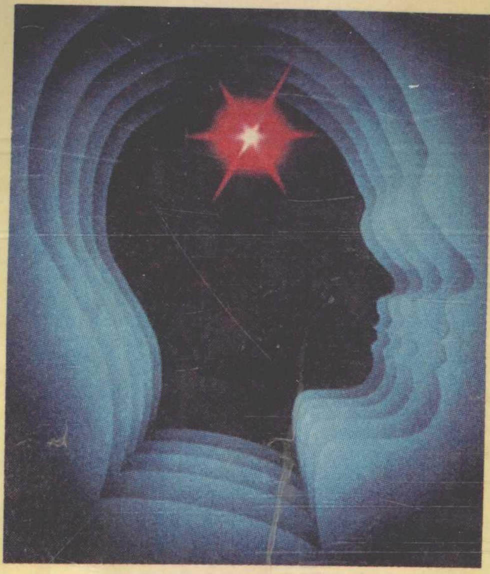
名师启迪丛书



（第二版）（上册）

初中数学学习指要

——献给初中同学

贺信淳　乔家瑞　明知白　孙维刚　著

科学出版社

名师启迪丛书

（第二版）

初中数学学习指要

——献给初中同学

（上册）

贺信淳　明知白
乔家瑞　孙维刚　著

科学出版社

1995

2、20

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

数学是培养学生思维能力的学科，本书的作者们在这一领域里取得了出色的成绩，各有“绝招”．他们从丰富的教学实践出发，按教学大纲控制知识范围，以中等水平学生的实际为主，兼顾较差生的情况和优等生的素质，引导学生深入理解知识，提高解题能力．本书不采用“题海战术”的做法，而是目的鲜明地精选典型例题，加以详细的分析说明，重点启发学生系统掌握基本知识，帮助总结解题规律，力求使学习能收到事半功倍之效．各章分“知识结构”、“学习指导”和“水平测试”三部分．叙述精辟，深入浅出，并各有相应练习题，有足够数量和梯度，有较广的覆盖面．还有一定量的标准化练习题及综合测试题，可以自我测试学习的水平和效果。

名 师 启 迪 丛 书

（第二版）

初中数学学习指要

——献给初中同学

（上册）

贺信淳　明知白
乔家瑞　孙维刚　著

策划编辑　荣毓敏

责任编辑　郝鸣藏

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国华云电子数据中心照排

北京市房山区印刷厂印装

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1989 年 6 月第 一 版　开本：787×1092 1/32

1994 年 1 月第 二 版　印张：10 1/2

1995 年 7 月第八次印刷　字数：237 000

印数：159 487—189 504

ISBN 7-03-003563-1/G・361

定价：6.80 元

作 者 简 介

贺信淳，男，1935年生。1955年毕业于北京师范学院。长期在中学任教。现任北京东城区教学研究科研中心数学教研员，北京市特级教师，北京数学教学研究会理事，东城区理科学会数学分会理事长。60年代以来，多次在《数学通报》等刊物上发表数学论文，著有《中学数学精读》、《代数学习辅导》等书，多次参加教材和教学参考资料的编写工作。

孙维刚，男，1938年生。1961年北京教育学院数学系本科毕业，现在北京22中任教，北京市特级教师，兼任北京市东城区奥林匹克数学学校校长，东城区理科学会理事。在教学中实验“结构教学法”，使学生得到超常发展，效果明显，曾参加《中学数学奥林匹克丛书》的编写工作，发表过多篇教学论文。

乔家瑞，男，1937年生。1961年毕业于北京师范学院数学系。现在北京教育学院崇文分院任教，特级教师，北京数学会辅导组成员，北京数学奥林匹克学校教练，并兼任一些地区和学校的教学顾问及教师进修辅导员。多年从事中学数学教学工作及数学教师进修教学工作，并长期从事中学数学教学的理论研究。曾参加编写《怎样辅导孩子学数学》、《中学生应该怎样学习》、《平面解析几何教案》、《数学基础知识与例题分析》等20余部著作，并发表短篇文章数十篇。

明知白，男，1938年生。1963年毕业于北京大学数学系。在北京女二中任教近20年。现任北京市东城区教学研究科研中心数学教研员，北京市特级教师，兼东城区理科学会数学分会副理事长、秘书长，《中学生数学》杂志编委。先后在《数学通报》、《中等数学》、《数学教师》、《中学生数学》、《中国教育报》等报刊杂志上发表文章100多篇，并编写（或合编）了《高中数学教学八十讲》、《高中数学精要》、《高中代数学习辅导》、《初中数学学习导引》、《初中常用数学方法》、《高中数学试验课本》、《初中数学试验课本》等十几部著作。

