=\sqrt{\frac{4k^2-8k+4}{k^2}}-\frac{2k-2}{k}$$

$$=\left|\frac{2k-2}{k}\right|-\frac{2k-2}{k}$$

右边 $=0$，

所以 $\left|\frac{2k-2}{k}\right|=\frac{2k-2}{k}$，所以 $\frac{2k-2}{k}\geqslant0$，

即 $\begin{cases}2k-2\geqslant0\\k>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2k-2\leqslant0\\k<0\end{cases}$，所以 $k\geqslant1$ 或 $k<0$.

综上所述，当 $k\geqslant1$ 或 $k<0$ 时，原方程有实数根.

巩固练习

一、选用适当的方法解下列方程.

1. $x^2-12x=9964$

2. $(x-6017)(x-6018)=12$

3. $9406x^2-8289x-1117=0$

4. $169x^2-39x-2=0$

5. $(7-4\sqrt{3})x^2-(2-\sqrt{3})x-2=0$

6. $(1+\sqrt{2})x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$

二、选用适当的方法解下列方程.

7. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)+2\right]+2\right\}=2$

8. $(3x-1)(x-1)=(4x+1)(x-1)$

9. $15x^2-19x+6=0$

10. $2x^2-5\sqrt{2}x-36=0$

11. $(2\sqrt{7}+5\sqrt{2})x^2-(5\sqrt{2}+3)x=2\sqrt{7}-3$

12. $(2+\sqrt{3})x^2-(5\sqrt{3}+8)x+(9+5\sqrt{3})=0$

三、解下列方程.

13. $x^2-|2x-1|-4=0$

14. $x^2+|x+3|+|3-x|=\frac{9}{2}x+6$

四、解下列高次方程.

15. $x^4-2x^2-8=0$

16. $3x^3+12x^2-5x-20=0$

17. $(2x+1)^2(x+2)(x-1)-100=0$

18. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)-30x^2=0$

22. $\dfrac{19x-x^2}{x+1}\left(x+\dfrac{19-x}{x+1}\right)=84$

五、解下列分式方程.

19. $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+6}{x+7}=\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+5}{x+6}$

20. $\dfrac{1}{x^2+7x}-\dfrac{1}{x^2+7x+6}+\dfrac{1}{x^2+7x+18}-\dfrac{1}{x^2+7x+12}=0$

21. $\dfrac{4x}{x^2+x+3}+\dfrac{5x}{x^2-5x+3}=-\dfrac{3}{2}$

23. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$

24. $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{2}{x-3}$

六、解下列无理方程.

25. $\sqrt{5-2x}+\sqrt{20+2x}=7$

26. $5x^2+x-x\sqrt{5x^2-1}-2=0$

27. $x^2+x+2x\sqrt{x+2}=14$

28. $\sqrt{x^2-7x+10}-\sqrt{x^2+x-6}=x-2$

29. $\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9$

七、解答题.

30. 已知解方程$\frac{4x}{4-x^2}+1=\frac{k-k^2}{x-2}+\frac{1}{x+2}$时，不会产生增根，求实数 k 的取值范围.

31. 若关于 x 的方程$\frac{2k}{x-1}-\frac{x}{x^2-x}=\frac{kx+1}{x}$只有一个解，试求 k 的值与方程的解.

32. k 为何值时，方程$\frac{2x}{x+1}-\frac{k}{x^2+x}=\frac{x+1}{x}$只有惟一解？

33. 已知关于 x 的方程 $x^2-(k+1)x-2=0$ 和方程 $x^2-2x-k(k+1)=0$ 只有一个相同的根，求 k 的值和此公共根.

34. 关于 x 的方程 $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+k}=1$ 有一个增根为 4，求 k 的值.

第二章　根的判别式

知识要点

运用配方法解一元二次方程的过程中得到$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$　①

显然，只有当$b^2-4ac\geqslant 0$时，才能直接开平方得：$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$.

