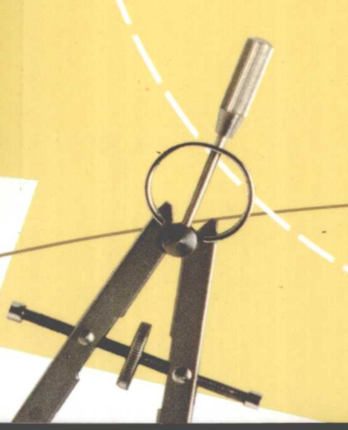
单墫 主编

数学奥林匹克

命题人讲座

图论

任韩 著



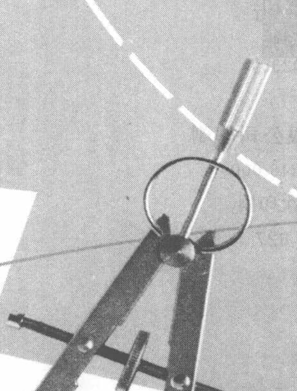
上海科技教育出版社

单墫 主编

数学奥林匹克命题人讲座

图 论

任韩 著



上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

图论/任韩著. —上海:上海科技教育出版社,2009.10
(数学奥林匹克命题人讲座/单墫主编)
ISBN 978-7-5428-4882-6

Ⅰ. 图… Ⅱ. 任… Ⅲ. 图论—高中—教学参考资料
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 132211 号

责任编辑:卢 源
封面设计:童郁喜

* 数学奥林匹克命题人讲座 *

图 论

单 墫 主编

任 韩 著

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社 出版发行

(上海市冠生园路 393 号 邮政编码 200235)

www.ewen.cc www.sste.com

全国新华书店经销 上海市印刷七厂有限公司印刷

开本 890×1240 1/32 印张 9.5 字数 246 000

2009 年 10 月第 1 版 2009 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5428-4882-6/O·627

定价:22.00 元

丛书序

读书，是天下第一件好事。

书，是老师。他循循善诱，传授许多新鲜知识，使你的眼界与思路大开。

书，是朋友。他与你切磋琢磨，研讨问题，交流心得，使你的见识与能力大增。

书的作用太大了！

这里举一个例子：常庚哲先生的《抽屉原则及其他》（上海教育出版社，1980 年）问世后，很快地，连小学生都知道了什么是抽屉原则。而在此以前，几乎无人知道这一名词。

读书，当然要读好书。

常常有人问我：哪些奥数书好？希望我能推荐几本。

我看过的书不多。最熟悉的是上海的出版社出过的几十本小册子。可惜现在已经成为珍本，很难见到。幸而上海科技教育出版社即将推出一套“数学奥林匹克命题人讲座”丛书，帮我回答了这个问题。

这套丛书的书名与作者初定如下：

陆洪文	《解析几何》
施咸亮	《代数函数与多项式》
熊　斌	《函数迭代与函数方程》
陈　计　季潮丞	《代数不等式》
曹　纲　叶中豪	《重心坐标与平面几何》
冯志刚	《初等数论》
单　墫	《集合与对应》《数列与数学归纳法》
刘培杰　张永芹	《组合问题》

任　韩　　　　《图论》
田廷彦　　　　《组合几何》
唐立华　　　　《向量与立体几何》
邵嘉林　　　　《复数·三角函数》

显然，作者队伍非常之强。老辈如陆洪文先生、施咸亮先生都是博士生导师。他们不仅在代数数论、函数逼近等领域的研究上取得了卓越的成绩，而且十分关心数学竞赛。中年如陈计先生于不等式，叶中豪先生于平面几何，都是国内公认的首屈一指的专家。其他各位也都是当下国内数学奥林匹克的领军人物。如熊斌、冯志刚是 2008 年 IMO 中国国家队的正副领队，中国数学奥林匹克委员会委员。他们为我国数学奥林匹克做出了重大的贡献，培养了很多的人才。2008 年 9 月 14 日，“国际数学奥林匹克研究中心”在华东师范大学挂牌成立，担任奥数研究中心主任的正是多届 IMO 中国国家队领队、华东师范大学数学系副教授熊斌。又如邵嘉林先生，他指导过的张成同学获得了第 49 届 IMO 的金牌。

