SHU XUE

高中数学
标准化试题
解题方法与技巧

清华大学附中数学教研组 编著

河南科学技术出版社

3Z

高中数学标准化试题

解题方法与技巧

清华大学附中数学教研组 编著

河南科学技术出版社

内容提要

本书根据国家教委新制定的教学大纲和国家考试中心新作的考试说明，针对目前高考试行的标准化数学试题解答过程中的疑难问题，重点介绍数学标准化试题的特点，用于考试的几种主要题型，题型的分析和解题方法等。在分析归纳解题规律与技巧之后，出两套练习题给读者，并附参考答案与解题提示。本书适合高考应试生和高中数学教师阅读参考。

高中数学标准化试题解题方法与技巧

清华大学附中数学教研组　编著

责任编辑　李玉莲

河南科学技术出版社出版发行

（郑 州 市 农 业 路 7 3 号）

河 南 新 郑 市 印 刷 厂 印 刷

787×1092毫米　32开本　6.5印张　139千字

1997年9月第1版　1997年9月第1次印刷

印数：1-21230册

ISBN7-5349-1462-0/G·341

定　价：3.50元

编写人员名单

主编 庞金泽 郑增仪 马兰馨
作者 瞿宁远 仉斯杰

编者的话

为了帮助高中二、三年级同学更好地掌握标准化试题的解题方法和技巧，提高标准化试题的解答速度和正确率，我们特约请北京清华大学附中的有关学科教研组的老师们，编写了《高中标准化试题解题方法与技巧》这套丛书。全书分语文、数学、物理、化学、英语五册。

该套书针对各个学科标准化试题的不同特点和要求，进行了深入浅出的分析，并结合高考中出现的典型题例，系统地介绍了标准化试题的各类题型、思考方法和解答规律与技巧，相信会得到正在复习迎考的同学们的喜欢。

为了检查同学们解答标准化试题的实际水平，每书后面都安排有一至两套高考标准化模拟题，并附有重点提示和答案，供同学们进行“实战”练习。

在这套书的编写过程中，清华大学附中的校领导和有关学科教研组给予了大力的支持。参加本书编写的都是清华附中具有丰富教学实践经验的高级教师和专家。在此我们真诚地向清华大学附中的领导和老师们表示衷心的感谢。

我们诚恳地欢迎高中老师和同学们，对本书提出宝贵的意见。

庞金泽

一九九三年五月

目　　录

一、标准化试题概述

我们知道，数学题一般是由一些条件和结论所构成的。如果明确地给出结论，需要我们利用条件去论证这个结论是正确的或是不正确的，称为求证题或者证明题；而寻求符合已知条件的适当结论的题型称为求解题，常见的有“计算题”、“化简题”、“判断关系题”等等。

近年来随着数学教学的研究和改革的不断深入和发展，在学习、竞赛和考试中，除了继续采用上述我们比较熟悉的命题形式外，常常采用的命题形式还有：

(1)根据所学知识进行鉴别的是非判断题；

(2)无需过程只要结论的填空题；

(3)逐步检查推理或运算过程正误的改错题；

(4)给出多个结论等待确定的选择题。

在高考数学试题中，自 1983 年开始采用部分选择题(5 小题，共 10 分)，以后逐年有所变化，到 1992 年已增至 18 道，共 54 分，1985 年广东省开始数学高考的标准化试验，其中就有 20 道选择题。从表 1 对选择题的十年统计可以看出，作为标准化考试重要题型之一的选择题，在高考中所占的比重呈上升趋势，题目中所涉及的主要知识点也在逐渐增多。因此，在系统复习和平时的学习中，了解和掌握关于选择题的有关知识，以及常用的解题方法与技巧是十分必要的。

表1　1983～1992年十年选择题的统计资料

年　号	选　择 题　量	分　数	占总分的 百分比	涉　及 知识点
1983	5	10	8.3	8个
1984	5	15	12.5	10个
1985	5	15	12.5	14个
1986	10	30	25	15个
1987	8	24	20	13个
1988	15	45	37.5	17个
1989	12	36	30	15个
1990	15	45	37.5	17个
1991	15	45	37.5	17个
1992	18	54	45	20个

在高考的数学试题中一般有选择题、填空题和解答题等三种题型。

选择题是一种给出$n(\geqslant 2)$个数学判断，要求辨别其真伪的判断题，又称为“标准化试题”或者“客观性试题”；

填空题是一种不要求书写解题过程的解答题，又称为“简答题”；

解答题则包含着”求解题”和“ 求证题”两种类型，解题时

要求解答具备必要的文字说明和演算步骤。

本章主要研究数学选择题的特点、类型以及解选择题、填空题的基本要求,应该注意的几个问题。

(一)选择题的结构、特点和基本类型

数学选择题一般由解题指令、题干和可供选择的几个答案三部分构成。如1992年高考数学(理工农医类)的第一大题:

一、选择题:本大题共18小题;每小题3分,共54分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内。

(1)$\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$的值是 〔 〕

(A)$\frac{2}{3}$ (B)1 (C)$\frac{3}{2}$ (D)2

这里,大题号后,小题号前的一段文字,它指示受测试者这道选择题正确结论的数目,怎样答题,如何评分等等。这段指示性语言就是选择题的解题指令。再看题(1),它包括两个部分,第一部分给出$\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$,即给出题设条件,并要求答题者求出它的值,指明了答题要求;从语法结构上看,这一部分是一个不完整的判断语句,把它和任何一个可供选择的选项结合起来,才能构成一个完整的判断。这一部分称为选择题的题干。第二部分是几个可供选择的结论(A)~(D),答题者必须按照指令和题目要求从中选出符合题意的选项,但选择的过程和道理并不要求表述出来。

通常，我们把一个选择题所提供的选项称为选择支，选择支的个数称为该选择题的支数。符合题意要求的选择支简称正确支，否则称为错误支或迷惑支。一个选择题的正确支的个数称为它的元数。这样，选择题就可分为一元选择题（只有一个正确支）和多元选择题（至少有两个正确支）两种，有时也可简称它们为单选题或多选题。就目前所遇到的情况而言，选择题经常出现的是一元二支型（即是非判断题）一元四支型（高考试题中采用的一种）等两种情形。本书今后若不加特殊说明，选择题均指后一种类型，请读者务必注意。

以上是按照选择题的形式进行分类的，如果按照选择支的特点或性质分类，又可大致分为“定量型”、“定性型”、“定形型”和“定位型”等几种情形：

1. **定量型**

要求对所指定的数量关系作出判断，往往偏重于计算和验证。

例 1 如果函数 $y=\sin\omega x\cos\omega x$ 的最小正周期是 4π，那么常数 ω 为 〔 〕

(A)4 (B)2 (C)$\frac{1}{2}$ (D)$\frac{1}{4}$

2. **定性型**

要求对考察的对象是否具有某种性质或关系作出判断，一般它偏重于概念辨析、推理论证和空间想象。

例 2 在四棱锥的四个侧面中，直角三角形最多可有 〔 〕

(A)1 个 (B)2 个 (D)3 个 (D)4 个

3. **定形型**

要求对所讨论的对象的形状或图形作出判断，它偏重于

数形转化和空间想象。

例 3 满足 $z=a\cos\theta+ib\sin\theta$(其中 θ 为参数,$a>0,b>0$)的复数 z 所表示的图形是 〔 〕

(A)圆 (B)圆或椭圆 (C)直线 (D)以上都不对

4. **定位型**

要求对所指定的对象的位置关系作出判断,主要涉及到数式计算、验证和数形的分析转化。

例 4 P 为曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上任一点,过 P 作 $PQ\perp OX$ 轴于 Q,则 $\angle POQ$ 的平分线必过定点 〔 〕

(A)$(0,-\frac{1}{2})$ (B)$(0,1)$

(C)$(0,-2)$ (D)以上都不对

自然,也可以把以上几种情形综合起来,形成"综合型"的题型。

仔细研究高考中的选择题就可以发现,它具有题小,量大,灵活,概念性强,知识覆盖面宽,命题形式多样等特点,也便于客观、准确地评分和统计成绩,减少偶然失误对成绩的影响。这就有利于检测答题者对数学概念理解掌握的程度,应用双基分析、解决问题的能力;有利于培养学生思维的严谨性、灵活性和敏捷性,发展他们的智力,提高他们敏捷机智、果决善断的能力,也就是国内外广泛采用、高考试题中逐年增加选择题比重的原因。

对任何事物都要一分为二。尽管"选择题"有以上优点,但它也存在不少弊端。例如,它难于训练和考查答题学生运用数学语言的文字表达能力和系统严密的逻辑推理能力,不利于发现学生的解题中的思维过程和发生错误的原因。由于选择

