

初中数学 创新学习方略

范良帮 编著



宁波出版社

前言

亲爱的同学们：

本书是笔者集于多年的课堂教改实验，前后花了五年时间编写的一本学习参考用书。它有别于一般的数学复习用书，初一、初二的同学也普遍能看懂（每个知识点后都注明初一、初二、初三，便于各年级的同学学习）。它在培养同学们的数学思维、思想方法、知识应用能力的同时，更侧重于引导你走进学习数学的新天地：怎样把每学一个知识点编成一个数学故事，数学学习过程的心理分析是怎么回事，数学解题策略有哪些，怎样调节应考心理，怎样自学整册教材，怎样画数学知识树等一系列方略能让你“迷恋”上数学。它能使你感受到学数学是一种有趣的、美的享受，能让你领略数学中那迷人的“无限风光”——

◎ 第一章：你能对数学感兴趣吗

在这章中，你能培养自己学数学的激情，并学会自编数学故事的方法，体验到“创作”的快乐。它还能让你了解到数学与语文、自然、音乐等学科的密切联系。

◎ 第二章：数学学习过程的心理分析

在这章中，你能明白什么是数学的感知、理解、记忆、迁移等学习心理过程。

◎ 第三章：数学思维篇

在这章中，你能学到一些数学思维的灵活性、深刻性、独创性等思维品质及集中思维能力和发散思维能力。

◎ 第四章:数学解题策略篇

在这章中,你能掌握如何解答填空题、选择题、解答题等解题策略及如何学会稳定解题心理与如何调节解题情绪等策略。

◎ 第五章:数学学习方法篇

在这章中,你能学到学数学的一般方法(预习的方法、听课的方法、做作业的方法、单元小结的方法等)及特殊方法(化归、比较、分类、分析、综合、数形结合法等思想方法)。

◎ 第六章:数学知识篇

在这章中,你能系统地学习初中三年的数学知识,并有机会进行解题训练。

◎ 第七章:复习应考篇

在这章中,你能了解到考试类型、目的,及期末、升学复习方法与怎样进行应考心理调节,中考开放性试题举例等内容。

◎ 第八章:走进学习数学的新天地

在这章中,你能学到如何自学整册教材,如何自行编拟试卷,如何画数学知识树,如何写数学日记,如何让电脑成为学数学的得力工具,如何选择数学课外读物,如何制作学具,如何学会写数学小论文等内容。

总之,当你翻阅完本书后,你若能产生一点“迷恋”数学之感,并激起学习数学的动力,那么笔者就甚感欣慰了。

编 者

2002年8月

目 录

第一章 你能对数学感兴趣吗	(1)
第一节 你是如何学习数学的.....	(1)
第二节 你有精明的学数学技巧吗.....	(4)
第三节 你能感受到无所不在,无处不用的数学吗	(8)
第四节 初一新生如何适应好小学与初中的衔接学习	(16)
第二章 数学学习过程的心理分析	(18)
第一节 数学学习的过程	(18)
第二节 数学学习中的感知	(20)
第三节 数学学习中的理解	(23)
第四节 数学学习中的记忆	(25)
第五节 数学学习中的迁移	(32)
第三章 数学思维篇	(36)
第一节 数学思维品质	(36)
第二节 数学集中思维与发散思维	(45)
第四章 数学解题策略篇	(50)
第一节 解题的整体策略	(50)
第二节 解严格推理题的策略分析	(57)
第三节 基本题型的解题策略	(63)
第四节 解应用题的基本策略	(72)

