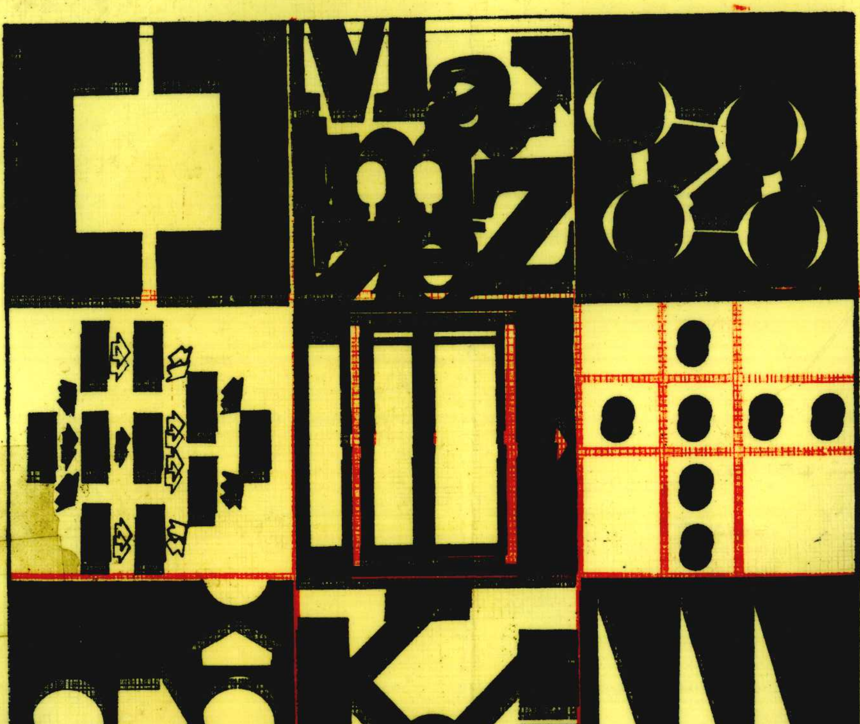
作業研究導論詳解

（一九八〇年第三版）

INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH

THIRD EDITION

HILLIER AND LIEBERMAN



曉園出版社

前　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

HILLER LIEBERMAN 作業研究導論詳解

（目　　錄）

第二章　直線規劃術

1. 某製造企業已停止某類不利產品之生產。而由所造成之溢出生產能量頗為可觀。管理當局正考慮將此溢出能量用於三種產品之一或數者之製造。該三種產品稱為產品1，2，3。機器可用能量之可能對產出量有所限制者如次表所列：

機器種類	可用時間（每週機器小時）
銑床	500
車床	350
磨機	150

各產品每單位所需機器小時數為

生產力係數（每單位產品機器小時）

機器種類	產品1	產品2	產品3
銑床	9	3	5
車床	5	4	0
磨機	3	0	2

銷貨部表示，產品1與產品2之潛在銷量超過最高產量，產品3之潛在銷量為每週20單位。

產品1，2，3 之單位利潤分別為 \$30，\$12，\$15 。

(a) 製作決定使利潤達最高額之各產品應產數量用之直線規劃模式。

(b) 以簡算法解此問題。

(c) 用一簡算法之電子計算機程式碼解此問題。

解：(a) 令 x_1 ，x_2 ，x_3 分別表示產品 1 ，2 ，3 之數量

由題意知目標函數為：

$Z = 30x_1 + 12x_2 + 15x_3$ ，求其極大值

條件約制式爲：

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 500 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 350 \\ 3x_1 + 2x_3 \le 150 \\ x_3 \le 20 \\ x_j \ge 0 \quad \text{for} \quad j = 1, 2, 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{加入餘額變數}}$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 500 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_5 = 350 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_6 = 150 \\ x_3 + x_7 = 20 \\ x_i \ge 0 \quad \text{for} \quad i = 1, \cdots\cdots, 7 \end{cases}$$

