

國學基本叢書

數理精蘊

(下)

清聖祖敕編

商務印書館發行

書叢本基學國

蘊 精 理 數

(下)

編敕祖聖清

行發館書印務商

中華民國二十五年七月初版

(55193)

國學基礎
本叢書數理精蘊三冊

每部實售國幣壹元叁角

外埠酌加運費匯費

敕編者

清聖祖

發行人

王雲五
上海河南路

印刷所

商務印書館
上海河南路

發行所

商務印書館
上海及各埠

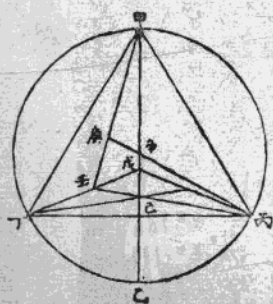
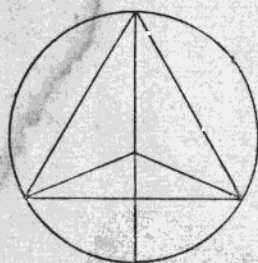
數理精蘊下編卷二十八

體部六

球內容各等面體

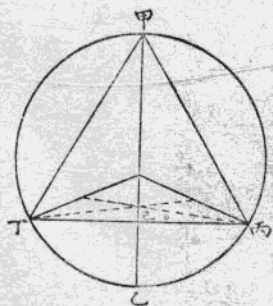
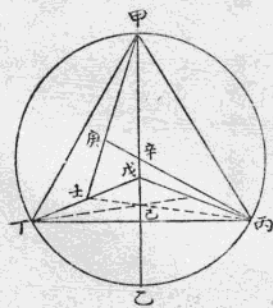
設如圓球徑一尺二寸求內容四面體之每一邊及體積幾何

法以圓球徑一尺二寸三歸二因得八寸爲圓球內容四面體自尖至每面中心之立垂線自乘得六十四寸二歸三因得九十六寸開平方得九寸七分九釐七豪九絲五忽八微有餘卽圓球內容四面體之每一邊也乃以四面體之每一邊用等邊三角形求面積法求得每一面積四十一寸五十六分九十二釐一十九豪有餘與自尖至每面中心之立垂線八寸相乘得三百三十二寸五百五十三分七百五十釐有餘歸之得一百一十八百五十一分二百一十釐有餘卽圓球內容四面體之積也如圖甲乙圓球徑一尺二寸內容甲丙丁戊四面體甲己與丙庚俱爲自尖至每面中心之立垂線相交於辛爲



四面體之中心亦即圓球之中心。甲辛與丙辛俱爲圓球半徑。甲己壬勾股形與甲庚辛勾股形爲同式形。甲己壬勾股形以甲己自尖至底中心立垂線爲股。己壬一面中垂線之三分之一爲勾。甲壬一面中垂線爲弦。甲庚辛勾股形以甲庚一面中垂線之三分之二爲股。庚辛四面體中心至每面中心之垂線爲勾。甲辛四面體自尖至中心立垂線爲弦。故兩勾股形同用一甲角。面己角庚角同爲直角。其壬角與辛角亦必相等。所以爲同式形也。己壬爲丙壬一面中垂線之三分之一。亦爲甲壬一面中垂線之三分之一。故庚辛亦必爲甲辛四面體自尖至中心立垂線之三分之一。而甲辛即圓球之半徑。故庚辛亦爲圓球半徑之三分之一。庚辛與辛己等。今命甲辛圓球半徑爲三分則甲乙圓球全徑爲六分。以辛己一分與甲辛三分相加則得甲己四分。是甲己立垂線爲甲乙圓球全徑之六分之四。即三分之二。故以甲乙圓球徑三歸二因。即得甲己爲四面體自尖至每面中心之立垂線也。又四面體之立垂線自乘方爲每邊自乘方之三分之二。見前四面體求積法。故以甲己立垂線自乘二歸三因。即得每一邊自乘方積開平方得甲丙爲四面體之每一邊也。既得一邊。則用等邊三角形求面積法求得丙丁戊三角形面積。與甲己立垂線相乘三歸之。即得甲丙丁戊四面體之積也。