这些作者有一个共同的特点：他们都为数学竞赛命过题。

如：

设数 a 具有以下性质：对于任意四个实数 x_1, x_2, x_3, x_4，总可以取整数 k_1, k_2, k_3, k_4，使得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}((x_i-k_i)-(x_j-k_j))^2\leqslant a,$$

求这样的 a 的最小值。

这是施咸亮先生供给我国国家集训队选拔的试题。

又如：

设 $S=\{1,2,\cdots,2005\}$。若 S 中任意 n 个两两互素的数组成的集合中都至少有一个素数，试求 n 的最小值。

这是唐立华先生供给西部数学奥林匹克的试题。

叶、熊、冯等几位先生供给竞赛的题举不胜举，这里就不罗列了。

命题人讲座，是田廷彦先生的创意。

命题人写书，富于原创性。有许多新的构想、新的问题、新的解法、新的探讨。**新**，是这套丛书的一大亮点。读者一定会从这套丛书中学到很多新的知识，产生很多新的想法。

新，会不会造成深、难呢？

这套书当然会有一定的深度，一定的难度。但作者是命题人，充分了解问题的背景(如刘培杰先生就曾专门研究过一些问题的背景)，写来能够深入浅出，"百炼钢化为绕指柔"。另一方面，倘若一本书十分浮浅，一点难度没有，那也就失去了阅读的价值。

读书，难免遇到困难。遇到困难，不能放弃。要顶得住，坚持下去，锲而不舍。这样，你不但读懂了一本好书，而且也学会了读书，享受到读书的乐趣。

书的作者，当然要努力将书写好。但任何事情都难以做到完美无缺。经典著作尚且偶有疏漏，富于原创的书更难免有考虑不足的地方。从某种意义上说，这种不足毋宁说是一种优点：它给读者留下了思考、想象、驰骋的空间。

如果你在阅读中，能够想到一些新的问题或新的解法，能够发现书中的不足或改进书中的结果，那就是古人所说的"读书得间"，值得祝贺！

我们欢迎各位读者对这套丛书提出建议与批评。

感谢上海科技教育出版社，特别是编辑卢源先生，策划组织编写了这套书。卢编辑认真把关，使书中的错误减至最少，又在书中设置了一些栏目，使这套书增色很多。

单　墫

2008 年 10 月

目 录

第一讲 图的基本概念

怎样布线才能使得每一部电话都互相连通，并且花费最小？在城市交通系统中，两个城市之间的最短路线是什么？一个计算机芯片需要多少层才能使得同一层的线路互不相交？怎样安排一个体育联盟季度赛的日程表，使得其在最少的周数内完成？我们能用四种颜色来为每张地图的各个区域涂色，并且使得相邻区域具有不同的颜色吗？这些问题以及其他的一些实际问题都涉及图论——一门与现代科学技术相互渗透的崭新而迅速发展的数学分支. 尤其是在现在，几乎所有的科学研究领域内都可以见到图论的踪迹. 不难想象，一个不了解图论的人在现代科技领域内几乎是寸步难行的.

知识桥

一、图的定义、简单图、重图、环、子图和支撑子图

一个图 G 是一个二元组 (V,E)，其中 V 和 E 是两个不相交的集合，V 称为节点的集合，E 称为边的集合（如图 1-1）. 如果 $V=\{v_1, v_2,\cdots,v_p\}$，那么无序对 $e=\{v_i,v_j\}$ 就记为 v_iv_j（或 $e=(v_i,v_j)$）. 以后我们说节点 $v\in G$ 就意味着 $v\in V(G)$. 类似地，说边 $e\in G$ 时，就指 $e\in E(G)$. 如果图 G 中任意两个节点（可以是相同节点）之间最多有一条边联结它们，则称 G 为一个**简单图**，否则，称 G 为一个**重图**. 一对节点之

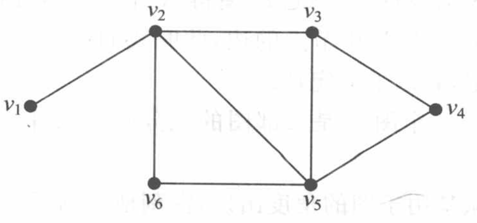


图 1-1

间边的数目称为边的重数. 关联于同一节点的一条边称为**环**. 不难看出,任何一个重图里面都含有一个边数与节点数最多的简单子图,且大多数图只反映对象之间的二元关系,所以图论的重点研究对象是简单图.