(b) 故線型規劃起首表如下：

Iter	*BV*	*Eq* #	*Z*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	*RHS*
0	*Z*	0	1	−30	−12	−15	0	0	0	0	0
	x_4	1	0	9	3	5	1	0	0	0	500
	x_5	2	0	5	4	0	0	1	0	0	350
	x_6	3	0	3	0	2	0	0	1	0	150
	x_7	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20

BV ：基變數

Eq#: 方程式號碼

RHS:方程式右端（以下各題符號同此）

Iter:步驟程序

按表列型簡算法步驟，本題經過四個步驟後，得下表

Iter	*BV*	*Eq*#	*Z*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	*RHS*
4	*Z*	0	1	0	0	0	2.86	0.86	0	0.71	1742.9
	x_2	1	0	0	1	0	−0.24	0.43	0	1.19	54.76
	x_6	2	0	0	0	0	−0.57	0.43	1	0.86	31.43
	x_1	3	0	1	0	0	0.19	−0.14	0	−0.95	26.19
	x_3	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20

因 Z 列內，係數已無負數，故得最佳解如下：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26.19 \\ 54.76 \\ 20 \end{pmatrix} \quad 且 \quad Z = 1742.9$$

2. 某農夫養豬以爲銷售之用。今欲知，最低成本下滿足某種營養要求之每豬各類飼料飼用量。每類飼料每公斤所含各種基本營養成分量、每日營養需要量、及飼料成本如下：

營養成分	玉蜀黍公斤數	大桶糟公斤數	紫花苜蓿公斤數	每日最低需要量
醣	90	20	40	200
蛋白質	30	80	60	180
維他命	10	20	60	150
成本（¢）	21	18	15	

(a) 就此問題製作直線規劃模式。

(b) 將此模式改寫爲同義之第 2.2 節所示本書標準形模式。

(c) 導入虛擬變數，並作應用簡算法所需諸事，以設立起首簡算表。

(d) 以簡算法解此問題。

(e) 用一簡算法電子計算機程式碼解此問題。

解：(a) 令 x_1：玉蜀黍（*Corn*）之公斤數

x_2：大桶糟（*tankage*）之公斤數

x_3：紫花苜蓿（*alalfa*）之公斤數

由題意知欲求最低成本組合，亦即求目標函數

$Z = 21x_1 + 18x_2 + 15x_3$ 之極小値

$$限制式爲：\begin{cases} 90x_1 + 20x_2 + 40x_3 \geq 200 \\ 30x_1 + 80x_2 + 60x_3 \geq 180 \\ 10x_1 + 20x_2 + 60x_3 \geq 150 \\ x_i \geq 0 \quad \text{for} \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 20 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 \geq 18 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 15 \\ x_i \geq 0 \quad \text{for} \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

(b) 求 Z 之極小値，即是求（$-Z$）之極大値，故將(a)中之式子各冠以負號，同時將限制式不等號反向，即可得 §2.2 之標準形模式如下：

目標函數 $-Z=-21x_1-18x_2-15x_3$ 之極大値

條件式則爲：

$$-9x_1-2x_2-4x_3\le -20$$
$$-3x_1-8x_2-6x_3\le -18$$
$$-x_1-2x_2-6x_3\le -15$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$$

(c) 目標函數可改爲求：

$-\dfrac{Z}{3}=-7x_1-6x_2-5x_3$ 之極大値

按 §2.10最小化（*Minimization*）法加入餘額變數（*Surplus variable*）x_4，x_6，x_8 以及虛擬變數 $\bar{x}_5$，$\bar{x}_7$，$\bar{x}_9$，則限制式成爲：

$$\begin{cases} 9x_1+2x_2+4x_3-x_4+\bar{x}_5=20 \\ 3x_1+8x_2+6x_3-x_6+\bar{x}_7=18 \\ 1x_1+2x_2+6x_3-x_8+\bar{x}_9=15 \end{cases}$$

故 Z 列變成新列如下：

$$-\frac{Z}{3}+(-13M+7)x_1+(-12M+6)x_2$$
$$+(-16M+5)x_3+Mx_4+Mx_6+Mx_8=-53M$$

設立起首簡算表如下：

BV	$Eq\#$	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	x_8	$\bar{x}_9$	RHS
Z	0	$\frac{-1}{3}$	$-13M+7$	$-12M+6$	$-16M+5$	M	0	M	0	M	0	$-53M$
$\bar{x}_5$	1	0	9	2	4	−1	1	0	0	0	0	20
$\bar{x}_7$	2	0	3	8	6	0	0	−1	1	0	0	18
$\bar{x}_9$	3	0	1	2	6	0	0	0	0	−1	1	15