又求邊捷法以圓球徑一尺二寸自乘



三歸二因得九十六寸。開平方亦得九寸七分九釐七豪九絲五忽八微有餘。爲內容四面體之每一邊也。蓋四面體之甲已立垂線既爲甲乙圓球徑之三分之二。則甲已自乘方必爲甲乙自乘方之九分之四。而甲已自乘方又爲甲丙每邊自乘方之三分之二。即六分之四。則甲丙每一邊自乘方必爲甲乙圓球徑自乘方之九分之六。即三分之二。故圓球徑自乘三歸二因開平方亦得四面體之每一邊也。如有垂線二歸三因即圓球徑。或以一邊自乘二歸三因開平方亦即得圓球徑也。

又用求球內各形之一邊之定率比例。以定率之圓球徑一〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率。圓球內容四面體之一邊八一六四九六五八爲二率。今所設之圓球徑一尺二寸爲三率。求得四率九寸七分九釐七豪九絲五忽八微有餘。即圓球內容四面體之一邊也。

又用求球內各形之體積之定率比例。以定率之圓球徑自乘再乘之正方體積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率。圓球內容四面體積六四一五〇〇二九爲二率。今所設之圓球徑一尺二寸自乘再乘得一千七百二十八寸爲三率。求得四率一百一十寸八

一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	八一六四九六五八
三率	一二
四率	九七九七九五八

一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	六四一五〇〇二九
三率	一七二八
四率	一一〇八五二五〇

百五十一分二百五十釐有餘。即圓球內容四面體之積也。

又用圓球積之定率比例。以定率之圓球積一〇〇〇〇〇〇〇〇。

〇〇爲一率。圓球內容四面體積一二二五。一七五三〇爲二率。

今所設之圓球徑一尺二寸。求得圓球積九百零四寸七百七十八分六百八十四釐有餘。爲三率。求得四率一百一十寸八百五十一分二百四十九釐有餘。即圓球內容四面體之積也。

設如圓球徑一尺二寸。求內容正方體之每一邊及體積幾何。

法以圓球徑一尺二寸。自乘得一百四十四寸三歸之。得四十八寸。開平方得六寸九分二釐八豪二絲。

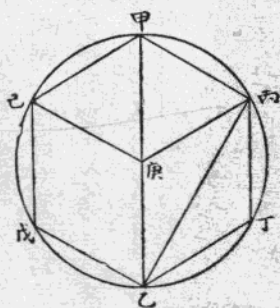
零三微有餘。即圓球內容正方體之每一邊。以一邊自乘再乘得三百三十二寸五百五十三分七百四十四釐有餘。即圓球內容

正方體之積也。如圖甲乙圓球徑一尺二寸。內容甲丙丁乙戊己庚正方體。試以丙丁一邊爲股。丁乙一邊爲勾。求得丙乙弦。即每一面之對角斜線。勾與股既相等。則丙乙每一面對角斜線自乘

爲丙丁或丁乙每邊自乘方之二倍矣。又試以丙乙對角斜線

爲股。甲丙一邊爲勾。求得甲乙弦。即圓球徑。則甲乙圓球徑自乘

方。又爲甲丙類每邊自乘方之三倍矣。故以圓球徑自乘三歸。即得每邊自乘之積。開平方。即得圓球內



一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	一二二五一七五三〇
三率	九〇四七七八六八四
四率	一一〇八五二四九

容正方體之一邊。以一邊自乘再乘。即得圓球內容正方體之積也。如有正方體之一邊。求外切圓球徑。則以一邊自乘。三因之開平方。即得圓球徑也。

又用求球內各形之一邊之定率比例。以定率之圓球徑一〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率。圓球內容正方體之一邊五七七三五〇二六爲二率。今所設之圓球徑一尺二寸爲三率。求得四率六寸九分二釐八豪二絲零三微有餘。即圓球內容正方體之一邊也。又用求球內各形之體積之定率比例。以定率之圓球徑自乘再乘之正方體積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率。圓球內容正方體積一九二四五〇〇八六爲二率。今所設之圓球徑一尺二寸。自乘再乘得一千七百二十八寸爲三率。求得四率三百三十二寸五百五十三分七百四十八釐有餘。即圓球內容正方體之積也。又用圓球積之定率比例。以定率之圓球積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率。圓球內容正方體積三六七五五二五九〇爲二率。今所設之圓球徑一尺二寸。求得圓球積九百零四寸七百七十八分六

一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	一九二四五〇〇八六
三率	一七二八
四率	三三二五五三七四八

