PUTONGGAODENGJIAOYU GAOJIYINGYONGXING RENCAI PEIYANGGUIHUAJIAOCAI

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

微积分

主编 刘习贤 刘晓斌

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

微 积 分

主 编 刘习贤 刘晓斌

副主编 严守芳 劳 智 唐晓林 华柳斌 晏金华

参 编 阮 坚 陈妙玲 杨 萌 蒋元银

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是参照教育部“经济类与管理类专业面向21世纪教学内容和课程体系改革课题”的精神，按照教育部颁布的经管类专业核心课程“经济数学基础”教学大纲，结合编者多年本科教学实践经验编写而成.本书注重与中学数学教学相衔接，充分注意逻辑思维的规律，突出重点，内容完整.全书共分9章，主要讲解了函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数、微分方程与差分方程、无穷级数等内容.

本书具有结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题丰富和易学易教等特点，在保证教学基本要求的前提下，扩大了适用面，增强了伸缩性，适合作为高等院校经管类本科的“微积分”教材，尤其适用于作为独立本科学院和新升本科学院经管类专业的“微积分”教材.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/刘习贤，刘晓斌主编.—上海：同济大学出版社，2008.8

ISBN 978-7-5608-3904-2

Ⅰ.微… Ⅱ.①刘…②刘… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第094062号

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

微 积 分

主　　编　刘习贤　刘晓斌

副 主 编　严守芳　劳　智　唐晓林　华柳斌　晏金华

责任编辑　姚烨铭　责任校对　杨江淮　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021—65985622)

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　崇明裕安印刷厂

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　22

印　　数　1-4100

字　　数　440000

版　　次　2008年8月第1版　2008年8月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-3904-2/O·321

定　　价　39.00元

前　言

本教材是参照教育部“经济类与管理类专业面向21世纪教学内容和课程体系改革课题”(文中简称“21世纪课改”)的精神,按照教育部颁布的经管类专业核心课程“经济数学基础”教学大纲的内容和要求而编写的.适合高等院校经管类本科专业的必修课“高等数学”的教学使用,尤其适用于作为独立本科学院和新升本科学院经管类专业的”“高等数学”教材.

在编写过程中,我们力求教材的内容、体系符合21世纪课改的总体目标,遵循重视基本概念、培养基本能力、贴近实际应用的原则,并充分考虑了“高等数学”课程教学时数减少的趋势,同时也注意适应高校扩招后的教学实际水平.在教材体系、内容和例题的选择等方面吸收了国内外优秀教材的优点,也汇集了自己的教学经验.

全书共分9章.内容包括一元函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数的微分与积分、微分方程与差分方程、无穷级数.各节后均配有习题,各章后还配有总习题,书后有全部习题的参考答案.

本书是多所院校合作的结晶,参加编写的有东莞理工学院城市学院刘习贤、龙海燕、蒋伟,广东商学院华商学院刘晓斌、阮坚,广东外语外贸大学南国商学院蒋元银、严守芳、陈妙玲,广东海洋大学寸金学院劳智,南华工商学院唐晓林,松田学院晏金华、华柳斌,华农大珠江学院杨萌.全书由东莞理工学院城市学院刘习贤统稿.

由于水平所限,加之时间仓促,书中难免有不足之处,敬请读者不吝赐教.

编　者

2008年6月

目　　录

1 函　　数

数学的一项重要任务，就是要揭示各种实际问题中诸因素之间的数量关系，即其中所蕴含的变量之间的函数关系. 这种关系是我们研究事物发展规律、对事物进行分析和研究的重要基础. 函数概念是数学中的一个基本而重要的概念，同时也是微积分研究的主要对象. 本章介绍函数的一般概念、几种基本特性、最基本的函数类 —— 初等函数以及经济分析中常用的函数.

1.1　预备知识

1.1.1　绝对值及其基本性质

设 x 为一实数，则其绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

显然，$|x| = \sqrt{x^2}$. $|x|$ 的几何意义是一个数 x 在数轴上对应的点到原点 O 的距离. 而 $|x-y|$ 则表示数轴上两点 x 和 y 之间的距离.