如果对图 $G=(V,E)$ 与 $G'=(V',E')$,有 $V'\subseteq V$,$E'\subseteq E$,即图 G' 的顶点都是图 G 的顶点,图 G' 的边也都是图 G 的边,则称 G' 是 G 的**子图**. 例如图 1-2 中的 G_1,G_2 都是 G 的子图. 如果 $V'=V$,则称 G' 是 G 的**支撑子图**. 图 1-2 中的 G_2 是 G 的支撑子图,而 G_1 则不是. 其实 G_2 是 G 的一个支撑树.

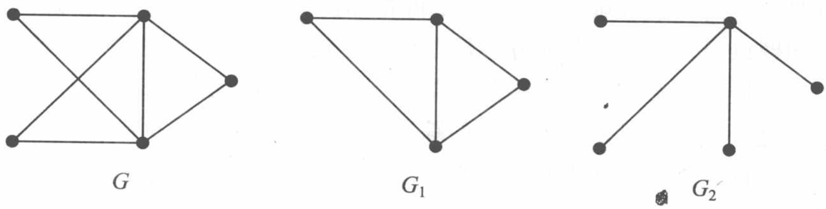


图 1-2

二、完全图、迹、路、圈、二部图、平面图和欧拉图

由 n 个节点组成节点集合,任何两个节点间有一条边相连,所成的图称为 n 个节点组成的**完全图**,记为 K_n. 如果图 G 中的某些节点和边组成的交错序列$(v_1,e_1,v_2,e_2,\cdots,v_k,e_k,v_{k+1})$,使得 $e_i=v_iv_{i+1}(i=1,2,\cdots,k)$,则称之为 G 中联结 v_i 与 v_{i+1} 的一条**迹**,简称为(v_1-v_{k+1})迹,v_1 与 v_{k+1} 是其端点. 有时我们将其记为 $v_1v_2\cdots v_{k+1}$. 如果一个迹中没有节点相同,则称其为**路**,其中的边数称为其长. 一条路中的两个端点粘合在一起时形成一个**圈**. 如果一个圈的长为 k,则称其为 k-**圈**. 如果一个图 G 的节点集合 $V(G)=X\cup Y$,使得 $X\cap Y=\varnothing$,且边集合$E(G)$ 中的元素均是联结 X 与 Y 中节点的边,此时我们称 G 是一个**二部图**. 关于二部图的判定,有以下的定理.

定理 1-1 一个图 G 是二部图的充分必要条件是 G 中没有奇长的圈.

这个结果从禁用子图的角度出发,深刻地刻画了二部图的特点. 以后我们还要在适当的时候提供更多的有效方法来研究二部图.

二部图理论在图的实际应用中有着重要地位. 如果$|X|=m$, $|Y|=n$,且X中的每一个节点与Y中的每一个节点相关联,我们称其为完全二部图$K_{m,n}$. 历史上最为著名的二部图是$K_{3,3}$,其重要性在于它基本上可以刻画所有图的平面性质. 如果一个图G可以画在平面上,使得边与边仅仅在节点处相交,我们称其为**平面图**. 图 1-1 和图 1-2 都是平面图. 1930 年波兰数学家库拉托夫斯基(Kuratowski)指出,只要一个图中有$K_{3,3}$的结构,那么它是不可能画在平面上的. 这一个结构从内在结构上反映出了图的拓扑性质,被当今最为著名的拓扑图论学家托马森(C. Thomassen)称为迄今为止最为深刻的图论结果之一. 当一个连通图G中的节点的次均为偶数时,被称为**欧拉图**. 这是为了纪念伟大的瑞士数学家欧拉在解决哥尼斯堡七桥问题时所作出的突出贡献. 他的那篇文章成功地解决了哥尼斯堡七桥问题,同时标明了一门全新的数学分支——拓扑学的诞生.