經過五個步驟（即四個重複）之後 Z 列之係數已無負數，故最後表解如下：

BV	Eq#	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	x_8	$\bar{x}_9$	RHS
Z	0	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{31}{21}$	0	$\frac{9}{14}$	$M-\frac{9}{14}$	$\frac{17}{42}$	$M-\frac{17}{42}$	0	M	$-\frac{141}{7}$
x_1	1	0	1	$-\frac{10}{21}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	$-\frac{2}{21}$	0	0	$\frac{8}{7}$
x_8	2	0	0	$\frac{146}{21}$	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{25}{21}$	$\frac{25}{21}$	1	-1	$\frac{5}{7}$
x_3	3	0	0	$\frac{33}{21}$	1	$\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0	0	$\frac{17}{7}$

由表中知最佳解爲：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ 0 \\ \frac{17}{7} \end{pmatrix} \quad \text{而} \quad Z = \frac{423}{7} \qquad \left(\because \ \frac{-Z}{3} = \frac{-141}{7} \right)$$

3. 某公司之三分廠有溢出生產能量。此三廠皆能生產某種產品，而管理當局決定將溢出能量用於此途。此產品可製爲大號、中號、與小號三種，其單位淨利潤分別爲\$140,\$120,與\$100。工廠 1、2、3 之溢出人力與設備能量，分別可用於每日生產此產品——不分大小——750,900, 及 450 單位。可用在產品儲存場所亦限制產量。工廠 1、2、3 分別有 13,000, 12,000, 5,000 平方呎之在產品儲存場所可供此產品一日生產之用。大、中、小號每日每生產一單位各需 20,15,12 平方呎之儲存場所。

據銷貨預測，大、中、小號產品每日各可售出 900,1,200,750 單位。

爲保持各廠工作負擔之均勻並維持彈性起見，管理當局決定，各廠之該產品產量，須佔各該廠溢出人力及設備能量之同一百分比。

管理當局欲知，各廠各規格產品之產量應爲若干，始能使利潤增加額最大。

(a) 就此問題製作直線規劃模式。

(b) 用一簡算法電子計算機程式碼解此問題。

解：(a) 令 x_{ij} 表 i 廠生產 j 產品的數量

$i = 1, 2, 3$

$j = L, M, S$　　　L：大　　　M：中　　　S：小

由題意，能使利潤增加額爲最大之目標函數爲：

$$Z = 140\sum_{i=1}^{3} x_{iL} + 120\sum_{i=1}^{3} x_{iM} + 100\sum_{i=1}^{3} x_{iS}$$

求Z之極大值，條件限制式爲：

$$x_{1L} + x_{1M} + x_{1S} \leq 750$$
$$x_{2L} + x_{2M} + x_{2S} \leq 900$$
$$x_{3L} + x_{3M} + x_{3S} \leq 450$$
$$20x_{1L} + 15x_{1M} + 12x_{1S} \leq 13,000$$
$$20x_{2L} + 15x_{2M} + 12x_{2S} \leq 12,000$$
$$20x_{3L} + 15x_{3M} + 12x_{3S} \leq 5,000$$
$$x_{1L} + x_{2L} + x_{3L} \leq 900$$
$$x_{1M} + x_{2M} + x_{3M} \leq 1,200$$
$$x_{1S} + x_{2S} + x_{3S} \leq 750$$
$$900(x_{1L} + x_{1M} + x_{1S}) - 750(x_{2L} + x_{2M} + x_{2S}) = 0$$
$$450(x_{2L} + x_{2M} + x_{2S}) - 900(x_{3L} + x_{3M} + x_{3S}) = 0$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3 \text{ 且 } j = L, M, S)$$