也就是说，一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$只有当系数a、b、c满足条件$\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$时才有实数根，这里的$b^2-4ac$叫做一元二次方程的根的判别式.

观察①式我们不难发现一元二次方程的根的情况与根的判别式的关系：

$b^2-4ac>0\Leftrightarrow$方程有两个不相等的实数根；

$b^2-4ac=0\Leftrightarrow$方程有两个相等的实数根；

$b^2-4ac<0\Leftrightarrow$方程没有实数根.

根的判别式有着广泛的应用：

(1)运用判别式，判定方程实数根的个数.

(2)利用判别式，建立等式、不等式，求方程中参数的值或确定参数的取值范围.

(3)通过判别式，证明与方程相关的代数问题.

(4)借助判别式，运用一元二次方程必定有解的代数模型，解几何存在性的问题、最值问题以及确定二次函数图象与x轴的交点情况.

典例评析

例 1　已知关于x的方程$2(k-1)x^2-6\sqrt{k+1}x+9=0$有两个实数根，求$k$的取值范围.

分析　由方程有两个实数根可知，它的判别式应大于等于0，且二次项系数不为0.

解　由题意得：$\Delta=(-6\sqrt{k+1})^2-4\times 2(k-1)\times 9\geqslant 0$，

解这个不等式得：$k\leqslant 3$，又$\because 2(k-1)\neq 0$，$\therefore k\neq 1$，

又$\because k+1\geqslant 0$，$\therefore k\geqslant -1$，

$\therefore k$的取值范围是：$-1\leqslant k\leqslant 3$，且$k\neq 1$.

说明　本例除应考虑判别式大于等于0和二次项系数不为0外，还应注意$k+1\geqslant 0$这个隐含条件.

例 2　求证：不论m为何实数，关于x的方程：$x^2-2(m+1)x+2m^2+3m+17=0$都没有实数根.

分析　要证明方程没有实数根，只须证明这个方程的根的判别式小于0即可.

证明　$\Delta=[-2(m+1)]^2-4\times(2m^2+3m+17)$

$=4m^2+8m+4-8m^2-12m-68$

$=-4m^2-4m-64=-(2m+1)^2-63$，

$\because (2m+1)^2\geqslant 0$，$\therefore -(2m+1)^2\leqslant 0$，

$\therefore -(2m+1)^2-63<0$，

即：$\Delta<0$，$\therefore$原方程没有实数根.

例 3　如果一直角三角形的三边长分

别为 a、b、c，$\angle B=90°$，那么，关于 x 的方程 $a(x^2-1)-2cx+b(x^2+1)=0$ 的根的情况是 （ ）

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

分析 方程的根的情况，可以由方程的根的判别式的符号来确定，所以此例可以通过整理原方程，结合勾股定理判断判别式值的正负.

解 原方程整理得：$(a+b)x^2-2cx-a+b=0$，

关于 x 的方程的判别式 $\Delta=(-2c)^2-4(a+b)(-a+b)=4c^2+4a^2-4b^2$，

因为 a、b、c 为一直角三角形的三边长，且$\angle B=90°$，所以由勾股定理得：

$b^2=a^2+c^2$.

所以 $\Delta=4c^2+4a^2-4b^2=4(c^2+a^2-b^2)=0$，

所以关于 x 的方程 $a(x^2-1)-2cx+b(x^2+1)=0$ 有两个相等的实数根.

故选 A.

例 4 求证：无论 a、b、c 取何实数，以下三个一元二次方程中，至少有一个方程有两个实数根. ①$ax^2+2bx+c=0$；②$bx^2+2cx+a=0$；③$cx^2+2ax+b=0$.

分析 要证明这三个一元二次方程中至少有一个方程有两个实数根，只要证明这三个方程的根的判别式中至少有一个判别式大于或等于 0，如果我们仅分别从每一个方程的判别式来考虑，那么我们很难得到结论，于是我们可以从整体上考虑，如果我们能够证明这三个方程的根的判别式的和为非负数，则其中必有一个是非负数，从而可知其中必有一个方程有实数根.