若 $a > 0$，则 $|x| < a$ 表示数 x 在数轴上对应的点到原点 O 的距离小于 a，即 $-a < x < a$. 所以

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

同理
$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a，或\ x > a.$$

例 1　解下列不等式.

(1) $|x-1| < 4$；　　(2) $|x+1| \geqslant 2$；

(3) $x^2 - 4x + 3 > 0$.

解　(1) $|x-1| < 4$，即

$$-4 < x-1 < 4,$$

从而
$$-3 < x < 5.$$

(2) $|x+1| \geqslant 2$，即

$$x+1 \leqslant -2\ 或\ x+1 \geqslant 2,$$

从而
$$x \leqslant -3\ 或\ x \geqslant 1.$$

(3) $x^2-4x+3>0$,即

$$(x-2)^2-1>0,$$

亦即
$$|x-2|>1,$$

从而
$$x<1 \text{ 或 } x>3.$$

绝对值有下列性质:设 x,y 是任意两个实数,则有

(1) $|x|\geqslant 0$;

(2) $|-x|=|x|$;

(3) $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$;

(4) $|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$;

(5) $||x|-|y||\leqslant|x-y|$;

(6) $|xy|\leqslant|x||y|$.

性质(1)—(3) 和(6) 由绝对值的定义不难理解.

性质(4) 是因为由性质(3) 有

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|,\quad -|y|\leqslant y\leqslant|y|,$$

两式相加,可得

$$-|x|-|y|\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|,$$

此即
$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

性质(5) 是因为由性质(4) 有

$$|x|=|(x+y)-y|\leqslant|x-y|+|y|,$$

于是
$$|x|-|y|\leqslant|x-y|.$$

同理
$$|y|-|x|\leqslant|y-x|,$$

从而
$$-|x-y|\leqslant|x|-|y|\leqslant|x-y|,$$

此即
$$||x|-|y||\leqslant|x-y|.$$

例 2 已知 $|x-y+1|+(2x-y)^2=0$,求 $\log_y x$ 的值.

解 由 $\begin{cases}x-y+1=0,\\2x-y=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

所以,$\log_y x=\log_2 1=0$.

1.1.2 区间和邻域

区间是数学中常用到的实数集,包括四种**有限区间**和五种**无限区间**,其名称、记号及定义如下:

有限区间:

设 a,b 是两个实数,且 $a<b$. 则数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为**闭区间**，记为$[a,b]$；数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为**开区间**，记为(a,b)；数集

$$\{x \mid a < x \leqslant b\} \text{ 或 } \{x \mid a \leqslant x < b\}$$

称为**半开区间**，分别用记号$(a,b]$或$[a,b)$表示. 在以上各种情形中，a和b叫做区间的**端点**，而$b-a$叫做区间的**长度**.

在数轴上来说，区间是指介于某两个点之间的线段上的全体，这两点就是区间的端点. 闭区间$[a,b]$和开区间(a,b)在数轴上表示出来，分别如图1-1(a)与(b)所示.

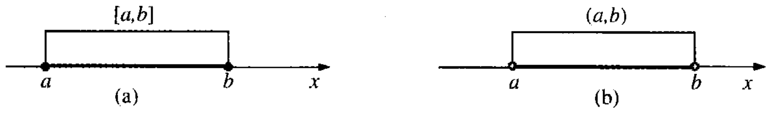

图1-1

无限区间：

不小于a的所有实数用记号$[a,+\infty)$表示(图1-2(a))；$(-\infty,b)$表示小于b所有实数(图1-2(b))；类似的记号$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$都是无限区间. 即

$$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\};(a,+\infty) = \{x \mid x > a\}.$$

$$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\};(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}.$$

全体实数R记作$(-\infty,+\infty)$.

注意，$+\infty$和$-\infty$分别读作“**正无穷大**”和“**负无穷大**”，它们不表示数值，仅仅是记号. 有时候，在不一定要指明区间是开的或闭的，以及有限的或无限的场合，我们就简单地称之为区间，并且常用字母I来表示.