序

“师者，所以传道受业解惑也。”韩愈的这句话几乎成了千百年来教师们的座右铭。然而我们民族的后代不但应该掌握“道”与“业”，而且应该善于自己解“惑”，更富有创造性。换句话说，教师应该让自己的学生变得更聪明。目前我们的基础教育在这方面却不能适应未来的需要：过于偏重“业”的灌输了。试看年年层出不穷、屡禁不止、充斥于学校和家庭、压得学生喘不过气来的“难题详解”、“辅导材料”，就可以感到问题的严重了。

名师则不然。他们不但精熟自己执教的学科，更为重要的是，他们善于处理和驾驭学科的内容，激发学生的求知欲、探索欲，启发学生发挥自己的智慧潜能，引导学生综合运用已有的知识和技能去攀登科学的下一个阶梯，不断闯入新的领域，进入新的境界。把首都一些名师的半生心血结晶加以汇集，让更多的学生受惠，从填鸭式教学的苦难中挣脱出来，成为聪明的、善于思索的一代，这就是这套《名师启迪丛书》的编著目的。

名师者，著名之教师也。如今是名人蜂起的时代：名演员、名画家、名厨师、名企业家、名演说家……每天都要出现一大批，只是“名教师”却不大被提及。这是当前教师，特别是中小幼教师的社会地位所决定的，但也跟他们的接触范围较窄、宣传报道不够有关，诚所谓“登高而招，臂非加长也，而见者远”，盖势使之然。既然我们的优秀教师无愧于“名师”之号，我们就应该恭恭敬敬地这样称呼他们。借着这套丛书的出版，为我们

的名师们做点树碑立传的工作，让更多的人知道他们、学习他们，以便今后不断涌现更多的名师，这是编辑这套丛书的一个附带目的。

这套丛书一律以最新教材为依托，即：结合教材的难点和重点培养学生的基本功，训练学生科学的思路，而不是靠补充大量材料取胜。这是为了不无谓地增加学生负担，引导他们重视课内的学习，并在系统的学习中提高；同时，也是为了便于更多的教师甚至家长参考，从中受到启发。

现代科学证明，人的智力的成长从胎儿时期就开始了；幼儿“记事儿”前后思维和语言能力的培养、生活习惯和情趣的形成对人的一生都有着重要的影响。这跟我国古代重视“胎教”和所谓“三岁看大，七岁看老”的谚语不谋而合（但并非否定后天的教育）。为此，我们特请著名的幼教专家撰稿，介绍如何培养教育从0岁到6岁的儿童。与丛书中其它部分不同的是，关于幼儿教育的这六册是要给年轻的爸爸妈妈们以启迪，因为他（她）们是孩子的第一个、也是终其一生的老师。

愿这套丛书能成为中华教育大厦中的一块砖、一代代人才成长之路上的一个石阶，愿它伴着更多的后来者走过人生的关键阶段。

最后，应该感谢科学出版社。一个一向以出版高层次科学著作蜚声海内外的出版社对于提高中小学生的科学文化素质如此关注，社领导、编辑和工人们付出了大量的劳动，使这套丛书得以在短时间内出版，这是值得全社会钦佩和尊敬的。

许嘉璐

1989年

目　录

第一章 实 数

由于实际需要和数学本身发展的需要，人们对数的认识不断地深化．在初中代数中，首先引入负数，从而把数的范围扩充到有理数，继而又引入无理数，从而把数的范围扩充到实数．它们之间的关系如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

在有理数中，主要研究负数、数轴、相反数、绝对值等概念，以及有理数大小的比较和运算法则，其中有理数的运算是代数中一切运算的基础．

由于要通过开方运算引进无理数，我们应首先明确方根、算术根的意义，这样才能顺利地将数的范围从有理数扩充到实数．

实数部分主要有下述四个内容．

一、无 理 数

我们知道，任何一个有理数都可以用无限循环小数表示，详见下页表：

- 有理数
  - 整数 —— 以0为循环节的无限循环小数
  - 分数
    - 分母中只含2,5因数时(有限小数) —— 以0为循环节的无限循环小数
    - 分母中含2，5以外的因数时—无限循环小数

反之,任何一个无限循环小数都是有理数.

那么,除了无限循环小数之外,是否还存在其他小数?

我们来研究整数 2 的开平方:

```
              1.   4     1     4     2 …
            ─────────────────────────────
            )2,  00,   00,   00,   00
             1
       ──────────────────
      24│1   00
        │    96
        ──────────────────
        281│ 4     00
           │ 2     81
           ─────────────────────
       2824│ 1     19    00
           │ 1     12    96
           ───────────────────────────
         28282│ 6     04    00
              │ 5     65    64
              ────────────────────────
                      38    36
                      …     …
```

如果这样继续下去,$\sqrt{2}$是否是无限循环小数?即 $\sqrt{2}$ 是否是有理数?

现在我们来证明任何有理数的平方都不等于 2.

证　显然没有整数的平方等于 2.

