王金萍 张金海 姜本源 宋介珠 主编

概率论与数理统计

http://www.tup.com.cn

清华大学出版社

概率论与数理统计

王金萍 张金海 姜本源 宋介珠 主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书共8章，分为两部分：概率论部分（第1～5章）主要讲述了随机事件、一维及多维随机变量的分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理等内容；统计部分（第6～8章）主要讲述了区间估计与假设检验两种统计推断方法，并简单介绍了方差分析与回归分析。最后在本书的附录中简单介绍了Minitab软件的使用方法。

本书适用于工科各专业本、专科生。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计／王金萍，张金海，姜本源，宋介珠主编．—北京：清华大学出版社，2010.3

ISBN 978-7-302-22093-0

Ⅰ．①概…　Ⅱ．①王…　②张…　③姜…　④宋…　Ⅲ．①概率论　②数理统计　Ⅳ．①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第028976号

责任编辑：佟丽霞　赵从棉

责任校对：王淑云

责任印制：孟凡玉

出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座

http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：北京清华园胶印厂

经　销：全国新华书店

开　本：185×230　　**印　张**：13　　**字　数**：282千字

版　次：2010年3月第1版　　**印　次**：2010年3月第1次印刷

印　数：1～4000

定　价：19.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。
联系电话：010-62770177转3103　　产品编号：037033-01

前言

本书是作者在积累多年的工科概率论与数理统计课程教学经验并参考大量的国内外同类教材基础上编写的。在教材体系与内容安排上，我们注重联系工科各专业的实际，将收集的工程与生活中概率统计的应用实例写入教材，旨在培养学生把数学理论应用于工程实践的意识与能力，以适用于应用型人才的培养。本书在确保知识结构严密的基础上，力图概念讲述简洁明了，理论论证深入浅出。

全书共8章，分为两部分：概率论部分主要讲述了随机事件、一维及多维随机变量的分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理等内容；统计部分主要讲述了区间估计与假设检验两种统计推断方法，并简单介绍了方差分析与回归分析。最后在本书的附录中扼要介绍了Minitab软件的使用方法。

本书在习题配备上，力求突出工科特色。每章的习题分成两部分：一部分是基本要求题；另一部分是补充与提高题。

本书适用于工科本、专科生的概率论与数理统计课程教学(其中“*”部分是供选学的)。

本书的主编为王金萍、张金海、姜本源、宋介珠，副主编为张大庆、刘昊、孟丽新、丁桂艳，全书由何希勤教授统稿。在本书的编写过程中得到了辽宁科技大学理学院领导及同行们的大力支持，在此表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请专家及广大师生提出宝贵意见。

编者

2010年1月

目录

第1章

概率论的基本概念

自然界和日常生活中不断发生着各种现象，通常可以将其分为两类. 一类称为确定性现象，它指的是在一定条件下必然发生或必然不发生的现象. 例如：太阳从东方升起；上抛的石子一定落下. 另一类称为随机现象，它指的是在一定条件下可能发生，也可能不发生的现象，即结果事先无法预知. 例如：掷一枚硬币落在平面上，可能字面朝上，也可能另一面朝上；远距离射击一个目标，可能击中，也可能击不中. 尽管随机现象具有不确定性，但人们通过进一步研究却发现这些随机现象在大量重复试验下，其结果具有某种规律性. 例如，多次重复抛一枚硬币得到字面朝上的次数大体上占一半. 这种在大量重复试验中，随机现象所呈现出的内在规律性称为统计规律性. 因而，随机现象具有两个特点：①在一次具体试验中，现象可能发生，也可能不发生，即结果呈现出不确定性；②在大量重复试验中，其结果具有统计规律性.

概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科. 概率论与数理统计的理论和方法的应用非常广泛，几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中. 例如，使用概率统计方法可以进行气象、水文预报，产品的抽样验收，元件的使用可靠性及平均寿命的估计等.

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

若试验具有以下特点：

(1) 在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的结果不止一个，但事先能明确所有的试验结果；

(3) 每次具体试验之前，不能确定会出现哪个结果.