三、节点的邻域与次,图中节点间的距离,握手定理及其应用

对于图G中的节点x,用$N_G(x)$(或$N(x)$)表示G中所有与x有边相连的节点集合,称之为节点x(在G中)的**邻域**,而$|N(x)|=d(x)$则是x在G中的**次**. 例如,图 1-1 中节点v_3的邻域为$N(v_3)=\{v_2,v_4,v_5\}$,而$d(v_3)=3$. 在简单图中,$d(x)$记录下所有与x发生联系的节点数. 图G中的两个节点x与y之间最短通路的长被称为x与y的**距离**,记为$d_G(x,y)$,而$\max\{d_G(x,y)\}$表示图G的直径$\mathrm{diam}(G)$. 例如,图 1-1 中$d(v_1,v_4)=3$, $\mathrm{diam}(G)=3$. 不难看出,直径越是小的图,其边数越密集. 在与图的节点次有关的结果中,最为初等而有用的结果是下面的定理.

定理 1-2(握手定理) 设图G的边数为$|E(G)|$,则有

$$\sum_{x\in V(G)} d_G(x)=2|E(G)|.$$

推论 1-3 一个图中所有奇次节点的数目是偶数.

这个结果是如此的简洁,人们常常用它来解决数学竞赛中有关奇偶性的问题. 例如,一次聚会中所有握过奇数次手的人员的总数一定是偶数. 下面是握手定理的对偶形式:

定理 1-4(对偶定理) 一个平面图G中所有面边界长度之和为

$2|E(G)|$ （即 $\sum\limits_{f\in F} d(f)=2|E(G)|$）.

四、图的识别与同构

设 G_1 与 G_2 是两个图. 若 $V(G_1)$ 与 $V(G_2)$ 之间存在一一对应关系，使得对于 G_1 中任意一对节点，当且仅当它们在 G_1 中相邻时它们的对应节点在 G_2 中相邻，我们就说 G_1 与 G_2 是**同构**的，记为 $G_1 \cong G_2$. 图 1-3 所示的两个图是同构的. 因为存在一一对应关系：$v_i \leftrightarrow u_i$ $(1\leqslant i\leqslant 6)$，其相邻关系不变. 如 $v_1v_4 \in E(G_1)$，$u_1u_4 \in E(G_2)$；$v_1v_2 \notin E(G_1)$，$u_1u_2 \notin E(G_2)$ 等等.

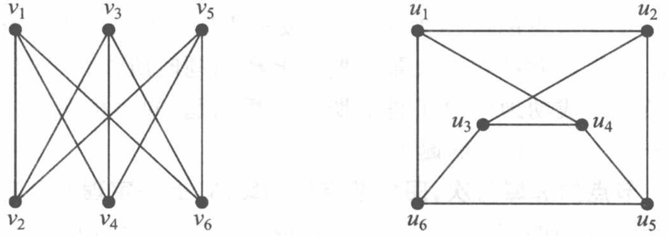


图 1-3

从一般意义上讲，判定两个图是否同构是一个很困难的问题. 在这方面，乌拉姆(Ulam)提出了一个猜想.

重构猜想（乌拉姆，1929） 令 G 是有 p 个节点 v_i，H 是有 p 个节点 u_i $(i=1,2,\cdots,p;p\geqslant 3)$ 的图. 如果对于每个 i $(1\leqslant i\leqslant p)$，

$$G-v_i \cong H-u_i,$$

则 $G\cong H$.

迄今为止，这个猜想既未被否定，也未被完全证明. 它是图论中尚未解决的著名难题之一. 关于这个猜想的进展，可以参见哈拉里(F. Harary)、邦迪(J. Bondy)和纳什-威廉森(Nash-Williamson)等人的文献.

