解几何题的钥匙

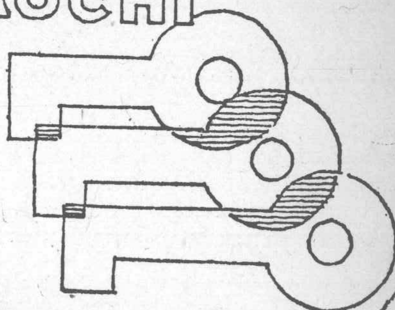
JIEJIHETI DE YAOCHI

赵惠民 著

中国少年儿童出版社

解几何题的钥匙

JIEJIHETIDE YAOCHI



赵惠民

中国少年儿童出版社

封面设计：王庆生
责任编辑：陈效师

解几何题的钥匙
赵 惠 民
*
中国少年儿童出版社出版　发行
中国青年出版社印刷厂印刷　新华书店经销
*
787×1092　1/32　4印张　70千字
1988年11月北京第1版　1988年11月北京第1次印刷
印数1—22,000册　定价1.20元

内容提要

这是一本全面、系统地介绍几何解题思路和方法的书。

作者告诉你，只要从成千上万的题目中选择出几十个基本图，就可以以不变应万变，获得解决疑难问题的方法。作者还告诉你，如果把千变万化的思路方法总结为十几套归类训练法，就可以作到举一反三，触类旁通，使你的灵活应变能力大为提高。以少克多，以简克繁是贯穿全书的指导思想。

目　次

几何是怎样入门的

几何是研究图形性质的学科。研究图形的性质，既不能单凭观察，也不能光靠度量。那么靠什么呢？靠判断、推理。要做到这一点，首先，要学好概念，这样才能了解题目的具体内容；其次，要学好公理、定理，这是判断、推理的依据。所有这些，既是学好几何的准备，又是几何入门的开始。

几何是研究什么的

几何是研究图形性质的学科。在平面几何中重点研究的对象是三角形、四边形和圆。

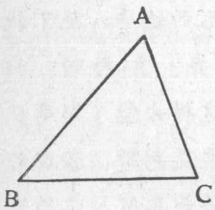


图 1

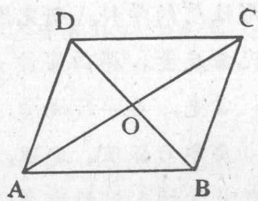


图 2

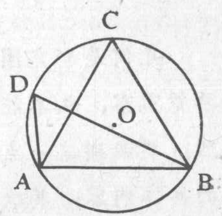


图 3

比如图1中已知△ABC，用刻度尺量一量每一边的长度，或者用量角器量一量每一个内角的大小，这当然是几何课的内容。但是，几何课主要的内容不是这些，而是研究图形的一般性质。象三角形有三个内角，每一个内角有多少度是不一定的，可是三个内角合起来一定是180°，无论任何人画任何一个三角形都会得出相同的结论。

有了什么条件，必然得到什么结果，这就是规律性的认识。象图1中△ABC，若是给了AB边大于AC边这个条件，就一定能得出AB边所对的∠C，一定大于AC边所对的∠B这个结论。

在图 2 中，已知▱ABCD对角线相交于O，根据平行四边形定义不但能判断AB边等于CD边，而且可以判断△AOB与△COD是能够重合的。这里，既不用度量，也不用把△AOB、△COD剪下来真的重合在一起。这就是凡平行四边形一定有的特点，是它们的共性，是人们研究平行四边形得到的规律性认识。

这些都是图形的性质。

在图 3 中，已知 A、B、C、D 都是⊙O 上的点，可以判断∠ADB一定等于∠ACB。这样判断不是单凭观察就能得到的，因为只凭眼看是看不准的；也不是靠度量，因为即使能量准，也不能得到一般性结论（一个圆有这个性质，也不能对所有圆下结论）。