(b) 本題有九個變數，十一個約制式，以筆算重複多次，甚浪費時間故將條件限制式加入虛擬變數而得聯立一次方程式，只須將此聯立方程式之係數打入卡片，連同程式上機，即可得最佳解如下：

x_{1L}	x_{1M}	x_{1S}	x_{2L}	x_{2M}	x_{2S}	x_{3L}	x_{3M}	x_{3S}	Z
516.7	177.8	166.7	0	666.7	0	0	0	416.7	232,000

4. 用第 2.1 節所示圖解法以解下列問題。

$$\text{使} \quad Z = 2x_1 + x_2 \text{ 最大，}$$

受制於

$$x_2 \leq 10$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 60$$
$$x_1 + x_2 \leq 18$$
$$3x_1 + x_2 \leq 44$$

及

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

解：(1) 以 x_1 表橫坐標，x_2 表縱坐標，因 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, 故只考慮第

一象限。$x_2 \leq 10$ 之圖形乃在 $x_2 = 10$ 之直線之下方區域。$2x_1 + 5x_2 \leq 60$ 之圖形在 $2x_1 + 5x_2 = 60$ 之直線的左下方

$x_1 + x_2 \leq 18$，　$3x_1 + x_2 \leq 44$ 類推

（x_1，x_2）許可值爲下圖之陰影部份

(2) 由 $\begin{cases} x_2 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 = 60 \end{cases}$　解得（5，10）

$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 60 \\ x_1 + x_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 10 \\ x_2 = 8 \end{matrix}$　（10，8）

同理，得　（13，5）　（0，10）　$\left(14\frac{2}{3}, 0\right)$　各點

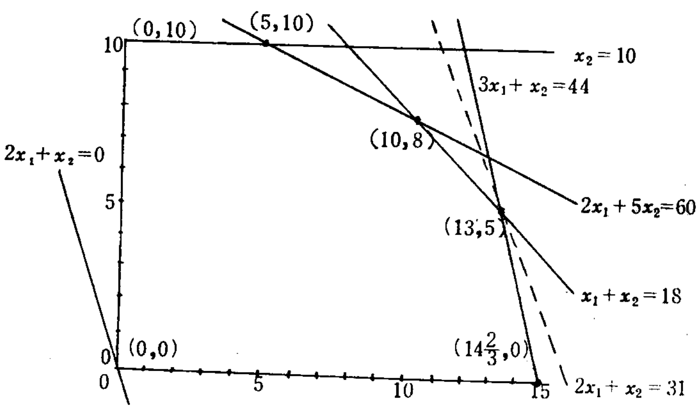
(3) 作 $Z = 2x_1 + x_2 = 0$ 之直線，由圖知欲使 $Z = 2x_1 + x_2$ 目標函數之最大值必經過（13，5）而與 $2x_1 + x_2 = 0$ 平行之直線

$$2x_1 + x_2 = 31$$

$$\left(\begin{matrix} 2 \cdot 13 + 5 = 31 \text{ 即以} \\ (13,5) \text{ 代入 } Z = 2x_1 + x_2 \end{matrix}\right)$$

即最佳解爲

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad Z = 31$$



5. 用2.1節中的圖解法解

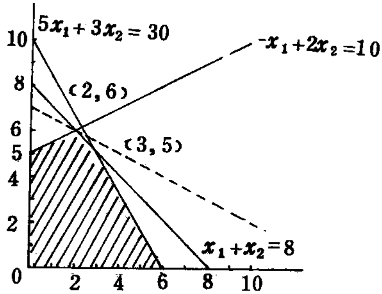
$Z=10x_1+20x_2$ 的極大值，

受制於

$$-x_1+2x_2\leq 10$$
$$x_1+\quad x_2\leq 8$$
$$5x_1+3x_2\leq 30$$

及 $x_1\geq 0$，$x_2\geq 0$

解：



可行解在上圖陰影曲域內，知過（2，6）的 $Z=10x_1+20x_2=140$ 爲最大解。

6. 考慮如下問題

使 $Z=2x_1+3x_2$ 極大，

受制於

$$x_1+2x_2\leq 10\text{（資源一）}$$
$$3x_1+\quad x_2\leq 15\text{（資源二）}$$
$$x_2\quad\quad 4\text{（資源三）}$$