注意：本书中，除非特别说明，我们所说的图都是指有限简单图.

训练营

例 1 在一个由 n 个人组成的集合中，每 4 个人组成的子集内就有一个人认识其余的 3 个人. 证明：该集合中有一个人认识其余的所有

人(规定若 A 认识 B,则 B 也认识 A).

证明 若 A 和 B 不认识,则对于其余任意的 C 和 D,C 与 D 必然相识,因此 C 和 D 当中一定有人认识其余 3 个人. 假定这个人是 C,则对于这 4 人以外的任何一个人 E,我们考虑 4 人组 A,B,C,E,一定有 C 认识 E(否则,A,B,C,E 决定的子图中没有点的次为 3). 由 E 的任意性知,C 认识所有人. 证毕.

例 2 证明:在一个由 $2n$ 个人组成的集合 S 中存在两个人,他们公共朋友的数目为偶数.

证明 建立一个图 $G=(S,E)$ 如下:当且仅当 x 认识 y 时,$x,y\in S$ 有边相连.

假设结论不成立,则对任何节点 $x,y\in S\Rightarrow |N(x)\cap N(y)|\equiv 1 \pmod 2$. 于是 G 中任何两个节点都有公共朋友.

现在考虑 $N(x)$ 中的节点 y 在 $N(x)$ 中的熟人(即 $d_{N(x)}(y)$). 求和后(根据握手定理)有

$$\sum_{y\in N(x)} d_{N(x)}(y)\equiv 0 \pmod 2 \text{ (即 } d(x) \text{ 个奇数之和为偶数)},$$

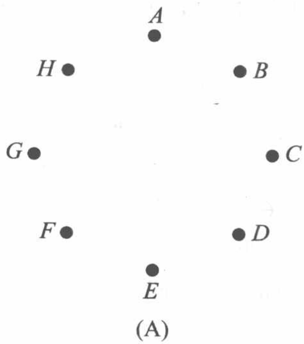
从而 $d(x)\equiv 0 \pmod 2$(即每一个人认识的朋友总数为偶数). 设 $d(x)=2m$.

现在考虑 $y\in N(x)$. 由上面的分析,$d(y)\equiv 0 \pmod 2$,且 $|N(x)\cap N(y)|\equiv 1 \pmod 2$. 令 $X=S-(N(x)\cup\{x\})$,则 $|X|\equiv 1 \pmod 2$. 一方面,任何一个 $N(x)$ 中的节点 y 在 X 中的朋友数目 $d_X(y)$ 必然是偶数,从而边集 $E(X,N(x))$ 中有偶数条边. 另一方面,任意 $y\in X\Rightarrow d_{N(x)}(y)\equiv 1 \pmod 2$,从而 $|X|$ 个奇数之和为奇数(即 $|E(X,N(x))|$),这与 $|E(X,N(x))|\equiv 0 \pmod 2$ 相违. 证毕.

点评 这真是一个令人困惑的题目,如果不用图的邻域概念是很难解答它的.

例 3 （握手问题）亚当斯夫妇参加一个聚会，他们到达时已有 3 对夫妇. 相互握手时，没人和自己的配偶握手，没人和相同的人握手两次，没人和自己握手. 握手结束后，亚当斯先生问每个人（包括他的妻子）握手的次数. 使他吃惊的是，每个人的答案都不一样. 问：亚当斯夫人握手多少次？

解 虽然解决问题并不必须画图，但按以下方式将数据图形化是很有益处的. 在图 1-4(A) 中将 8 个人表示成 8 个点.



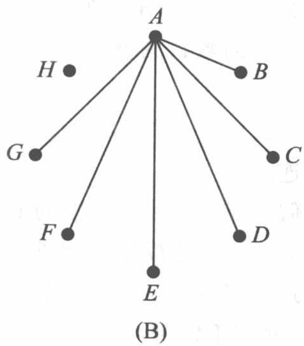


图 1-4

回答亚当斯先生问题的答案一定是数 0,1,2,3,4,5,6. 假如某人，不妨设为 A，已经和 B,C,D,E,F,G 握手 6 次，在图中由 A 向这些点各引一条直线（如图 1-4(B)）. 可以看出，H 一定没有和别人握手. 由于 A 不和自己的配偶握手，进一步可知，A 和 H 一定是夫妇.