所以，几何要研究的图形性质，是某一种图形的一般的性质，即凡是这一种图形一定有的性质，包括形状、大小和相互位置关系。

练 习 一

1. 已知$\angle AOB=\alpha$，$\angle AOC=\beta$，且$\alpha>\beta$，用α、β表示$\angle BOC$。

提示：原题是不给图的。由已知条件可知O是这两个角的公共顶点，OA是这两个角的公共边，但是OC的位置并没说明，OC与OB若是分在OA的两旁，就成为图 4 的形状，有$\angle BOC=\angle AOB+\angle AOC=\alpha+\beta$；OC与OB若是同在OA的

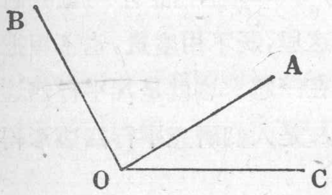


图 4

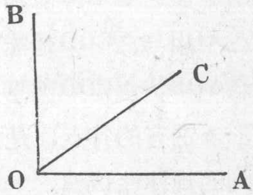


图 5

一旁，如图 5 的形状，就有$\angle BOC=\angle AOB-\angle AOC=\alpha-\beta$。只有这样考虑才算全面，才能反映出满足已知条件的角的一般性质。

2. 画一个四边形ABCD，使AB//CD，并且AD = BC。

提示：题目没有限定四边形的边的长度，只提出AB、CD的位置是平行的，AD、BC的大小是相等的。可能有的读者画出来的是一个平行四边形，有的读者画出来是一个等腰梯形。如果同时画出两种图形，就最好了。学过平行四边形判定的读者知道，一组对边平行，另一组对边相等，是不能判定这个图形是平行四边形的。

不懂概念寸步难行

研究图形性质，既不能单凭观察也不能靠度量，那么靠什么呢？靠判断、推理。

要学判断、推理，首先得学概念。

比如学几何必须先明白什么是直线，然后才能分清两直线相交还是不相交，接下去才懂什么叫平行线、什么叫平行四边形。这样研究平行四边形的性质才有了起点。

象直线、平行线、平行四边形这些是名称，相交、平行这些是术语，都是概念。学习几何必须准确、牢固地掌握概念，才可能动手研究，才可能研究出正确的结论。不懂概念是寸步难行的。

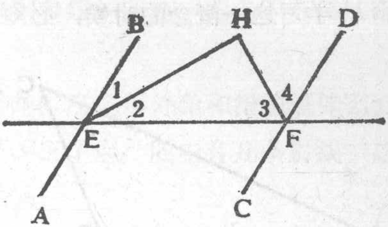


图 6

在图 6 中，已知：AB//CD，直线 EF和AB、CD都相交，交点分别是E、F，∠BEF 的平分线与∠EFD 的平分线相交于 H，求证：EH⊥FH。

这样一个题目，包含多少概念呢？AB、CD 是平行线，EF是直线，它们相交构成角，而且∠BEF与∠EFD是同旁内角（懂得三线八角中，用两条直线分内、外，第三条直线分两旁，才能迅速、准确地找到内错角、同旁内角），平行线的同旁内角是互补的，由角平分线的定义得到∠1=∠2，∠3=∠4，然后推出∠2、∠3是互余的。由三角形内角和180°算出∠H=90°，再根据两条直线互相垂直的概念，判断EH⊥FH。

这当中平行线、直线、角、同旁内角、角平分线、三角形、内角都是名称；而相交、互补、互余、互相垂直是术语。

这个问题的解决共计用了十一个概念。无论哪一个概念不明确，都将导致错误。

再如三角形的高是一个重要概念，不能一般对待，要格外认真地学。大家知道：

三角形一个顶点到它的对边所在直线的垂线段叫做三角形的高。

学习这一概念的时候，必须一字一句对照图形认真研究。如图7，在△ABC中∠ABC是钝角，现在我们想从A点向它的对边画垂线，或者说想画出BC边上的高。这时，A是"三角形一个顶点"，而"它的对边"是BC线段，"它的对边所在直线"是BC直线。既然是直线，那么BC可以向两方无限延伸。引垂线就要自直线BC外一点A用基本作图的方法（或用三角板推）画出垂线AD来。A点到垂足D之间的线段（即线段AD），才是要作的高。