及 $x_1\geq 0$，$x_2\geq 0$

(a) 以圖解法解此問題。

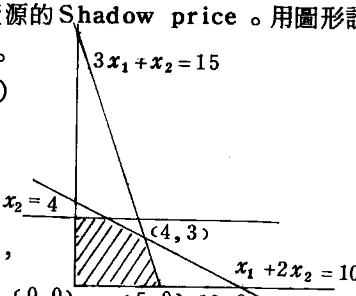
(b) 以簡算法解之。

(c) 由簡算法的最後一個表，求出此三資源的Shadow price。用圖形說明此三個Shadow price是正確的。

解：(a) 由圖可知（x_1，x_2）=（4，3）時，有最佳解

此時 $Z=2\times 4+3\times 3=17$

最大。



(b) 加入Slack variable x_3，x_4，x_5 使限制變爲：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 15 \\ x_2 + x_5 = 4 \end{cases}$$

求 $Z = 2x_1 + 3x_2$ 之極大

立起首簡算表並解之：

Iter	*BV*	*Eq#*	*Z*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	*RHS*
0	Z	0	1	−2	−3	0	0	0	0
	x_3	1	0	1	2	1	0	0	10
	x_4	2	0	3	1	0	1	0	15
	x_5	3	0	0	1	0	0	1	4
1	Z	0	1	−2	0	0	0	3	12
	x_3	1	0	1	0	1	0	−2	2
	x_4	2	0	3	0	0	1	−1	11
	x_2	3	0	0	1	0	0	1	4
2	Z	0	1	0	0	2	0	−	16
	x_1	1	0	1	0	1	0	−2	2
	x_4	2	0	0	0	−3	1	5	5
	x_2	3	0	0	1	0	0	1	4
3	Z	0	1	0	0	7/5	1/5	0	17
	x_1	1	0	1	0	−1/5	2/5	0	4
	x_5	2	0	0	0	−3/5	1/5	1	1
	x_2	3	0	0	1	3/5	−1/5	0	3

∴　最佳解時　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$　，　$Z = 17$

(c)　由最後的表知：

資源一的Shadow price $= \dfrac{7}{5}$

資源二的Shadow price $= \dfrac{1}{5}$

資源三的Shadow price $= 0$

7. 第2.3節所論之直線規劃術四假定，適合第2.4節所述下列二例之程度各如何？試就每一假定每一例各寫一段分析。

(a) 地域計畫（南方農社聯盟）。

(b) 空氣污染管制（諾利公司）。

解： 直線規劃術四假定爲比例性，可加性，可割性，以及確然性。

(a) 就地域計劃（南方農社聯盟）來說．

1. 若培植農作物沒有設置成本 (*Set-up cost*) 則適合比例性（*Proportionality*）。
2. 只要農作物不相互影響，則適合可加性（*Additivity*）。
3. 因爲土地可隨意分割，故適合可割性 (*Divisibility*)。
4. 因爲所有資料能準確地蒐集獲得，故亦適合確然性 (*Deterministic*)。

(b) 就空氣污染管制（諾利公司）來說：

1. 因爲考慮到設置成本（*Set-up cost*）故適合比例性（*Proportionality*）。
2. 因爲各變數之間，沒有交互影響，故亦適合可加性（*Additivity*）。
3. 因爲其方法可用在各部份階層（*fractional Levels*) 故適合可分性（*Divisibility*）。
4. 因爲資料易變幻，難於預測估計，故不適合確然性 (*Deterministic*)，必須用敏感性分析（*Sensitivity Analysis*）。

8. 考慮§5·4 城中學校的消除種族隔閡問題。假定學校當局決定改變目標函數爲使校車費用降至最低。（此時，決策變數仍然是 x_{ij} = 第 i 區學生到第 j 學校的人數。）若學生被派到離家超過一英哩的學校，則給予乘坐校車之機會。（將會有一些學生選擇他種交通工具上學）每輛校車可乘坐40個學生。每車每日費用爲40元加上每個乘坐學生一元。爲能儘量滿載，每車均能越區載學生。