第五章 数学学习方法篇	(90)
● 一般方法篇	(90)
第一节 预习的方法——学会读数学书	(90)
第二节 听课的方法——学会思维先跑	(93)
第三节 做作业的方法	(101)
第四节 进行单元小结的方法——温故知新 从厚到薄	(106)
● 特殊方法篇	(115)
第一节 化归——数学思想方法之一	(115)
第二节 比较——数学思想方法之二	(118)
第三节 分类:知难而进有方舟——数学思想方法之三	(120)
第四节 分析法与综合法——数学思想方法之四	(122)
第五节 数形结合(一柄双刃的利剑)——数学思想方法之五	(125)
第六节 数学模型方法——数学思想方法之六	(127)
第七节 跳远的启示——怎样寻找解题途径	(129)
第八节 改变你的思考角度——草船借箭的启示	(132)
第九节 学会对命题的推广——谈谈解题后的反思	(136)
第十节 重金难买回头看——谈谈解题的验算	(139)
第十一节 步步登高——谈谈考试后的小结	(142)
第六章 数学知识篇	(147)
第一节 实数与代数式	(147)
第二节 方程与不等式	(154)
第三节 函数及其图象	(163)
第四节 统计初步	(164)
第五节 三角形和四边形	(173)
第六节 相似三角形和解直角三角形	(182)

第七节 圆.....	(191)
第八节 空间图形与求积.....	(197)
附:初中一年级第一学期期末训练题	(202)
初中一年级第二学期期末训练题	(205)
初中二年级第一学期期末训练题	(209)
初中二年级第二学期期末训练题	(212)
初中三年级第一学期期末训练题	(215)
第七章 复习应考篇	(219)
第一节 考试的类型与目的.....	(219)
第二节 单元、期末复习应考	(220)
第三节 初中毕业升学总复习应考.....	(221)
第四节 应考心理调节.....	(228)
第五节 中考开放性试题的几种常见类型及解法.....	(236)
第八章 走进学习数学的新天地	(246)
第一节 学会自学整册教材.....	(246)
第二节 学会自己出试卷.....	(247)
第三节 学会画数学知识树.....	(251)
第四节 学会写数学日记,编错题集本	(260)
第五节 让电脑成为学习与应用数学的得力工具.....	(261)
第六节 学会选择课外读物.....	(267)

第一章 你能对数学感兴趣吗

进入 20 世纪以来,数学已走向科学的各个领域。在中小学课程教育系统中,数学教育处于“基石”的重要地位,然而许多同学却视数学为“畏途”,他们以为数学是一门枯燥无味的学科,因而对数学缺乏兴趣,数学成绩也上不去,最终带着沉重的思想负担度过学生时代。其实,只要你不拘泥于传统的学习方法,就能感受到数学是一门极有兴趣的学科。请同学们思考以下问题——

第一节 你是如何学习数学的

例 1:解方程: $0.2x = \frac{1}{4}$ (《义务教育初中数学》第一册 P107)

分析:可能每一个同学都会认为这个问题太简单了。

思考方式一:利用小学关于逆运算的道理有: $x = \frac{\frac{1}{4}}{0.2} = \frac{0.25}{0.2} = 1.25$

思考方式二:按照教材中解一元一次方程的步骤,“两边同除以未知数的系数”有

$$0.2x \div 0.2 = \frac{1}{4} \div 0.2 \quad x = 0.25 \div 0.2 = 25 \div 20 = 1.25$$

这两种思考方式都是无可挑剔,结论也完全正确。但是你是否会去“劳神”思考:解一元一次方程的最终目的不就是把未知数系数变为 1 吗?

思考方式三:两边同乘以5得 $x = \frac{1}{4} \times 5 = \frac{5}{4}$

这种思考方式与前两种境界已完全不同,前两种只停留在“学会”的水平上,后者已经上升到“会学”的层次。不仅如此,这种为“解题的最优化解法”的“劳神”会让你轻而易举解决同一类问题: $0.25x = 10.5$; $0.125x = 10.5$ ……你是否对这种“劳神”产生兴趣?

例2:一条公路上有A、B两站,上午8:00时,甲、乙两人同时分别从A、B两站出发,相向而行。至上午10:00时尚未相遇,相距有18千米,到下午1:00时他们相遇后又相距15千米。已知甲比乙每小时多走1千米。求甲、乙的速度。(初一)

分析:思考方式一:设甲的速度为 x 千米/小时,乙的速度为 $(x-1)$ 千米/小时,A、B两地的路程为 s 千米,则

$$\begin{cases} 2x + 2(x-1) + 18 = s \\ 5x + 5(x-1) - 15 = s \end{cases}$$

思考方式二:发现上式 s 等同,方程改列为

$$2x + 2(x-1) + 18 = 5x + 5(5x-1) - 15$$

思考方式三:把10:00——1:00联系思考,不就有 $3x + 3(x-1) = 18 + 15 = 33$ 吗?这种思考方式体现了“数学的领悟”,体现了“解决数学问题的机智”,你能想到吗?