题毕竟有 25%的可能“猜”对，这就有可能使答题学生产生侥幸心理，随意猜测，影响成绩的客观性和可靠性。这些缺点需要我们在平时的学习和训练中加以克服。

(二)填空题的结构、特点和基本类型

正如前面所提到的那样，填空题是一种不要求书写解题过程的“求解题”，或者称为“简答题”，有时候也可以用它来判断某些空间图形或几何元素之间的位置关系。如果我们把选择题归结为一种以考察概念为主计算为辅的题型的话，那么填空题就是一种考察计算为主、概念为辅的题型。

值得注意的是，自 1984 年以来，随着高考越来越趋向于标准化，填空题在每一次测试中都已成为必不可少、但错误率常常又较高(与选择题比较)的一类题型了。为什么会这样呢？究其原因，恐怕还是由于答题者对填空的特点和要求不甚清楚所造成的。

从语法结构上看，题目需要填写的横线前的一段话是一个不完整的命题，只有我们把这一段话和需要填写在横线上的结论结合在一起，才能构成一个完整的命题。由于填空题一般都是篇幅短，题量大，知识覆盖面宽，每一道题要考察一个或几个知识点，需要用到不少的基本运算的技能和技巧，因此它既是考察“双基”、考察计算能力的基本题，又是对准确判断、严密思维有一定要求的能力题。

由于填空题既不像选择题那样，有“选择支”可供“参照”取“巧”，又不像解答题那样，对一部分得一部分的分“按劳取酬”，稍有毛病，哪怕是 1%的疏忽都会使 99%的努力化为乌

有，前功尽弃。必须慎之又慎。这也就是高考中填空题年年有、错误率常常降不下来的原因。

与选择题类似，填空题也有"定量型"、"定性型"、"定形型"和"定位型"这样几种并非是严格意义下进行分类的情形：

1. 定量型

例如，已知数列$\{a_n\}$是等比数列，且$a_n>0$，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，那么a_3+a_5的值是____________；

2. 定性型

例如，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E、F分别是BC和C_1D_1的中点，则EF和对角面B_1BDD_1的位置关系是____________；

3. 定形型

例如，满足$z=a\cos\theta+ib\sin\theta$（其中$\theta$为参数，$a>0$，$b>0$）的复数$z$所表示的图形是____________；

4. 定位型

例如，P为曲线$y=\sqrt{1-x^2}$上任一点，过P作$PQ\perp OX$轴于Q，则$\angle POQ$的平分线必过定点____________。

容易看出，这些类型的问题有一个共同的特点，就是它需要在深入理解和掌握有关概念的基础上，进行严密的思维和准确的计算。光会算（这是必不可少的）还不行，还需要有正确的判断和严密的逻辑分析、推理能力。只有一丝不苟、处处认真才有可能做好填空题。

（三）解题中应注意的几个问题

在实行标准化考试的高考中，选择题和填空题的题量比

较大，以 1992 年为例，这两种题型在总题量中几乎占 82%，分数也差不多占 60%，因此，能不能做好这两种类型题对整个考试起着至关重要的作用。由于选择题、填空题具有与一般解答题不同的一些特点，更需要答题者善于选择正确的解题方法，以便迅速、准确地作出判断和计算。根据同学在解答这两种题型的试题中常犯的毛病，我们特别提出以下几个问题，希望能引起大家的重视。

1. **严格审题，注意分析，寻求题目中的隐含条件**

由于审题不严，胡猜乱选造成失误是解选择题、填空题的常犯病。举例如下：

例 5 方程$\frac{x}{4^2}+\frac{y}{5^2}=1$的曲线在 y 轴上的截距是 〔 〕

(A)4^2 (B)5^2 (C)± 4 (D)± 5

有的同学由于审题不仔细，把已知方程误认为是椭圆方程$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$，从而选(D)。实际上，已知方程表示的是一条直线，可以直接利用直线方程的截距式，或直接化为 $y=-\frac{5^2}{4^2}x+5^2$，而得出正确结论(B)。

例 6 已知锐角三角形的三边长分别为 3、4、x，那么 x 的取值范围是 〔 〕

(A)$(1,7)$ (B)$(1,\sqrt{7})$

(C)$(5,7)$ (D)$(\sqrt{7},5)$

有的同学解题时不注意审题，忽略了"锐角三角形"这个重要的约束条件，而直接利用"三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边"的平面几何命题，错误地选择了(A)。

有的同学尽管注意了"锐角三角形"这个条件，又不知应

怎样利用它，也造成了误选。

事实上，如果我们利用已知条件就可列出下面的不等式组$\begin{cases}4-3<x<4+3\\x^2<4^2+3^2\\x^2>4^2-3^2\end{cases}$