按照假设，B,C,D,E,F,G 中有一人握手 5 次，不妨设为 B（若需要可以重新编号）. 不失一般性，可以认为和 B 握手的是 A,C,D,E,F，这表示在图 1-5(A) 中. 由图中可以看出，G 是回答握手次数为 1 的人，而且 B 和 G 是夫妇.

如前进行（若需要可以重新编号 C,D,E），我们假定 C 和 A,B,D,E 握手 4 次（参见图 1-5(B)）. 和前面同样的理由可知，F 和 C 是夫妇，因而 D 和 E 是夫妇. D 和 E 每人握手 3 次，亚当斯先生没有得到两个握手 3 次的答案，因此 D 和 E 一定是亚当斯夫妇. 所以亚当斯夫人握

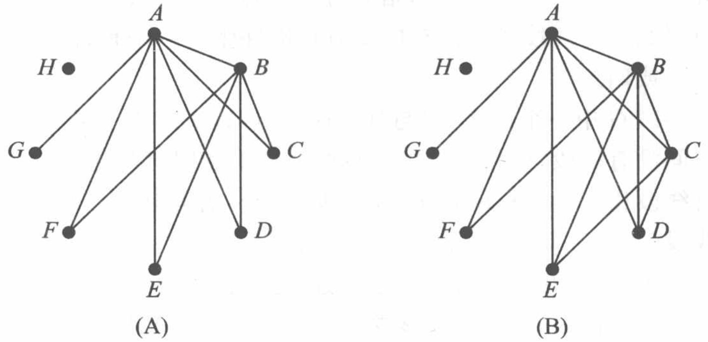


图 1-5

手 3 次.

点评 这道题目是数学竞赛中的一道名题,曾经在美国的普特南数学竞赛中使用过.一般人如果不用图论方法而单凭逻辑推导,几乎很难解出来.这 8 个人中一定有两个人握手的次数相同,可以断定,这是一对夫妇.利用这一特点,人们制造了许多数学竞赛题目.下面就是一道,提供的解答具有普遍性.

例 4 某次聚会共有 17 人,其中每个人都认识另外 4 个人.证明:存在两个人,他们不认识,而且没有共同认识的人.

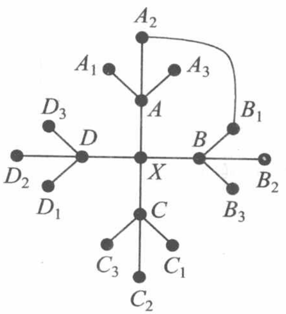
(1992 年第 24 届独联体数学奥林匹克竞赛)

证明 **方法一** 用 17 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{17}$ 表示 17 个人.如果两个人认识,则在相应点之间连一条边,于是得到一个 4-正则图 G.如果两个点之间的距离等于 1 或 2,则称它们是关联的.问题归结为证明 G 中有不关联的点.

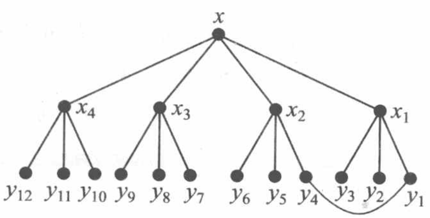
用反证法.设 G 中所有的点都两两关联(即 $\operatorname{diam}(G)=2$,任意两个点都连有线段或张有角).因为 G 中有 34 条边,张角总数为 $17\mathrm{C}_4^2=$

102，并且 $102+34=136=C_{17}^2$，恰好等于两点组的个数. 这表明 G 中任意两点要么连有线段要么没有连线但是恰好张有一个角，故 G 中不存在三角形或四边形.