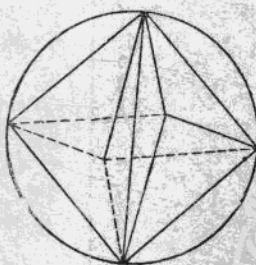
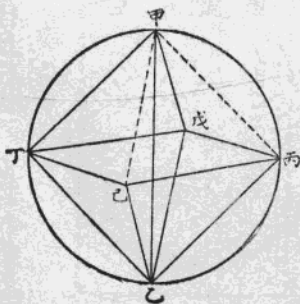
一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	五七七三五〇二六
三率	一二
四率	六九二八二〇三

一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	三六七五五二五九〇
三率	九〇四七七八六八四
四率	三三二五五三七四八

百八十四釐有餘爲三率。求得四率三百三十二寸五百五十三分七百四十八釐有餘。卽圓球內容正方體之積也。

設如圓球徑一尺二寸。求內容八面體之每一邊及體積幾何。

法以圓球徑一尺二寸自乘。得一尺四十四寸。折半得七十二寸。開平方得八寸四分八釐五豪二絲八忽一微有餘。卽圓球內容八面體之每一邊也。乃以八面體之每一邊自乘。得七十二寸。以球徑一尺二寸再乘。得八百六十四寸三歸之。得二百八十八寸。卽圓球內容八面體之積也。如圖甲乙圓球徑一尺二寸。內容甲丙乙丁戊己八面體。自正中對四角平分截之。則成甲丙己丁戊。乙丁戊丙己。二尖方體。甲乙圓球徑爲二尖方體之共高。卽甲丙乙丁正方面之對角斜線。試以甲丙一邊爲股。乙丙一邊爲勾。則甲乙球徑爲弦。勾與股既相等。則甲乙自乘方。爲甲丙自乘方之二倍。故以甲乙球徑自乘折半開方。卽得甲丙爲內容八面體之一邊。以戊丙一邊自乘。得戊丙己丁二尖方體之共底面積。以甲乙共高再乘。三歸之。得二尖方體積。卽八面體之總積也。如有八面體之一邊。求外切圓球徑。則以一邊自乘加倍開平方得對角斜線。卽圓球徑也。



又用求球內各形之一邊之定率比例。以定率之圓球徑一〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率。圓球內容八面體之一邊七〇七一〇六七八爲二率。今所設之圓球徑一尺二寸爲三率。求得四率八寸四分八釐五豪二絲八忽一微有餘。卽圓球內容八面體之一邊也。

又用求球內各形之體積之定率比例。以定率之圓球徑自乘再乘之正方體積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率。圓球內容八面體積

一六六六六六六六六爲二率。今

所設之圓球徑一尺二寸。自乘再

乘得一千七百二十八寸爲三率。

求得四率二百八十八寸。卽圓球

內容八面體之積也。

又用圓球積之定率比例。以定率

之圓球積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率。圓球內容八面體積三一八三〇九八八五爲二率。今所設

之圓球徑一尺二寸。求得圓球積九百零四寸七百七十八分六百八十四釐有餘爲三率。求得四率二

百八十七寸九百九十九分九百九十八釐有餘。卽圓球內容八面體之積也。

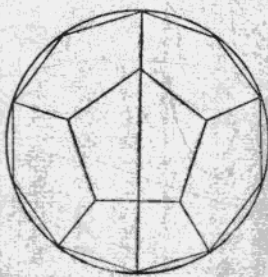
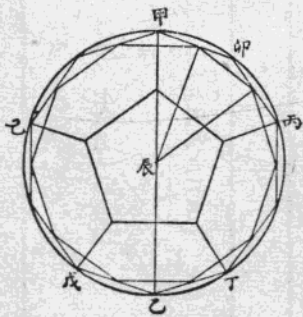
設如圓球徑一尺二寸。求內容十二面體之每一邊及體積幾何。

一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	一六六六六六六六六
三率	一七二八
四率	二八八

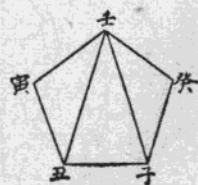
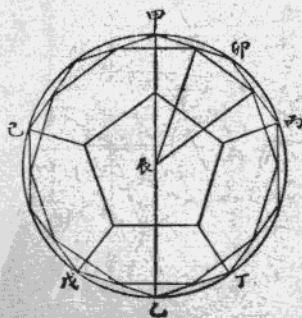
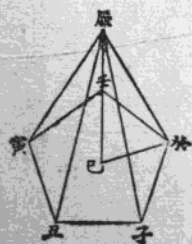
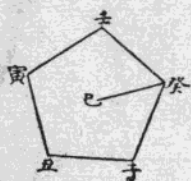
一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	三一八三〇九八八五
三率	九〇四七七八六八四
四率	二八七九九九九八