例3:在一次趣味课上笔者把高斯的故事($1+2+3+\cdots+100=?$)提出来分析,目的是引导学生快速算出1加到100的道理(变加法为简便的乘法算式 101×50)。这时有个学生怯怯举手,他说高斯的 $1+100=101$ 不是整数,再同其他数相乘不够方便,他提出另一个算式 $(1+99) \times 50 + 50 = 5050$,由于 $1+99=100$,再做乘法就非常简便了。当时全班静极了,目光齐刷刷盯着笔者等着裁判,笔者不由转身在黑板上写下“你比小高斯更聪明”!全班爆发出雷鸣般的掌声。

你能行吗?

例4:看着二次方程的求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, 你能说出几条美的体会吗? (初二)

分析:有些同学觉得迷惘:求根公式有美吗? 这也是学数学的问题?

事实上,本书的一个目的正是:向同学们展示数学的美,帮助同学们掌握美的数学。

二次方程的求根公式非常美,当你仔细体味其表示的深深含义时,无异于读一首数学的诗,看一幅数学的画,听一曲数学的歌:

(1)公式告诉我们,二次方程的实根由其三个系数完全确定。至于未知数用什么字母($x, y, t, s \cdots$)表示是没有关系的;同样,未知数所代表的实际意义(时间,速度,边长,面积等)也是没有关系的。这是一个(二次方程的)“万能”求根公式。它向我们展示了数学的抽象性与简洁美。

(2)公式包括了初中阶段所学过的全部六种代数运算:加,减,乘,除,乘方,开方。其中除法要求分母不为零,这是满足的;开平方要求被开方数非负却并非总能满足,因此有的方程有根,有的方程没有实数根。能够包容六种代数运算体现了公式的统一性与和谐美。

(3)公式本身回答了解二次方程的全部三个问题:

①方程有没有实数根? 这只须先看开平方能否进行,即看判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的符号是否非负。

②有实数根时共有几个? 当 $\Delta \geq 0$ 时有两个实根。并且还具体告诉我们,当 $\Delta = 0$ 时是两个相等的实数根,当 $\Delta > 0$ 时是两个不相等的实数根。

③如何求出实数根? 就是公式本身。

如此完整的回答,难道不应该用美来概括吗?

(4)各级运算的顺序自动决定了二次方程求根的解题程序。

第一步:将所给的方程化为标准形式

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) \text{ 确定系数 } a, b, c$$

第二步:计算判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$, 考察其符号

第三步:在 $\Delta \geq 0$ 的条件下,代入求根公式,算出实数根来。

在这里,求根公式将抽象的解题思想(降次的思想——通过配方、开方来实现)转化为具体的解题操作,思想不再是空洞的,操作也不再是盲目的了。

说到这里,读者也许会同意,该公式确实有美,越看越美,并且从中获得启发,可继续添上第(5),第(6)……(比如你能编出一段记忆求根公式的话来吗?)

第二节 你有精明的学数学技巧吗

我们每个人从小就喜欢听别人讲故事,如果自己能编出故事讲给别人听,那是一种较高境界了。同学们若能像交朋友似地学习数学某一知识,把每学一个知识点变成经历一个故事,那一定不会有“乏味”,一定能营造出“趣味盎然”之感觉。当我们仔细体味其中饶有趣味的构思,感受自己生气勃勃的思想时,实在是在读一首数学的诗,听一曲数学的歌,看一幅数学的画。从某种意义上讲,这种自编数学故事的方法不是低层次的一招一式或雕虫小技,它是一种使用数学技巧的技巧,也是一种创造数学技巧的技巧。毋庸说,这是一种深沉的数学领悟,一种高尚的数学享受。

例1:写给“十字相乘法先生”的一封信。(初一)

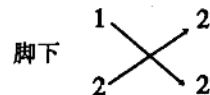
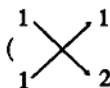
在一次趣味课上,笔者布置学生写上述题目,有位学生写道:

提起你,真让人讨厌,让人心烦。你那“一拆二拆三交叉”把人弄得晕头转向,比如 $6x^2 - 10x + 4$ 要分解,就得把二次项系数6先考虑 [$6 = 1 \times 6 = (-1) \times (-6) = 2 \times 3 = (-2) \times (-3)$], 一考虑就有4条路给人选,常数项4也有4条路 [$4 = 1 \times 4 = (-1) \times (-4)$]

$=2 \times 2 = (-2) \times (-2)]$ 。天哪,最终可拼成 24 条路,而其中只有一种交叉相乘之和是 -10,其余 23 条路都是万丈深渊,一去不复返。想到此,悲凉的感受顿上心头。认输了吗?不,我有最宝贵的武器——智慧,经过一番研究,像 $6 = (-1) \times (-6) = (-2) \times (-3)$ 这样的路不走,把 -10 分析一下,就不难拆出



其实,你也有招人喜欢的地方,一方面你能给人带来智慧,开发人的智力,使人变得更加聪明。另一方面你是一个“小万能”公式,比如用公式法分解 $x^2 + 3x + 2$ 也逃不出你的手心



脚下

。你是一个神通广大之人,希望你能永远伴

随我游遍数学王国。

例 2:试把解方程组 $\begin{cases} x+2y=1 & \textcircled{1} \\ 2x+3y=2 & \textcircled{2} \end{cases}$ 编成一个数学故事。

分析:我们可以编出一个黄继光(x)带着炸药包,

由①得 $x = 1 - 2y$, 杀入敌营 $[2(1 - 2y) + 3y = 2]$, 自己暗暗隐藏(消去 x), 活捉敌司令(解出 y), 最终押回敌司令获得解放:解出

$\begin{cases} x=? \\ y=? \end{cases}$ 的故事。

这样,我们把代入法解二元一次方程组理解为如何寻找黄继光的炸药包,如何杀入敌营活捉敌司令,如何获得解放的解题程序不是非常有趣的事吗?同学们,为什么不能编出更多的适合自己

口味的故事？

例 3：编拟一些数学小品。

数学小品是用文学的笔调阐述某一数学内容。以下举三个例子：

(1)针对数“零”的广泛意义，我们可以以“零”为题写一段话：零，忘不了你一颗不偏不倚，公平正直的心（非正非负），忘不了你没资格作分母时的尴尬，忘不了你作指数时一锤定音（ $a^0 = 1, a \neq 0$ ），绝对值拦不住你（ $|0| = 0$ ），根号关不住你（ $\sqrt[n]{0} = 0, n$ 为大于 1 的自然数），平方、立方管不了你（ $0^n = 0$ ）……

(2)判断正误：① $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ ；② $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$ ；③ $\sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}$ ；④ $\sqrt{5\frac{5}{6}} = 5\sqrt{\frac{5}{6}}$ 。我们可以以“奇怪的等式”为题，用童话般的语言写一段数学小品（以 $\sqrt{2\frac{2}{3}}$ 为例，为叙述方便，式中“2”分别称为商 2 和余 2）：夜，已很深了， $\sqrt{2\frac{2}{3}}$ ， $\sqrt{3\frac{3}{8}}$ ， $\sqrt{4\frac{4}{15}}$ 和 $\sqrt{5\frac{5}{6}}$ （为方便叙述而设）全家人围坐在一起聊天。

商 2：“根号快把我给闷死了，真想出来散散心。”

余 2：“别痴心妄想了，你就这个命。”

商 2：“趁主人不在，就玩一会儿。”说完便蹦了出来。“余 2”想制止已经来不及了，便无聊地看着快活的“商 2”。突然，它惊奇地发现 $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ ！便招呼道：“快来看哪，‘商 2’可以出来！”众人一看，果不其然，于是“商 3”，“商 4”，“商 5”纷纷走出根号外，忽听“余 2”又尖叫一声：“商 5”你不能出来： $(\sqrt{5\frac{5}{6}} \neq 5\sqrt{\frac{5}{6}})$

如果聊天继续下去,我们可发现其中的规律 $\sqrt{n \frac{n}{n^2-1}} = n$

$\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$ (n 为大于 1 的正整数)! 岂不妙哉!