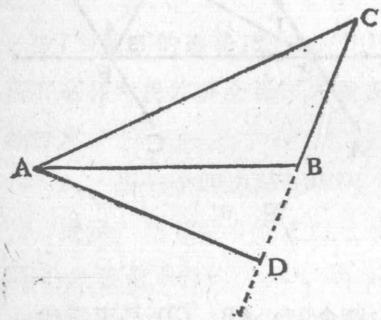


图 7

这道题能否作正确，就看你对三角形的高的概念是否清楚。具体地说，这里用到了三角形、顶点、对边、所在直线、互相垂直、直角、垂线、垂线段等概念。

我们经常用概念指导画图或作图，用概念指导计算，用概念指导推理。所以说，只有掌握好概念，才能形成正确的思路。

练 习 二

回答下列问题：

1. 什么叫钝角？

2. 什么叫垂线？

3. 两点间的距离、点到直线的距离、两条平行线的距离各是什么意思？

4. 什么叫三角形的外角？三角形外角和指的是什么？

5. 一条直线上有A、B、C三个点，图中有几条射线？这个题目和射线概念有什么关系？

6. 什么叫命题、逆命题、公理、定义、定理？

7. 什么叫多边形的对角线？

8. 两个角既互余、又相等，这两个角各是多少度？既互补、又相等呢？

9. 一个角是它余角的5倍，求这个角的补角是多少度？

10. 画出钝角三角形的三条高。

怎样记概念学概念

一开始学几何，就遇到了许多概念，光是前两节，大约就有60个名称、术语。初学的同学一下子把这么多的概念都记住是有困难的。怎么办？请你把最重要又常用的概念记

牢，比如，射线、线段，特别是角的概念，包括各种单称、并称、互称的角都必须学会；对于其他概念可以先读读，做作业用到哪个概念就读哪个概念，逐渐对这些概念就会熟悉了；个别概念暂时用不着，只要知道就行了，比如面、体等概念，以后用到的时候再认真学。分散难点，集中精力，为的是把重要概念学好。

到底怎样才能把几何概念学好呢？

首先，我们应该把概念多念几遍，直到念顺了嘴为止。一个新概念，说都说不利落，怎么能理解、运用呢？比如，点到直线的距离的定义是：“从直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做点到直线的距离。”只有反复念几遍以后，才能在全面了解这个概念的基础上，抓住“垂线段”、“长度”这个要点。

其次，我们应该结合图形，理解记忆。几何是研究图形性质的学科，几何概念应该结合图形去理解记忆。比如图 8 中任意四边形ABCD内有一点P，问P点到各边的距离是多少厘米，要求用刻度尺去量，精确到0.1cm。

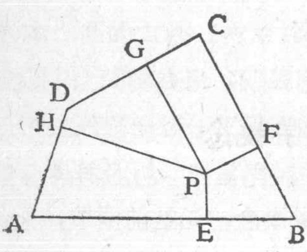


图 8

根据点到直线的距离这个概念，应当先画出P点到AB的垂线PE，这里垂足为E，所以垂线段PE的长就是 P 点到 AB 的距离。同样，可以画出 P 点到BC的垂线段 PF，P 点到

DC的垂线段PG，P点到AD的垂线段PH，再用刻度尺去量就可以了。这样边想概念边画图，就能懂得快、记得牢。

再就是运用概念解题。无论几何证明题、几何计算题、几何作图题，都离不开几何概念。学过等腰三角形性质以后，有这样一道证明题：求证“等腰三角形底边中点到两腰的距离相等”。

在图 9 中，已知AB = AC，D是BC中点。有的同学说，因为 DB = DC，所以 D 到两腰距离相等。这就是错把D 到B、C 点的距离，当作D到AB、AC 的距离了。应该首先看清题目，是“底边中点”即D点，到“两腰”即AB、AC的“距离”，是指点到直线的距离，不是点到点的距离。然后复习点到直线的距离的概念，画出D到 AB、AC 的垂线段。这样，运用概念解决了问题。