一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	七〇七一〇六七八
三率	一二
四率	八四八五二八一

法以理分中末線之全分一〇〇〇〇〇〇〇〇爲股。小分三八一九六六〇一爲勾。求得弦一〇七〇四六六二六爲一率。小分三八一九六六〇一爲二率。今所設之圓球徑一尺二寸爲三率。求得四率四寸二分八釐一豪八絲六忽五微有餘。卽圓球內容十二面體之每一邊也。乃以十二面體之每一邊。用五等邊形求面積法。求得每一面積三十一寸五十四分三十八釐五十七豪有餘。又用五等邊形求外切圓徑法。求得半徑卽分角線。三寸六分四釐二豪三絲七忽一微有餘。爲勾。圓球半徑六寸爲弦。求得股四寸七分六釐七豪九絲二忽七微有餘。爲自圓球中心至每一面中心之立垂線。與每一面積三十一寸五十四分三十八釐五十七豪相乘。得一百五十寸三百九十八分八百零七釐有餘。三歸之。得五十寸一百三十二分九百三十五釐。爲一五角尖體積。十二因之。得六百零一寸五百九十五分二百二十釐有餘。卽圓球內容十二面體之總積也。如圖甲乙圓球徑一尺二寸。內容甲丙丁戊己十二面體。自正中平分截之。則成十等邊面形。其所截之處皆正當每邊之一半。故其所截之庚辛等線。亦爲甲丙兩角相對斜線之一半。而爲十等邊形之一邊。試自十二面體之甲卯一邊正中至中心辰。作庚辰垂線。卽爲所截十等邊形外切圓之半徑。與甲庚每邊



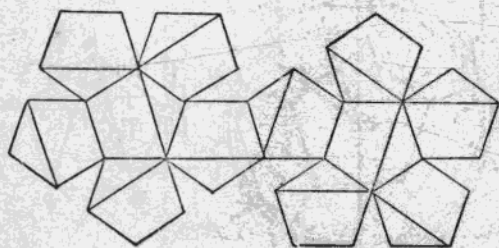
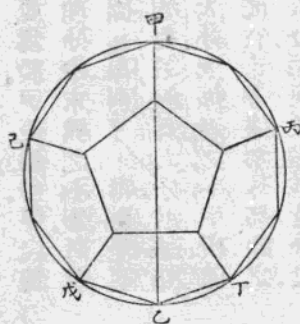
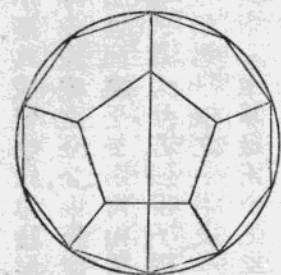
之半甲辰圓球半徑。共成甲庚辰勾股形。庚辰爲股。甲庚爲勾。甲辰爲
 弦。庚辰卽如理分中末線之全分。甲庚卽如理分中末線之小分。何以
 知之。蓋十二面體每面之壬子兩角相對斜線。與甲丙等。爲全分。則
 子丑一邊與甲卯等。爲大分。若以壬子兩角相對斜線爲大分。則子丑
 一邊爲小分。兩角相對斜線之一半庚辛爲大分。則每邊之半甲庚卽
 爲小分矣。又庚辰中心至每邊正中之垂線。既爲十等邊形外切圓之
 半徑。而庚辛爲十等邊形之一邊。則庚辛爲大分。而庚辰必爲全分矣。
 因庚辰全分爲股。甲庚小分爲勾。而甲辰圓球半徑爲弦。故以理分中
 末線之全分爲股。小分爲勾。求得弦與小分之比。同於甲辰半徑與甲
 庚半邊之比。卽同於今所設之甲乙全徑與甲卯全邊之比也。既得一
 邊。則用五等邊形求面積法。求得壬癸子丑寅五等邊形面積。又求得
 己癸五等邊形外切圓半徑。卽分角線。乃以辰癸圓球
 半徑爲弦。與辰甲等。己癸分角線爲勾。求得辰己股。卽
 圓球中心至內容十二面體每面中心之立垂線。與壬
 癸子丑寅五等邊形面積相乘。三歸之。得辰壬癸子丑
 寅一五角尖體積。十二因之。卽得圓球內容十二面體