证明 $\Delta_1=4b^2-4ac$；$\Delta_2=4c^2-4ab$；$\Delta_3=4a^2-4bc$，

$\therefore$ $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$

$=4a^2+4b^2+4c^2-4ab-4ac-4bc$

$=2(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)$

$=2[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)]$

$=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$，

$\because$ $(a-b)^2\geqslant 0$；$(b-c)^2\geqslant 0$；$(c-a)^2\geqslant 0$，

$\therefore$ $2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0$，

即 $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3\geqslant 0$，$\therefore$ Δ_1，Δ_2，Δ_3 中至少有一个大于或等于 0，

$\therefore$ 这三个方程中至少有一个方程有两个实数根.

例 5 设关于 x 的方程 $x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$ 有实根，求 a、b 的值.

分析 已知方程有实根，则 $\Delta\geqslant 0$，由此可得有关 a、b 的一个不等式 $2a^2+4ab+4b^2-2a+1\leqslant 0$，由一个关系式通常是不能求出两个未知数的，只有在特定的情况下才有可能，注意到 $a^2+4ab+4b^2$ 与 a^2-2a+1 都是完全平方，显然有两个完全平方的和为零，根据两个非负数的和为零，必须每个非负数都为零，问题得解.

解 因为方程有实根，则它的判别式

$\Delta=4(1+a)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)$

$=-8a^2-16ab-16b^2+8a-4\geqslant 0$

所以 $2a^2+4ab+4b^2-2a+1\leqslant 0$，即$(a-1)^2+(a+2b)^2\leqslant 0$.

因为$(a-1)^2\geqslant 0$，$(a+2b)^2\geqslant 0$ 从而有 $(a-1)^2+(a+2b)^2\geqslant 0$，

所以$(a-1)^2+(a+2b)^2=0$.

所以 $a=1$ 且 $a=-2b$，即 $a=1$，$b=-\frac{1}{2}$.

说明 本题解法中用到配方法，配方法是中学阶段，特别是初中阶段的一个非常重

要的方法,有着广泛的应用,同学们一定要认真掌握好.

例 6 已知关于 x 的方程 $x^2-(k+2)x+2k=0$.

(1)求证:无论 k 取何实数值,方程总有实数根;

(2)若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=1$,另两边长 b、c 恰好是这个方程的两个根,求$\triangle ABC$ 的周长.

分析 对于问题(1),显然只须证明 $\Delta\geqslant 0$ 即可;对于问题(2),由于未指明腰与底,须分 $b=c$ 或 b、c 中有一个与 a 相等两种情况讨论,利用判别式,根的定义求出 b、c 的值.

解 (1)证明:关于 x 的方程 $x^2-(k+2)x+2k=0$ 的根的判别式,

$\Delta=[-(k+2)]^2-4\times 2k=(k-2)^2\geqslant 0$,

所以无论 k 取何实数值,方程总有实数根.

(2)因为 a、b、c 为等腰三角形的三边,所以 $b=c$ 或 b、c 中有一个与 a 相等.

当 $b=c$ 时,因为 b、c 是方程 $x^2-(k+2)x+2k=0$ 的两根,所以方程有两个相等的实数根,即判别式 $\Delta=(k-2)^2=0$,所以 $k=2$,此时方程为 $x^2-4x+4=0$,它的两等根为 $x_1=x_2=2$,即 $b=c=2$,三角形的周长为 $2+2+1=5$.

当 b、c 中有一个与 a 相等时,可设一般性,设 $b=a=1$,又因为 b、c 是方程 $x^2-(k+2)x+2k=0$ 的两根,把 $b=1$ 代入方程可得 $k=1$,此时方程为 $x^2-3x+2=0$,解得方程的两根分别为 $x_1=1$,$x_2=2$,所以 $c=2$.但由于 $1+1=2$,这与 $a+b>c$ 矛盾,舍去.

综上所述,$\triangle ABC$ 的周长为 5.