现假设有一个既约分数 $\frac{m}{n}$ 的平方等于 2,

即　$(\frac{m}{n})^2 = 2$,$n>1$,m,n 互质.

则有　$\frac{m^2}{n^2} = 2.$

因为 m,n 互质，所以 m^2,n^2 也互质，并且 $n^2>1$，故 $\frac{m^2}{n^2}$ 不能为整数，这与 $\frac{m^2}{n^2}=2$ 矛盾．

因此，任何有理数的平方都不等于 2．

由此可知，$\sqrt{2}=1.4142\cdots$ 是一个无限不循环小数．又如

$$\sqrt{3}=1.732050\cdots;\pi=3.14159265\cdots;$$
$$0.1001000100001\cdots$$

等都是无限不循环小数．

我们把无限不循环小数称为无理数．

从无理数的定义可知，它的本质属性一是无限，二是不循环，只有满足这两个条件的小数才是无理数．判断一个实数是否是无理数，要根据定义中所揭示的本质属性，我们可以从下述几方面进行理解：

(1)判断一个实数是否是无理数要看本质属性，不要被表面现象所迷惑．为了揭示本质属性就需要化简后再判断，例如 $\sqrt{4}=2$ 是有理数，$\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$ 是有理数，这样就可以防止"带根号的数是无理数"的错误认识．同时要注意判断"数"与判断"式"是截然不同的，断判一个代数式是整式、分式及根式，要看原形、看外形，不能进行变形，例如 $\frac{x^2}{x}$ 是分式，而不能认为 $\frac{x^2}{x}=x$ 是整式，$\sqrt{4}$ 是根式，而不能认为 $\sqrt{4}=2$ 不是根式．

(2)无理数定义虽然揭示了它的本质属性，但并未指明无理数是怎样产生的，因此不能用"开方开不尽的数是无理数"，"不尽方根是无理数"代替定义中所揭示的本质属性，尽管这些数是无理数，但无理数并不完全是不尽方根，例如，上述的

圆周率 $\pi=3.14159265\cdots$，无限不循环的 $0.10010001\cdots$，这些无理数就不是不尽方根．

(3)要把无理数和它的有理数近似值严格区别，例如 π 是无理数，而它的近似值 3.14，3.1415926 等都是有理数．不能认为"3.1415926 等于 π，π 是无理数，所以 3.1415926 也是无理数"．

在引入无理数后，从而就把数的范围扩充到实数，即有理数和无理数统称为实数．

现在我们再来研究实数与数轴的关系：

我们已经知道，任何一个有理数，在数轴上都有唯一确定的点与之对应．但无理数是无限不循环小数，不可能把全部数字都写出来，那么怎样用数轴上的点表示一个无理数呢？有两种常用的方法：

(1)通过无理数的近似值，转化成有理数问题加以研究，这样就可以在数轴上近似地把一个无理数表示出来．

例如 $\sqrt{2}$ 的近似值为：

精确程度	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
不足近似值	1.4	1.41	1.414	1.4142	…
过剩近似值	1.5	1.42	1.415	1.4143	…
两个近似值的差	0.1	0.01	0.001	0.0001	…

在数轴上首先把 $\sqrt{2}$ 的这些不足近似值和过剩近似值表示出来，显然表示 $\sqrt{2}$ 的点应在表示同一精确程度的不足和过剩近似值的两点之间．精确程度越高，表示同一精确程度的不足和过剩近似值的两点就越接近，如果无限继续下去，这两点就要多么接近就多么接近．此时它们之间必然存在一

个唯一确定的点 P，就是无理数 $\sqrt{2}$ 所对应的点，如图 1-1 所示．因此，像有理数一样，任何一个无理数，在数轴上都有唯一确定的点与之对应．这样，任何一个实数，在数轴上都有唯一确定的点与之对应．反之，数轴上任何一个点都表示唯一确定的实数．因此，实数和数轴上的点是一一对应的．

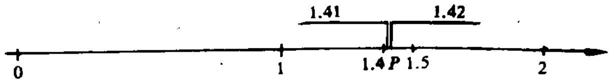


图 1-1

在一定精确程度下，如精确到 0.01，那么就可以根据表示不足近似值 1.41 和过剩近似值 1.42 的两点，画出表示 $\sqrt{2}$ 的点的近似位置．

(2)有些无理数，如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，…，可以利用勾股定理依次连续作图，在数轴上准确地表示出来，具体作法如下(如图 1-2)：

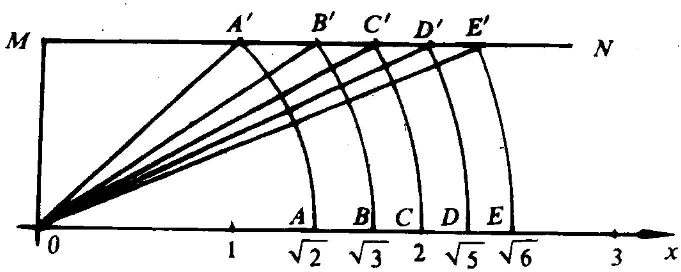


图 1-2

①在数轴上过原点作 $OM \perp Ox$，并使 $OM=1$.