之總積也。如有十二面體之每一邊，求外切圓球徑，則先求得自中心至每邊正中之垂線爲股，半邊爲勾，求得弦，倍之即圓球全徑也。

又求邊法用求圓球內容正方體之一邊法以圓球徑一尺二寸自乘，得一百四十四寸三歸之，得四十八寸，開平方得六寸九分二釐八豪二絲零三微有餘，爲圓球內容十二面體每一面兩角相對斜線，乃以理分中末線之全分一〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率，大分六一八〇三三九九爲二率，每一面兩角相對斜線六寸九分二釐八豪二絲零三微爲三率，求得四率四寸二分八釐一豪八絲六忽四微有餘，即圓球內容十二面體之每一邊也。如圖甲乙圓球徑一尺二寸，內容甲丙丁戊己十二面體，試於每一面各作一斜線相連，則十二斜線之二十

四端合爲八角，遂成正方體形，其十二面之十二斜線，即正方體之十二邊，其八角即正方體之八角，皆切於



圓球之面。故用求球內容正方體法。求得正方體之一邊。卽十二面體每一面兩角相對之斜線。既得斜線。則以理分中末線之全分與大分之比。卽同於兩角相對之斜線與每一邊之比。而得十二面體之每一邊也。如有十二面體之每一邊求外切圓球徑。則先求得每面兩角相對斜線。爲正方體之一邊。用正方體求外切圓球徑之法。亦卽得圓球徑矣。

又用求球內各形之一邊之定率比例。以定率之圓球徑一〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率。圓球內容十二面體之一邊三五六八二二〇九爲二率。今所設之圓球徑一尺二寸爲三率。求得四率四寸二分八釐一豪八絲六忽五微有餘。卽圓球內容十二面體之一邊也。

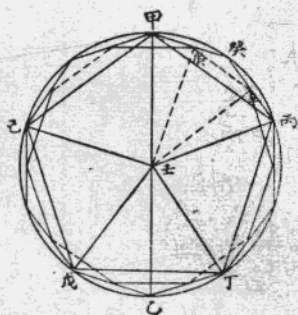
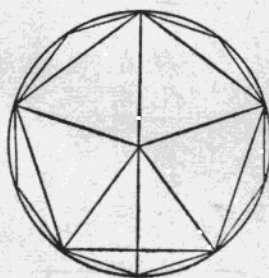
又用求球內各形之體積之定率比例。以定率之圓球徑自乘再乘之正方體積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率。圓球內容十二面體積三四八一四五四八二爲二率。今所設之圓球徑一尺二寸。自乘再乘得一千七百二十八寸爲三率。求得四率六百零一寸五百五十五分三百九十二釐有餘。卽圓球內容十二面體之積也。

又用圓球積之定率比例。以定率之圓球積一〇〇〇〇〇〇〇〇

一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	三五六八二二〇九
三率	一二
四率	四二八一八六五

一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	三四八一四五四八二
三率	一七二八
四率	六〇一五五五三九二

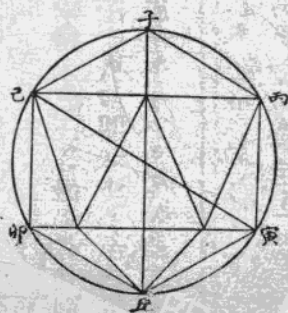
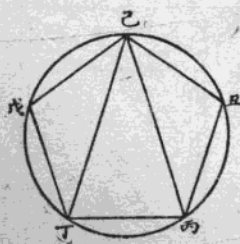
○爲一率圓球內容十二面體積六六四九〇八八九一爲二率今所設之圓球徑一尺二寸求得圓球積九百零四寸七百七十八分六百八十四釐有餘爲三率求得四率六百零一寸五百九十五分三百九十一釐有餘即圓球內容十二面體之積也設如圓球徑一尺二寸求內容二十面體之每一邊及體積幾何法以理分中末線之全分一〇〇〇〇〇〇〇〇爲股大分六一



一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	六六四九〇八八九一
三率	九〇四七七八六八四
四率	六〇一五九五三九一