则称该试验为**随机试验**，简称**试验**. 随机试验通常用字母 E 表示. 本书中后面提到的试验都是指随机试验，我们就是通过研究随机试验来研究随机现象的.

例 1 下列试验都是随机试验.

E_1：掷一只骰子，观察朝上的那一面的点数.

E_2：在一批产品中，任取一件产品，观察其是正品还是次品.

E_3：射击同一个目标，直到击中为止，记录射击次数.

E_4：记录电话交换台在一分钟内接到的呼叫次数.

E_5：从一批灯泡中，任取一只，测量其寿命.

1.1.2 随机事件

1. 样本空间

尽管在每次具体试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果是已知的. 我们将试验 E 的所有可能结果组成的集合称为试验 E 的**样本空间**，记为 S. 样本空间中的元素，即试验 E 的每一个结果，称为**样本点**.

例 2 写出例 1 中各随机试验的样本空间.

$S_1=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$S_2=\{$正品，次品$\}$；

$S_3=\{1,2,3,4,\cdots\}$；

$S_4=\{0,1,2,3,\cdots\}$；

$S_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

2. 随机事件

试验 E 的样本空间 S 的子集称为试验 E 的**随机事件**，简称**事件**. 随机事件用大写英文字母 A,B,C 等表示. 在一次试验中，若该子集中的一个样本点出现，则称这一事件发生. 在一次具体试验中，一个事件可能发生也可能不发生.

特别地，只含一个样本点的集合，称为**基本事件**. 例如例 1 中的试验 E_1 有 6 个基本事件 $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$；试验 E_3 有无数个基本事件 $\{1\},\{2\},\{3\},\cdots$.

样本空间 S 是其自身的子集，也是一个事件，但其在每次试验中都必然发生，称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 也是样本空间的子集，其在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**. 必然事件和不可能事件的发生与否，已经失去了“不确定性”，因而本质上它们已经不属于随机事件；但是为了讨论问题方便起见，我们还是把它们作为随机事件来处理，可以将其理解为随机事件的两个极端情况.

1.1.3 事件之间的关系和运算

在一个样本空间中，可以有许多的随机事件. 概率论的任务之一，就是研究随机事件的统计规律；通过对较为简单的事件的规律的研究去掌握更为复杂的事件的规律，因此需要研究事件之间的相互关系和运算. 随机事件是一个集合，所以事件之间的关系和运算与集合之

间的关系和运算是完全类似的. 20 世纪 30 年代初，冯・米泽斯（Von Mises）开始用集合论的观点来研究随机事件，使得随后概率论的研究走上了严格化的道路.

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A（或称事件 A 包含于事件 B），记为 $B\supset A$（或 $A\subset B$）. 任何事件都包含于样本空间 S.

2. 相等关系

若事件 B 包含事件 A，且事件 A 又包含事件 B，即 $B\supset A$ 且 $A\supset B$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$. 此时事件 A 与事件 B 所包含的样本点相同.

3. 事件的并（和）

若事件 A 和事件 B 至少有一个发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**并**（或**和**），记为 $A\cup B$. 事件 $A\cup B$ 也称为事件 A 与事件 B 的**和事件**. 称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$的和事件.

4. 事件的交（积）

若事件 A 和事件 B 同时发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**交**（或**积**），记为 $A\cap B$（或 AB）. 事件 $A\cap B$ 也称为事件 A 与事件 B 的**积事件**. 称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$的积事件.

5. 互不相容

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容的**（或**互斥的**）. 任何两个不同的基本事件是互不相容的.

6. 逆事件

若事件 A 与事件 B 互不相容，且在任何一次试验中二者必有一个发生，即 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，则称事件 A 与事件 B 是**互逆的**（或**相互对立的**）. 亦称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**（或**对立事件**）. 事件 A 的逆事件记为 $\overline{A}$.

7. 事件的差

若事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**差**，记为 $A-B$. 此时也可以看成事件 A 与事件 $\overline{B}$ 的交，即 $A-B=A\overline{B}$.

英国逻辑学家文（Venn）提供了一种用直观的几何解释来表示事件之间的各种关系的几何图形，称为**文氏图**（见图 1-1）.

为了便于理解，我们把事件的关系与运算的两种解释的对照列表如下（见表 1-1）.