例 7 设方程 $|x^2+ax|=4$ 只有 3 个不相等的实数根,求 a 的值和相应的 3 个根.

分析 去掉绝对值符号,原方程可化为两个一元二次方程,由于原方程只有 3 个不相等的实数根,则其中一个方程的判别式大于零,另一个方程的判别式等于零.

解 去掉绝对值符号得如下两个方程:

$x^2+ax-4=0$ ①

$x^2+ax+4=0$ ②

显然两方程没有相同的根,由于原方程只有 3 个不相等的实根,故必有且只有方程①或方程②有相等的实数根.分别计算两方程的根的判别式得:$\Delta_1=a^2+16>0$,$\Delta_2=a^2-16\geqslant 0$,所以只能是 $\Delta_2=0$,即 $a=\pm 4$,分别代入两方程求得方程的根为:$x_1=-2$,$x_2=-2+2\sqrt{2}$,$x_3=-2-2\sqrt{2}$ 或 $x_1=2$,$x_2=2+2\sqrt{2}$,$x_3=2-2\sqrt{2}$.

例 8 当 b 为何值时,关于 x 的方程 $x^2+3(a-1)x+(2a^2+a+b)=0$ 的根在 a 取任何有理数时均为有理根.

分析 一个有理数系数的一元二次方程有有理数根,它的判别式必须是有理数的平方,这个方程的判别式为:$\Delta=[3(a-1)]^2-4(2a^2+a+b)=a^2-22a+9-4b$,要使它对任何有理数 a 是一个有理数的平方,即关于 a 的有理式为完全平方式,不妨设 $\Delta=(a+m)^2$,也就是说关于 a 的方程 $a^2-22a+9-4b=0$ 有相同的实根,因此关于 a 的方程的判别式为零,从而可求出 b 的值.

解 关于 x 的方程 $x^2+3(a-1)x+(2a^2+a+b)=0$ 的判别式 $\Delta_1=9(a-1)^2-4(2a^2+a+b)=a^2-22a+9-4b$.

由于 Δ_1 对任何有理数 a 均为有理数的平方,令关于 a 的方程 $a^2-22a+9-4b=0$ 的判别式 $\Delta_2=(-22)^2-4(9-4b)=0$,解得:$b=-28$,

所以 $b=-28$ 时,关于 a 的方程有两个相等的实数根,Δ_1 就是一个完全平方式即为 $(a-11)^2$,关于 x 的方程的根均为有理数.

说明 涉及一元二次方程有无有理根

的问题，经常利用判别式为完全平方式来解决，即利用判别式的判别式为零来解决.

例9 若 $a>0$，$a^2-2ab+c^2=0$ 且 $bc>a^2$，试判断 a、b、c 的大小.

解 因为 $a^2-2ab+c^2=0$，所以 $a^2+c^2=2ab$，

又因为 $a>0$，所以 $b>0$.

因为 $bc>a^2>0$，所以 $c>0$.

又因为 a 为实数，且 $a^2-2b\cdot a+c^2=0$. ①

将①看作关于 a 的方程，则

$\Delta=(-2b)^2-4c^2=4b^2-4c^2\geqslant 0$，即 $b^2\geqslant c^2$，因为 $b>0$，$c>0$，所以 $b\geqslant c$. 而 $bc>a^2$，所以 $b^2\geqslant bc>a^2$，即 $b>a$. 又 $a^2+c^2=2ab>2a^2$，所以 $c^2>a^2$. 而 $c>0$，$a>0$，所以 $c>a$，从而有 $b>c>a$.

例10 满足 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 的所有实数对 (x,y) 中，$\frac{y}{x}$ 的最大值是多少？

解 设 $\frac{y}{x}=k$，则 $y=kx$，代入已知等式得

$(x-3)^2+(kx-3)^2=6$，即 $(k^2+1)x^2-6(k+1)x+12=0$.