②以点 M 为端点，作与数轴正方向同向，平行于数轴的射线 MN.

③在射线 MN 上截取 $MA'=OM=1$，连 OA'，则

$$OA'=\sqrt{OM^2+MA'^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

以 O 为圆心，OA' 为半径画弧，交数轴正方向于 A，则 $OA=\sqrt{2}$，A 点即是表示 $\sqrt{2}$ 的点．

④在射线 MN 上截取 $MB'=OA=\sqrt{2}$，连 OB'，则

$$OB'=\sqrt{OM^2+MB'^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}.$$

以 O 为圆心，OB' 为半径画弧，交数轴正方向于 B，则 $OB=\sqrt{3}$，B 点即是表示 $\sqrt{3}$ 的点．

⑤用同样办法可以依次得到表示 $\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，…的点 C，D，E，….

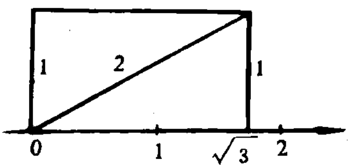


图 1-3

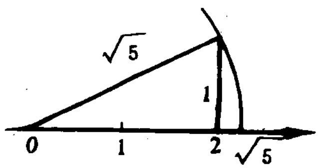


图 1-4

当然，有些无理数可以独立地直接使用勾股定理作图，画出表示某些无理数的点．例如可以如图 1-3 和图 1-4 画出表示 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{5}$ 的点．但也有些无理数，如 $\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，…等必须使用连续作图的方法，才能画出表示它们的点．

当数的范围扩充到实数以后，“相反数”、“绝对值”等概念也随之扩充到实数范围：

如果 a 表示一个实数，那么 $-a$ 表示它的相反数，并且零的相反数是零．

一个正实数的绝对值是它本身，一个负实数的绝对值是

它的相反数，零的绝对值是零.

在进行实数运算时，有理数的运算律和运算性质同样适用. 在实数范围内，正数和零总可以进行开方运算. 而负数只能开奇次方，不能开偶次方.

此外，在实数运算中，如遇到无理数，并且需要求出结果的近似值，可以按照所要求的精确度用近似值的有限小数去代替无理数，然后再进行计算.

二、无理数大小比较

比较两个含有根式的无理数的大小，如果在不取近似值的前提下进行，则要涉及很多数学知识和数学方法. 下面介绍几种常用的比较无理数大小的方法.

1. 作差比较法和作商比较法

要比较两个含有根式的无理数的大小，可以取这两个数的差或商(取商时需要这两个数同正号)，然后通过变形，判断差的正负或商与1的大小，即

如果 $a-b>0$，则 $a>b$；如果 $a-b=0$，则 $a=b$；如果 $a-b<0$，则 $a<b$. 此法称为作差比较法.

如果 $a>0,b>0$，且 $\frac{a}{b}>1$，则 $a>b$；如果 $a>0,b>0$，且 $\frac{a}{b}=1$，则 $a=b$；如果 $a>0,b>0$，且 $\frac{a}{b}<1$，则 $a<b$. 此法称为作商比较法.

例 1 比较 $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}$ 与 $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 的大小.

解 用作差比较法.

$$\because\quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}}-\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-4\sqrt{15}}{\sqrt{15}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{\sqrt{15}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$$

〔因$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$〕

>0,

$$\therefore\quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}>0.$$

即 $$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}>\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

说明　当$a>0,b>0$,且$a\neq b$时,$\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}>\dfrac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$总能成立,请读者自己完成证明.

例2　比较$19-4\sqrt{10}$与$3+\sqrt{10}$的大小.

解　用作商比较法.

$\because$　$19-4\sqrt{10}>19-4\sqrt{16}=3>0$,　$3+\sqrt{10}>0$,

$$\therefore\quad \frac{19-4\sqrt{10}}{3+\sqrt{10}}=\frac{(19-4\sqrt{10})(\sqrt{10}-3)}{(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)}$$

$$=31\sqrt{10}-97=\sqrt{9610}-97.$$

$\because$　$\sqrt{9604}<\sqrt{9610}<\sqrt{9801}$,即$98<\sqrt{9610}<99$.

$\therefore$　$1<\sqrt{9610}-97<2$,即$\sqrt{9610}-97>1$.

$$\therefore\quad \frac{19-4\sqrt{10}}{3+\sqrt{10}}>1.$$

即　$19-4\sqrt{10}>3+\sqrt{10}$.