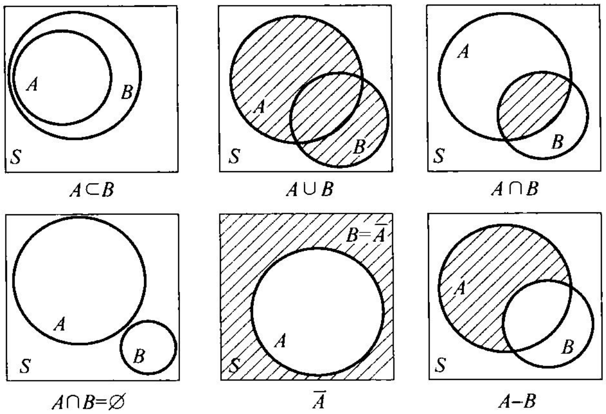

图 1-1

表 1-1

符　号	概率论的解释	集合论的解释
$A\subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生	集合 A 是集合 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与集合 B 相等
$A\cup B$	事件 A 和事件 B 至少有一个发生	集合 A 与集合 B 的并集
$A\cap B$	事件 A 和事件 B 同时发生	集合 A 与集合 B 的交集
$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生	集合 A 与集合 B 无公共元素
$\overline{A}$	事件 A 的逆事件(对立事件)	集合 A 的补集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	集合 A 与集合 B 的差集

事件运算具有如下基本性质：

交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

德・摩根(De Morgan)律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 3 设 A,B,C 为三个事件，一些事件可表示如下.

(1) 三个事件都发生：ABC.

(2) 三个事件中至少发生一个：$A\cup B\cup C$.

(3) A 发生而 B 与 C 都不发生：$A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$.

(4) A 与 B 发生而 C 不发生：$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$.

(5) 三个事件恰好发生一个：$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

(6) 三个事件恰好发生两个：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

(7) 三个事件全不发生：$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$.

(8) 三个事件中至少有一个不发生：$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$.

1.1.4　排列与组合

为了便于学习概率的计算，现简要介绍排列与组合的相关知识.

从一集合中有次序地选取一组元素称为**排列**. 从一集合中选取一组元素而不计其次序称为**组合**.

1. 加法原理

若事物 A 有 m 种取法，事物 B 有 n 种取法，则事物 A 与事物 B 任取其一共有 $m+n$ 种取法. 这里，事物 A 与事物 B 的选取是“平行”的，具有“互斥性”.

2. 乘法原理

若事物 A 有 m 种取法，而事物 B 又有 n 种取法，则先事物 A 后事物 B 共有 mn 种取法. 这里，事物 A 与事物 B 的选取是有“次序”的，选取过程中存在“依赖关系”.

从 n 个不同的元素中取 r 个不同元素的排列数为 $\mathrm{P}_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$.

从 n 个不同的元素中取 r 个元素作排列，但选取过程中任何元素均允许重复出现，此时排列数为 n^r.

从 n 个不同的元素中取 r 个不同元素的组合数为

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{\mathrm{P}_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

从 n 个不同的元素中取 r 个元素作组合，但选取过程中任何元素均允许重复出现，此时组合数为

$$\binom{n+r-1}{r}.$$

1.2　随机事件的概率

在随机试验中，随机事件是否发生是很重要的，但更重要的是事件发生的可能性的大小. 它是随机事件的客观属性，是可以度量的. 我们希望能将一个随机事件发生的可能性的大小用一个数来表达. 为此，首先引入频率，它描述了随机事件发生的频繁程度.

1.2.1　频率

定义 1.1　设在随机试验 E 中进行 n 次重复试验，其中事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**. 称 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**，记作 $f_n(A)$.

显然频率具有下述基本性质：

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则 $f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$.

以最简单的投硬币试验为例. 投掷一枚均匀硬币，可能有两种结果：出现正面或反面. 就一次试验而言，我们看不出这些结果发生的规律，但如果去做大量的试验，就可发现其中的一些规律性. 历史上有些人曾经做过这类试验，结果见表 1-2.