从而解得 $\sqrt{7}<x<5$

这样，正确的结论应是(D)。

例 7 （填空题）已知 $\sin\theta=\frac{m-3}{m+5}$，$\cos\theta=\frac{4-2m}{m+5}$ 都是减函数，则 m 的取值是__________。

这个题目很多人是这样解的：因为 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 都是减函数，所以 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant 2k\pi+\pi(k\in z)$，于是

$$\begin{cases}0\leqslant\frac{m-3}{m+5}\leqslant 1\\-1\leqslant\frac{4-2m}{m+5}\leqslant 0\end{cases}\quad \text{即知}\begin{cases}m\geqslant 3\\2\leqslant m\leqslant 9\end{cases}$$

所以 $3\leqslant m\leqslant 9$。这是一个错误的结论，它只是 m 必须满足的一个必要条件。

事实上，这个题目中隐蔽着一个“隐含条件”，那就是“对于任意实数 θ，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$”，注意到这一点，就会得出 $m^2-8m=0$。$m=0$（舍去），$m=8$。显然，$8\in[3,9]$，正确的结论应是 8。

2. 准确应用基本概念和基本知识，熟练运用基本技能，注意发现各选择支的细微差别，进行正确的判断和计算

由于选择题常常把几个相差不多的结论并列在一起作为选择支，以造成迷惑或干扰；而填空题则往往对在深刻理解题意、明确算理的基础上，进行迅速、准确的计算有较高的要求，

这就要求在解题时能正确使用基本概念和基本知识(包括定义、法则、公式、定理等),判断分析、体会发现各选择支的差异或题目中的特别含意和要求,寻求简便、合理的方法,迅速得出正确的解答。举例如下:

例 8　直线 $3x+4y-5=0$ 的倾斜角是　〔　〕

(A) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$　　(B) $\operatorname{arctg}(-\frac{3}{4})$

(C) $\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$　　(D) $\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$

这个题目有的同学由于不注意区别反正切函数的值域是 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,而直线的倾斜角是直线的向上方向与 x 轴正向所成的最小正角,应在 $[0,\pi)$ 内取值在概念上的不同,直接把直线方程化成斜截式:$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$,得到斜率 $k=\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$,从而选(B)造成失误。

实际上,本题正确的答案应当选(D)。

例 9　函数 $y=\sqrt{1-x^2}\lg(|x|+x)$ 的定义域是　〔　〕

(A) $[-1,0)\cup(0,1]$　　(B) $[-1,0)$

(C) $(0,1]$　　(D) $[-1,1]$

分析　仔细观察可以发现,在三个选项(A)、(B)、(D)、中都有 $x=-1$,而 $x=-1$ 时,$\lg(|x|+x)$ 无意义,即在这个点处函数无意义,应予排除。由于正确的结论应当是对于符合题意的一切 x 值均能成立的式子,因此对特殊的一个 x 值不成立的选项肯定不是正确的选项,所以正确的结论应当选(C)。

自然,这个题目也可以直接解出:$-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $0<x<$

1，从而得出 $0<x<1$，应选(C)。

例 10 若直线 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t\\ y=3+t\end{cases}$ (t 为参数)与圆 $x^2+y^2=5$ 相交，则所得的弦长为__________。

解：将直线 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t\\ y=3+t\end{cases}$ 直线代入圆的方程 $x^2+y^2=5$，整理得 $5t^2+24t+16=0$，$\therefore t_1=-4, t_2=-\dfrac{4}{5}$，即知所求的弦长 $d=|t_1-t_2|=|-4+\dfrac{4}{5}|=\dfrac{16}{5}$。

这是一个错解，错误的原因是：把参数 t 当成了定点到动点的有向线段的数量。

本题的正确解法是：对直线的参数方程消参后，得 $y=2x+3$，代入方程 $x^2+y^2=5$，整理得 $5x^2+12x+4=0$，从而 $x_1+x_2=-\dfrac{12}{5}$，$x_1x_2=\dfrac{4}{5}$，于是所求弦长 $d=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{(-\dfrac{12}{5})^2-4\cdot\dfrac{4}{5}}=\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$。

3. 充分利用选择项的“启示”作用，尽力挖掘概念的本质，寻求简捷方法解题

由于选择题的选择项有双重性，即既有“迷惑性”，又有提供出某种解题信息的“暗示性”，利用好这种“启示”作用，往往对排除干扰，发现简捷方法起到关键作用；对于填空题也是如此，“概念是思维的细胞”，概念的本质更决定了它与众不同的特点以及使用范围，努力挖掘题目中所涉及到的概念本质，常常能少走弯路及时发现简捷方法，提高解题的正确率。举例如