将它看成关于 x 的一元二次方程. 因为 x 是实数，所以 $\Delta=36(k+1)^2-48(k^2+1)\geqslant 0$. 即 $k^2-6k+1\leqslant 0$ ①

令 $k^2-6k+1=0$，得 $k=3\pm 2\sqrt{2}$.

所以①的解为 $3-2\sqrt{2}\leqslant k\leqslant 3+2\sqrt{2}$，

即 $\frac{y}{x}=k$ 的最大值是 $3+2\sqrt{2}$.

例11 x、y 为实数，且满足 $y=\frac{2x}{x^2+x+1}$，求 y 的最大值和最小值.

解 由于 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，

所以 $yx^2+(y-2)x+y=0$.

上式可以看成关于 x 的一元二次方程，因为 x 是实数，所以 $\Delta=(y-2)^2-4y^2\geqslant 0$，

即 $3y^2+4y-4\leqslant 0$，$(3y-2)(y+2)\leqslant 0$.

解得 $-2\leqslant y\leqslant \frac{2}{3}$.

当 $y=-2$ 时，代入 $yx^2+(y-2)x+y=0$ 中，得 $x=-1$.

即当 $x=-1$ 时，$y=\frac{2x}{x^2+x+1}$ 有最小值 -2；

当 $y=\frac{2}{3}$ 时，代入 $yx^2+(y-2)x+y=0$ 中，得 $x=1$，

即当 $x=1$ 时，$y=\frac{2x}{x^2+x+1}$ 有最大值 $\frac{2}{3}$.

综上所述：当 $x=-1$ 时有最小值 -2；当 $x=1$ 时有最大值 $\frac{2}{3}$.

巩固练习

一、选择题.

1. 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2-6x+9=0$ 有两个不相等的实数根，那么 k 的取值范围是 ( )

A. $k<1$ B. $k\neq 0$

C. $k<1$ 且 $k\neq 0$ D. $k>1$

2. 已知关于 x 的方程 $x^2-(2m-1)x+m^2=0$ 有两个不相等的实数根，那么 m 的最大整数值是 ( )

A. -2 B. -1

C. 0 D. 1

3. 使得关于 x 的方程 $2x(kx-4)-x^2+6=0$ 无实数根的最小整数 k 为 ( )

A. -1 B. 2

C. 3 D. 4

4. 若 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式 $M=(2ax_0+b)^2$ 的大小关系是 ( )

A. $\Delta>M$　　B. $\Delta=M$

C. $\Delta<M$　　D. 不能确定

5. 关于 x 的方程 $\left|\frac{x^2}{x-1}\right|=a$ 仅有两个不同的实根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $a>0$　　B. $a\geqslant4$

C. $2<a<4$　　D. $0<a<4$

二、填空题.

6. 已知关于 x 的方程 $(1-2k)x^2-2\sqrt{k+1}x-1=0$ 有两个不相等的实数根，那么 k 的取值范围是__________.

7. 如果两个一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 与 $mx^2+x+1=0$ 分别有两个不相等的实数根，但其中有一个公共的实数根 a，那么，实数 a 的值是__________.

三、解答题.

8. 如果关于 x 的一元二次方程 $(m+5)x^2-2(m+2)x+m=0$ 没有实数根，判别关于 x 的一元二次方程 $mx^2-2(m-2)x+(m-5)=0$ 的根的情况.

9. 已知 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且方程 $(c-b)x^2+2(b-a)x+a-b=0$ 有两个相等的实数根，试判断这个三角形的形状.

10. 已知关于 x 的方程 $x^2-(3k+1)x+2k^2+2k=0$.

(1)求证：无论 k 取何实数值，方程总有实数根；

(2)若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=6$，另两边长 b、c 恰好是这个方程的两个根，求此三角形的周长.

11. 对于实数 a，只有一个实数值 x 满足等式 $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}+\frac{2x+a+2}{x^2-1}=0$，试求所有这样的实数 a 的和.

12. 试求分式 $\frac{5x-8}{x^2-x+1}$ 的最大值和最小值.