表 1-2

试验者	试验次数	出现正面的次数	频率
德·摩根(De Morgan)	2048	1061	0.5181
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
皮尔逊(K. Pearson)	12 000	6019	0.5016
皮尔逊(K. Pearson)	24 000	12 012	0.5005

从上面的试验数据可以看出，当试验次数相当大时，出现正面的频率稳定地在 0.5 左右摆动. 一般而言，频率随试验次数的变化而变化，但当试验次数足够大时，频率又稳定地在某个常数附近摆动，此性质我们称之为“频率的稳定性”. 因为该性质是通过大量统计显示出来的，所以称为统计规律性，它揭示了隐藏在随机现象中的规律性. 由随机事件的频率的稳定性可以看出，随机事件发生的可能性的大小可以用一个数来表示，于是我们可以给出随机事件概率的统计定义.

1.2.2 概率的定义

定义 1.2 设在相同条件下进行大量独立重复试验，若事件 A 的频率稳定地在某一确定值 p 附近摆动，则称此数值 p 为事件 A 发生的**概率**，记作 $P(A)$，此时 $P(A)=p$.

此定义给出了随机事件概率的近似计算方法. 在许多实际问题中，当事件的概率不容易计算时，往往就可用频率近似代替概率，这正是 1946 年由冯·诺依曼(Von Neumann)和乌拉姆(Ulam)所建立的蒙特卡罗(Monte Carlo)方法的基本思想.

概率的统计定义有一定的局限性. 柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)于 1933 年提出了概率的公理化结构，使概率论成为严谨的数学分支. 下面给出概率的公理化定义.

定义 1.3 设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 中的事件 A，赋予一个实数 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足以下性质：

(1) 非负性：$P(A) \geqslant 0$.

(2) 规范性：$P(S)=1$.

(3) 可列可加性：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \tag{1.1}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的**概率**.

1.2.3 概率的性质

概率具有如下性质:

(1) $P(\varnothing)=0$. (1.2)

(2) 对于任何事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i). \tag{1.3}$$

式(1.3)称为概率的有限可加性.

(4) 设 A,B 是两个事件,若 $A\subset B$,则有

$$P(A)\leqslant P(B),$$
$$P(B-A)=P(B)-P(A). \tag{1.4}$$

(5) 对于任何事件 A,有

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.5}$$

(6) 对于任何两事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.6}$$

式(1.6)可推广到 n 个事件的情形,即

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i\neq j} P(A_iA_j)+\sum_{i\neq j\neq k} P(A_iA_jA_k)$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.7}$$

1.2.4 古典概率模型

设试验 E 满足:

(1) 试验的样本空间的所有可能结果(即基本事件)只有有限个;

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有上述两个特征的试验称为**等可能概型**.由于这种等可能性的数学模型曾经是概率论发展初期的主要研究对象,故亦称**古典概率模型**,简称**古典概型**.它在概率论中有很重要的地位:一方面,因为它比较简单,许多概念既直观而又容易理解;另一方面,它又概括了许多实际问题,有很广泛的应用.利用概率的性质可以得出古典概型的计算公式.

对于随机试验 E,若样本空间 S 的样本点总数为 n,事件 A 所包含的样本点数为 m,则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 中包含的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}}=\frac{m}{n}. \tag{1.8}$$

式(1.8)也称为概率的古典定义.

例 1 将一枚硬币抛掷三次,求:

(1)出现两次正面、一次反面的概率;(2)至少出现一次反面的概率.

解 记正面为 H,反面为 T,则相应的样本空间为

$$S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,HTH,THH,TTT\}.$$

(1) 出现两次正面、一次反面的事件为

$$A=\{HHT,HTH,THH\}.$$

所以,概率为 $P(A)=\frac{3}{8}$.

(2) 至少出现一次反面的事件为

$$B=\{HHT,HTH,THH,HTT,HTH,THH,TTT\}.$$

所以,概率为 $P(B)=\frac{7}{8}$.

注:此处事件 B 发生的概率也可用其逆事件 $\bar{B}$ 来求,即

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

例 2 设有 10 件产品,其中有 6 件正品,4 件次品,现从中任取 3 件,求下列事件的概率.