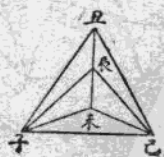
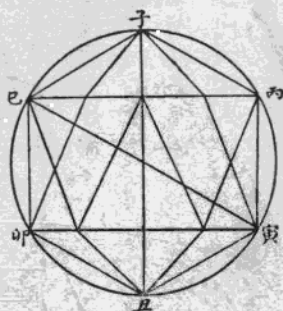
八〇三三九九爲勾求得弦一一七五五七〇五〇爲一率大分六一八〇三三九九爲二率今所設之圓球徑一尺二寸爲三率求得四率六寸三分零八豪七絲七忽三微有餘即圓球內容二十面體之每一邊也乃以二十面體之每一邊用等邊三角形求面積法求得每一面積一十七寸二十三分四十一釐七十豪有餘又用三等邊形求外切圓徑法求得半徑即分角線三寸六分四釐二豪三絲七忽一微有餘爲勾圓球半徑六寸爲弦求得股四寸七分六釐七豪九絲二忽七微有餘爲自圓球中心至每一面中心之立垂線與每一面積一十七寸二十三分四十一釐七十豪有餘相乘得

八十二寸一百七十一分二百六十四釐有餘。三歸之。得二十七寸三百九十分四百二十一釐有餘。爲一三角尖體積。二十因之。得五百四十七寸八百零八分四百二十釐有餘。卽圓球內容二十面體之總積也。如圖甲乙圓球徑一尺二寸。內容甲丙丁戊己二十面體。自正中平分截之。則成十等邊面形。其所截之處。皆正當每邊之一半。故其所截之庚辛等線。亦爲甲丙每邊之一半。而爲十等邊形之一邊。試自二十面體之甲癸一邊正中至中心壬。作庚壬垂線。卽爲所截十等邊形外切圓之半徑。與甲庚每邊之半。甲壬圓球半徑。共成甲庚壬勾股形。庚壬爲股。甲庚爲勾。甲壬爲弦。庚壬卽如理分中末線之全分。甲庚卽如理分中末線之大分。何以知之。蓋庚壬中心至每邊正中之斜線。既爲十等邊形外切圓之半徑。庚辛既爲十等邊形之一邊。則庚辛爲大分。庚壬必爲全分。庚辛爲每邊之半。甲庚亦爲每邊之半。則甲庚亦卽爲大分矣。因庚壬全分爲股。甲庚大分爲勾。甲壬圓球半徑爲弦。故以理分中末線之全分爲股。大分爲勾。求得弦與大分之比。同於甲壬半徑與甲庚半邊之比。卽同於今所設之甲乙圓球全徑與甲癸全邊之比也。又圖子丑圓球內容子丙寅丑卯己二十面體。自丙己二處橫截之。則所截之面成圓內容甲丙丁戊己五等邊面形。試自二十面體之己角至寅角。作己寅全徑線。則成



己丙寅勾股形。己丙爲股。丙寅爲勾。己寅爲弦。以甲丙丁戊己五等邊面形言之。則己丙股爲兩角相對斜線。卽如理分中末線之全分。丙寅勾與丙丁一邊同。卽如理分中末線之大分。今己丙全分既爲股。丙寅大分既爲勾。己寅與子丑同爲圓球徑。既爲弦。故以理分中末線之全分爲股。大分爲勾。求得弦與大分之比。卽同於今所設之子丑全徑與丙寅一邊之比也。既得一邊。則用三等邊形求面積法。求得辰巳午三等邊形面積。又求得未巳三等邊形外切圓半徑。卽分角線。乃以壬巳圓球半徑與甲壬等。爲弦未巳分角線爲勾。求得壬未股。卽圓球中心至內容二十面體每面中心之立垂線。與辰巳午三等邊形面積相乘。三歸之。得壬辰巳午一三角尖體積。二十因之。卽得圓球內容二十面體之積也。如有二十面體之一邊。求外切圓球徑。則先求得自中心至每邊正中之垂線爲股。半邊爲勾。求得弦倍之。卽圓球全徑也。

又用求球內各形之一邊之定率比例。以定率之圓球徑一〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率。圓球內容二十面體之一邊五二五七三一。一爲二率。今所設之圓球徑一尺二寸爲三率。求得四率六寸三分



一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	五二五七三一
三率	一一
四率	六三〇八七七三