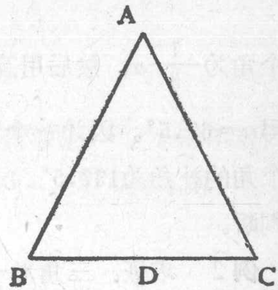


图 9

值得一提的是，有些概念应该格外注意。例如，平角是用射线绕端点旋转，始边终边成一直线定义的，而不是用180°角定义的；钝角概念的理解、叙述都要完整；互余、互补概念不要混淆……

下面看两个例题。

例 1 一个角是它的余角的$\frac{1}{3}$，求这个角的补角。

分析：设这个角为α，则它的余角为$90^\circ-\alpha$，它的补角为$180^\circ-\alpha$。这就是用互余、互补的概念来表示这些角。再根据另外的大小关系列方程，即 $\alpha=\frac{1}{3}(90^\circ-\alpha)$，可得$\alpha=22.5^\circ$，它的补角$180^\circ-\alpha=157.5^\circ$。

若是用$\frac{1}{3}$的关系设未知数，即设这个角的余角为α，则这个角为$\frac{1}{3}\alpha$，然后用互余概念列方程$\alpha+\frac{1}{3}\alpha=90^\circ$，可得$\alpha=67.5^\circ$。因为一个角的补角比它的余角大$90^\circ$，所以这个角的补角为$157.5^\circ$。这又是根据互余、互补的概念作出的判断。

例 2 求证：三角形一边的两个端点到这边上的中线距离相等。

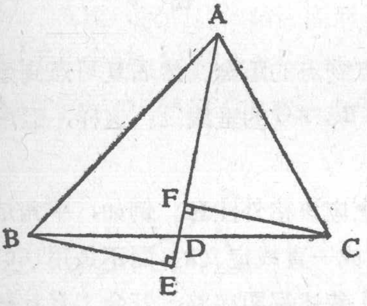


图 10

分析：如图10，这个题涉及的概念中"三角形"、"边"、"端点"，都不难懂，三角形的"中线"，就需要明确是"连结三角形一个顶点和它的对边中点的线段"；尤其值得注意的是这个"距离"，是点到直线的距离，所以要从B点和C点分别向AD及其延长线引垂线段。

在平面几何中，有三种不同的"距离"概念：两点的距

离；点到直线的距离；两条平行线之间的距离。只有把它们归在一起，对比着念，才能分得清，记得住。

概念清楚，证明就容易了。这个题只要用“角角边”证$\triangle BDE \cong \triangle CDF$，就可以得到$BE = CF$了。

练习三

想一想，下列各题错在哪里。

1. 在图11中，已知$AD//BC$，就说$\angle 1 = \angle 2$对不对？在图12中，已知$AB//CD$，就说$\angle DEG = \angle BFH$对不对？

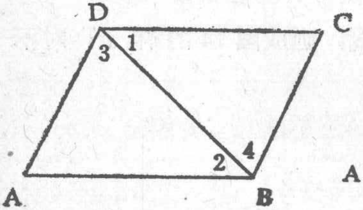


图 11

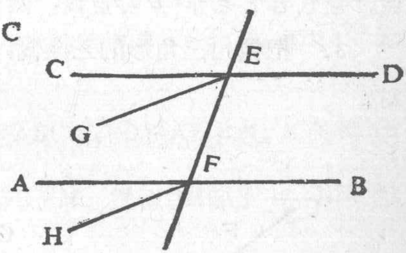


图 12

提示：应着重研究三线八角中内错角与同位角概念。在图11中，两条平行线AD、BC被DB所截，内错角$\angle 3 = \angle 4$是正确的，$\angle 1$、$\angle 2$与这一组三线八角无关。若说$\angle 1$、$\angle 2$也是内错角，那指的是两条直线AB、CD被DB所截，但是AB、CD是否平行还不知道，所以不能说$\angle 1 = \angle 2$。在图12中，两条平行线AB、CD被EF所截有四组同位角，其中没有$\angle DEC$