(1) $A=\{$没有次品$\}$;　　(2) $B=\{$只有 1 件次品$\}$;

(3) $C=\{$最多 1 件次品$\}$;　　(4) $D=\{$至少 1 件次品$\}$.

解 因为产品无序,用组合计算. 从 10 件产品中任取 3 件的总的取法数为

$$n=\binom{10}{3}=120.$$

(1) 事件 A 没有次品,即取出的 3 件均为正品,且是从 6 件正品中取出的,所以

$$m_A=\binom{6}{3}=20,\quad P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{1}{6}.$$

(2) 事件 B 只有 1 件次品,应理解为有 1 件次品和 2 件正品,所以

$$m_B=\binom{4}{1}\binom{6}{2}=60,\quad P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{1}{2}.$$

(3) 事件 C 是事件 A 与事件 B 的和事件,且 $A\cap B=\varnothing$,所以

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}.$$

(4) 事件 D 可看成取出的 3 件产品分别有 1 件、2 件、3 件次品这三个事件之和,故

$$m_D=\binom{4}{1}\binom{6}{2}+\binom{4}{2}\binom{6}{1}+\binom{4}{3}\binom{6}{0}=100,\quad P(D)=\frac{m_D}{n}=\frac{5}{6}.$$

注:此处用逆事件来求更方便. 即

$$P(D)=P(\bar{A})=1-P(A)=\frac{5}{6}.$$

例 3　一口袋装有 6 只球，其中 4 只白球，2 只红球. 从袋中取球两次，每次随机地取一只. 考虑两种取球方式：(a)第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球. 这种取球方式叫做**放回抽样**. (b)第一次取一球不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球. 这种取球方式叫做**不放回抽样**. 试分别就上面两种情况，求：(1)取到的两只球都是白球的概率；(2)取到的两只球颜色相同的概率；(3)取到的两只球中至少有一只是白球的概率.

解　(a) 放回抽样的情况.

以 A,B,C 分别表示事件“取到的两只球都是白球”，“取到的两只球都是红球”，“取到的两只球中至少有一只是白球”. 易知“取到的两只球颜色相同”这一事件即为 $A\cup B$，$C=\overline{B}$.

在袋中依次取两只球，每种取法为一基本事件，显然此时样本空间中仅包含有限个元素. 且由对称性知，每个基本事件发生的可能性相同，因而可用古典概型来计算事件的概率.

因为是放回抽样，所以第一次和第二次都有 6 只球可供抽取，由乘法原理，共有 6×6 种取法，同理可处理事件 A 和 B 所对应的取法数. 所以，可作如下计算.

(1) $P(A)=\dfrac{4\times 4}{6\times 6}=\dfrac{4}{9}$.

(2) $P(B)=\dfrac{2\times 2}{6\times 6}=\dfrac{1}{9}$，由于 $AB=\varnothing$，得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{9}.$$

(3) $P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)=\dfrac{8}{9}$.

(b) 不放回抽样的情况.

由读者自己完成.

例 4　将 3 个小球随机地放入 4 个盒子中. 求：盒子中球的最多个数分别为 1,2,3 的概率.

解　3 个球放入 4 个盒子，是有重复的排列，总放法为 $n=4^3=64$.

(1) 每个盒子中球的最多个数为 1，即 3 个球分别放入 4 个盒子中的 3 个盒子，放法为 $m_1=\mathrm{P}_4^3=24$. 于是 $p_1=\dfrac{m_1}{n}=\dfrac{3}{8}$.

(2) 每个盒子中球的最多个数为 2，即 3 个球放入 4 个盒子中的两个盒子，放法为排列数 $\mathrm{P}_4^2=12$，其中一个盒子中有两个球，另一个盒子中有 1 个球，这 1 个球从 3 个球中取，取法为组合数 $\dbinom{3}{1}=3$（或 2 个球从 3 个球中取，取法为组合数 $\dbinom{3}{2}=3$），所以球的放法为 $m_2=\mathrm{P}_4^2\dbinom{3}{1}=36$. 于是 $p_2=\dfrac{m_2}{n}=\dfrac{9}{16}$.

(3) 每个盒子中球的最多个数为 3，即 3 个球全放入 4 个盒子中的 1 个盒子里，放法为