(3) 填空:

① 顺次连接一般四边形各边中点所得的四边形是_____形。

② 顺次连接平行四边形各边中点所得的四边形是_____形。

③ 顺次连接矩形各边中点所得的四边形是_____形。

④ 顺次连接菱形各边中点所得的四边形是_____形。

⑤ 顺次连接正方形各边中点所得的四边形是_____形。

同学们可以得:①填平行四边形。记为般 $\rightarrow$ 平。类似地:②记为平 $\rightarrow$ 平。③记为矩 $\rightarrow$ 菱。④记为菱 $\rightarrow$ 矩。⑤记为正 $\rightarrow$ 正。针对以上内容,我们可以编出一段数学小品:

吹牛比赛——

夏日炎炎的一天晚上,五位好朋友不约而同来到院子乘凉,他们是:般平,平平,矩菱,菱矩,正正。

般平先发话了:别看我长得这么难看,四边长短不一,黑不溜秋,但把我的各边中点连起来就变成了一个平行四边形(面对平平,甚是得意)。

平平(不甘落后):你得意什么?你变来变去还不是变成我?你好好看看我,我把自己各边中点连起来又可变成一个美丽的我,继续再连又可变出自己,孙悟空有七十二变,我有七万二千变。

正正(不耐烦):瞧你们俩斗什么?你们变出的都是斜斜的,有什么好看?看我各边中点连起来,变出来的是方方正正的自己,再继续连又可变出自己,而且我有九大优点(性质),你们有吗?

菱(邻)矩(居)(岂可认输):别争了,你们都是自私自利之人,最多只能变自己,而我能变出矩(居),再继续连又可变回自己,你

中有我,我中有你,还有谁比“邻居”更亲密?

新一轮吹牛比赛又开始了……

同学们应不拘泥于合理式的学习,应去勇敢地面对数学思想最为丰富、最为深刻的地方,进行深入的挖掘和充分的暴露,去编出更合“口味”的数学故事,去感受最迷人、最勾魂也最惊心动魄的“无限风光”!请记住,题题都有个数学故事!

[考考你]

请你针对有理数的加法法则,编一个趣味故事。

第三节 你能感受到无所不在, 无处不用的数学吗

一、数学——各门学科的基础课

1. 数学与自然学科

例 1:因式分解的应用:

两个电阻串联后总电阻是 10 欧姆,并联时总电阻是 2.4 欧姆,求每个电阻的阻值是多少?(初二)

分析:设两个电阻分别为 R_1 和 R_2

串联时,有 $R_1 + R_2 = 10$ ①

并联时,有 $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2.4$ ②

将①、②两式联并消去 R_2 ,整理得: $R_1^2 - 10R_1 + 24 = 0$

应用十字相乘法分解因式,得 $(R_1 - 4)(R_1 - 6) = 0$,所以 $R_1 = 4$ 欧,或 $R_1 = 6$ 欧。当 $R_1 = 4$ 欧时 $R_2 = 4$ 欧,当 $R_1 = 6$ 欧时 $R_2 = 4$ 欧。

例 2:比例的应用:

用氢气还原氧化铜,如果要得到 1.2 克铜,理论上至少需要多少克氧化铜?(初二)

分析:设需要氧化铜的质量为 x 克



80 64

x 1.2

$$80:64 = x:1.2 \qquad x = 1.5 \text{ 克}$$

2. 数学与语文

例 1:数学语言与语文词语之间的迁移

文言虚词“于”的多种用法,我们都能在数学用语中找到联系。

①作“在”解:“战于长勺”(《曹刿论战》)可与“AB 和 CD 相交于 O”联系;

②作“比”解:“苛政猛于虎”(《捕蛇者说》)可与“X 小于 Y”联系等等。同学们若能在平常学习中多作横向联系,既可培养自己思维的广阔性,又可强化知识的系统性。

例 2:语文中普遍运用的叙述、描写与说明,为求得形象鲜明,说理深刻,多借助数学语言。比如:

(1)大发明家爱迪生有一句名言:“天才就是百分之二的灵感加上百分之九十八的汗水。”