對§2·3 4個線性規劃之假設之每一個均畫一分析圖以說明修正後的目標函數是否滿足這些假設。

解：

假設類形	是否滿足	原　　　　　　因
比 例 性	否	因每車每日有固定費用 40 元，多加一名學生僅多 1 元，非比例增加。
可 加 性	否	因校車可越區載學生，兩區學生合坐一車可省固定成本 40 元。
可 分 性	否	學生數必為整數。
確 然 性	否	每車每日是否必定 40 元？ 每加一學生是否多加 1 元？

9. 考慮下列問題：

$$\text{使}\quad Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \text{ 最大，}$$

受制於

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40$$

及

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

(a) 以代數型簡算法解之。

(b) 以表列型簡算法解之。

解： (a) 代數型簡算法與表列型簡算法在數學上的原理是完全一樣的，只是表列型簡算法不詳細書寫每組方程式，而用簡算表（*simplex tableau*）僅記重要資料，即(1)各變數係數。(2)各方程式右端方程式(3)各方程式基變數。為著實際上計算方便，尤其是徒手解題時，通常用表列型。

(b) 將條件約制式加入差額變數（*slack variables*）x_4，x_5 得

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 40 \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

則起首表如下：

Iter.	BV	Eq#	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
0	Z	0	1	−4	−3	−6	0	0	0
	x_4	1	0	3	1	3*	1	0	30
	x_5	2	0	2	2	3	0	1	40

表中之 * 號表示樞數（*pirot number*）。

經過 §2.8 之推演過程，求得新樞列以及各新列如下表：

Iter.	BV	Eq#	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	Z	0	1	2	−1	0	2	0	60
	x_3	1	0	1	1/3	1	1/3	0	10
	x_5	2	0	−1	1*	0	−1	1	10

重複推演步驟而得下表，因 Z 列內已無負數故由表可得最佳解為

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 6\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 4\cdot 0 + 3\cdot 10 + 6\cdot\frac{20}{3} = 70$$

Iter.	BV	Eq#	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
2	Z	0	1	1	0	0	1	1	70
	x_3	1	0	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$
	x_2	2	0	−1	1	0	−1	1	10

10. 考慮如下題

使 $Z = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3$ 極大，

受制於

$$3x_1 + x_2 + x_3 \le 180 \quad (\text{資源一})$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 \le 30 \quad (\text{資源二})$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \le 60 \quad (\text{資源三})$$

及

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0$$

(a)　以簡算法解之。

(b)　決定此三資源的Shadow price，且描述它們的意義。

解：(a)　加入Slack variable x_4，x_5，x_6 使限制變爲：

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 180$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 30$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 60$$

求　$Z = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3$ 之極大值

立起首簡算表如下：（並解之）

Iter	*BV*	*Eq*#	*Z*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*RHS*
0	*Z*	0	1	-4	2	-2	0	0	0	0
	x_4	1	0	$\boxed{3}$	1	1	1	0	0	180
	x_5	2	0	$\boxed{1}$	-1	2	0	1	0	30
	x_6	3	0	$\boxed{1}$	1	-1	0	0	1	60
1	*Z*	0	1	0	-2	6	0	4	0	120
	x_4	1	0	0	$\boxed{4}$	-5	1	-3	0	90
	x_1	2	0	1	$\boxed{-1}$	2	0	1	0	30
	x_6	3	0	0	$\boxed{2}$	-3	0	-1	1	30
2	*Z*	0	1	0	0	3	0	3	1	150
	x_4	1	0	0	0	1	1	-1	-2	30
	x_1	2	0	1	0	1/2	0	1/2	1/2	45
	x_2	3	0	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$	1/2	15

∴　最佳解時 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$

極大值 $Z = 150$

(b)　資源一的Shadow price 爲 0

資源二的Shadow price 爲 3

資源三的Shadow price 爲 1

各資源的Shadow price所代表之意義如下：

爲增加生產，必需增購各種資源時，每增加一單位資源業主所願意付出的價錢。

11. 考慮下列問題：

使　　$Z = 20x_1 + 25x_2 - 5x_3 + 30x_4$　極大