考察图 G 中一个点 X，它与其他四个点 A,B,C,D 连有线段. 于是它们之间没有线段，而且它们中任意两个点不能同时与除 X 以外的第三点有线段相连. 从 A,B,C,D 出发，除 X 外，各自还与三个不同的点连有线段(如图 1-6(A)所示). 这样一共有 17 个点，分别从 A,B,C,D 引出 4 个 3 点组，并且组内没有边相连. 这时图 G 中还有 $34-16=18$ 条线段(边)，每连一个线段便形成一个含有 X 的 5 点圈(如图 1-6(A)中 XAA_2B_1B)，故含有 X 的 5 点圈有 18 个. 因为 X 是任意的，故每一个点都包含在 18 个 5 点圈内部. 这样图中 5 点圈的个数为 $\frac{1}{5}\times17\times18$ 个，但是它不是整数，矛盾！故必然存在两点是不关联的，也就是存在两个人，他们不认识，且没有共同认识的人.



(A)



(B)

图 1-6

方法二 我们从图论的角度出发给出另外一个解答. 用 17 个节点 $x_1,x_2,\cdots,x_{17}$ 表示这 17 个人. 若两个人认识，就在他们之间连一条边，于是得到一个 4 -正则图 G. 我们要证明：

存在两个节点 x_i,x_j，使得 $x_ix_j\notin E(G)$，$N(x_i)\cap N(x_j)=\varnothing$.

用反证法. 假设结论不成立，则对于任意节点 $x\in V(G)\Rightarrow$任意节点 $y\in V(G)\setminus\{x\cup N(x)\}$，都有 $z\in N(x)$，使得 $yz\in E(G)$. 这表明：$N(x)\cup\{x\}$以外的 12 个节点至少要向 $N(x)$ 引 12 条边. 由反证假设

和鸽笼原理，$N(x)$中每个节点都要与$N(x)\cup\{x\}$以外的3个节点有边相连.由于节点x的任意性，G中没有长为3或4的圈.令

$$N(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\ N(x_1)=\{x\}\cup\{y_1,y_2,y_3\},$$
$$N(x_2)=\{x\}\cup\{y_4,y_5,y_6\},\ N(x_3)=\{x\}\cup\{y_7,y_8,y_9\},$$
$$N(x_4)=\{x\}\cup\{y_{10},y_{11},y_{12}\}.$$

由于G中无长为3或4的圈，上述5个集合都是独立集(即它们所导出的子图是空图).不妨设$y_1y_4\in E(G)$，则$y_2y_5\notin E(G)$，且$N(y_2)\cap N(y_5)=\varnothing$(否则，$G$中有4-圈，如图1-6(B)所示).与假设相违！

例5 国际乒乓球男女混合双打大奖赛有24对选手参加，赛前一些选手握了手，但同一对选手之间不握手.赛后某个男选手问每个选手的握手次数，各人的回答各不相同.问：这名男选手的女搭档和多少人握了手？

解 48名选手用48个顶点$v,v_0,v_1,\cdots,v_{46}$表示，其中v代表那名男选手.两人握过手就在他们相应的顶点之间连一条边，得图G.在G中，$d(v_i)\leqslant 46$，$i=0,1,2,\cdots,46$.并且当$i\neq j$时，$d(v_i)\neq d(v_j)$.所以除顶点v外，其他顶点的度分别为

$$0,1,2,\cdots,46.$$

不妨设$d(v_i)=i$，$i=0,1,2,\cdots,46$.对顶点v_{46}来说，它只和顶点v_0不相邻，故v_{46}和v_0是搭档.在G中去掉顶点v_0，v_{46}及与它们相邻的边，得图G_1.在G_1中除v外，各顶点的度仍然不同，且都减小1.同样道理，v_{45}和v_1是搭档.依次可得v_{44}和v_2，v_{43}和v_3……v_{24}和v_{22}是搭档，于是v_{23}和v是搭档，所以那名男选手的女搭档握了23次手.

点评 本题中的24改为34，“男女搭档”改为“正副领队”，便是第26届国际数学奥林匹克竞赛预选题.将24改为16，“男女搭档”改为“甲、乙两个足球队”，就是1985年全国高中数学联赛第二试第3题.