(2)爱因斯坦在说明事业成功的因素时,列出了一个公式:“ $A = X + Y + Z$ ”。他解释:“A 代表成功, X 代表艰苦的工作, Y 代表正确的方法, Z 代表少说废话。”你看,这么一个简明的公式,表达了多么丰富而深刻的内容。

(3)大文豪托尔斯泰有一句以数学算式作比喻的名言:“一个人就好像是一个分数,他的实际才能好比分子,而他对自己的估价好比分母,分母越大,则分数值越小。”

同学们,请用数学知识解答以下诗题:

“李白街上走，提着酒壶去买酒，遇店加一倍，见花喝一斗。三遇店和花，喝完壶中酒，问壶中有多少酒？”

3. 数学与音乐

表面看来，似乎音乐和数学之间没有一点相通的地方。其实，千百年来，它们一直深深结缘的。因为音调的高低，音的节奏的快慢都要通过“数”的形式表现出来。历史上的数学家中，有不少人喜欢音乐；音乐家中，研究音乐中数学规律的人也从古就有。有统计材料表明，从小学习钢琴的幼儿，算式成绩优于不学钢琴的同龄小孩。这也说明音乐与数学有着内在的联系。

4. 数学与绘画

自从有了人类文明，绘画中便蕴涵着数学。我国许多出土的古代彩陶上大都有菱形、圆形、方形等几何图案。我国的名画和地图中，也蕴含着数学内容。如长沙马王堆出土的地图是世界上最早的地图，上面的比例非常准确。

现在，可以用电脑画像，用电脑设计图章。这其中一项惊人的成就是用计算几何和计算机使颅骨复原成原来的头像。苏联科学家格拉西莫夫人能从 26 具骷髅中判别哪个是诗人席勒的遗骨。现在，我国也运用了这种技术来复原北京猿人、半坡人的头像等。

以上实例告诉我们，世界是一个整体，关于这个世界的知识也是一个整体，各门知识是相通的。学好数学对于学习和运用其他各门知识都是有益的。

二、生活中处处有数学

生活中需要算一算的事到处都是。俗语说：“吃不穷，穿不穷，不会算计，一辈子穷”。大至国家的经济财政，小至个人的日常生活，如果数学应用得好，算计得好，观察问题就会“心中有数”；处理问题就会花费少，收效大。请看下面的实例：

例 1：在双休日，某公司组织 48 名员工到附近一个公园坐船游园，公司先派一个人去了解船只的租金情况，这个人看到的租金

价格如下:

船型	每只限载人数(人)	租金(元)
大船	5	3
小船	3	2

那么,怎样设计租船方案才能使所付租金最少(严禁超载)?
(2001年湖北荆州中考题)

分析:从表格中,可设计出只租大船、只租小船、大小船都租三种方案。同学们只要分别求出各方案所付的租金额,就可确定出最佳出租方案。

例2:有一位同学期末数学成绩为78分,全班共30人,有一个0分,一个12分,一个60分,20个80分,5个90分,一个100分,平均分为 $\frac{0+12+60+78+80 \times 20+90 \times 5+100}{30} \approx 76.7$ 分,这

位同学的成绩是超过平均分的,在班里能算中上水平吗?(初二)

分析:以上计算是大平均分,由于全班分数差别太大,全班平均分76.7分,这位同学成绩得78分,虽高于平均分,但不反映班里的中等水平,他是全班倒数第四名。

这个例子说明了平均值概念有一个缺点。在生活中,大多数人都懂得,也会求平均数,但对平均数的优缺点却不大注意。求平均数有许多实用价值,在某些情况下,它能表示中等水平,但当它受异常值的影响时(如本班有得零分和12分)则不能代表中等水平。同学们应学好《统计初步》中的方差、标准差等概念,这将帮助我们理解与运用怎样通过正确的统计从大量现象中反映总的水平与特征。

例3:在排练大型锣鼓表演时,要把队形先后变成10行,15行,18行,24行的矩形阵,最少要选多少学生排练?某小学有400多学生,人数是否够?(初一)

分析:由于队形为矩形,因此总人数应是行数的最小公倍数。