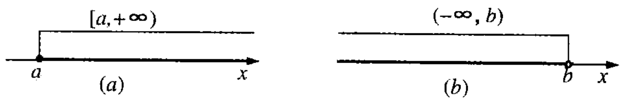

图1-2

邻域也是微积分中经常用到的一个概念.

设a与δ是两个实数，且$\delta > 0$，称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为以a为中心、以δ为半径的**邻域**，记作$U(a,\delta)$. 这个开区间以点a为中心，长度为2δ(图1-3(a)).

若把邻域$(a-\delta,a+\delta)$的中心点a去掉，由余下的点构成的集合，称之为**点a去心邻域**，记作$\overset{o}{U}(a,\delta)$：

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$
其中，$0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

显然 $$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

无需指明邻域的半径时，可使用符号或 $\mathring{U}(a)$（图 1－3(b)）.

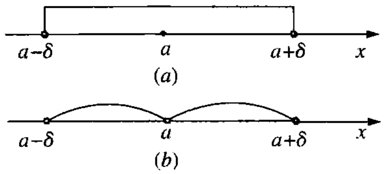

图 1－3

例如，点 3 的 $\delta=0.05$ 的邻域可表示为
$$\{x \mid |x-3|<0.05\},$$
即 $$-0.05<x-3<0.05,$$
亦即 $$-0.05+3<x<0.05+3,$$
故该点的 δ 邻域是(2.95,3.05). 该点的去心 δ 邻域是
$$\{x \mid 0<|x-3|<0.05\}=(2.95,3)\cup(3,3.05).$$

有时还要用到左、右邻域的概念. 开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的**左 δ 邻域**，$(a,a+\delta)$ 称为点 a 的**右 δ 邻域**.

上面叙述的都是一个确定点 a 处的邻域，下面给出“无穷远点 ∞”的邻域的概念. 设 $M>0$，数集 $\{x \mid |x|>M\}$ 称为 **∞ 的 M 邻域**，记作 $U(\infty,M)$. 于是
$$U(\infty,M)=\{x \mid |x|>M\}=(-\infty,-M)\cup(M,+\infty).$$

如图 1－4(a) 所示，如不需特别说明 M，$U(\infty,M)$ 也可简单地用 $U(\infty)$ 表示. 同样，开区间 $(-\infty,-M)$ 和 $(M,+\infty)$ 依次称为 $-\infty$ 和 $+\infty$ 的 M 邻域，可分别简记为 $U(-\infty)$ 和 $U(+\infty)$. 如图 1－4(b) 和(c).

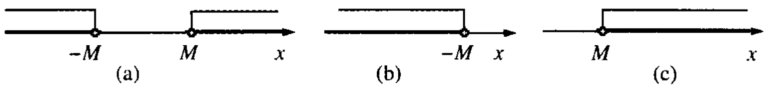

图 1－4

习题 1－1

1. 解下列不等式.

(1) $x^2 < 9$； (2) $|3-2x| < 1$； (3) $4x^2+4x-15>0$.

2. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合，并在数轴上表示出来.

(1) $|x| \leqslant 3$； (2) $|x-3| < 1$；

(3) $|x| \geqslant 5$； (4) $0 < |x+1| < 2$.

3. 求使等式 $\left|\dfrac{2x-1}{3}\right| = \dfrac{1-2x}{3}$ 成立的 x 的范围.

1.2 函 数

1.2.1 函数概念

1) 常量与变量

在自然科学和工程技术中，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量叫**常量**；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫**变量**.

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力在变化，则是变量，它们取越来越大的数值.

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析. 例如，就小范围地区而言，重力加速度可以看作常量，但就广大地区而言，重力加速度则是变量.

通常用字母 a,b,c 等表示常量，用 x,y,z 等表示变量.

2) 函数的定义

在同一自然现象或技术过程中，往往有多个变量在变化着，这些变量并不是孤立地在变化，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 我们先观察下面的实例.

例 1 设圆的面积为 A，半径为 r，那么，面积 A 与半径 r 之间满足下面的关系：

$$A = \pi \cdot r^2.$$

这里 A 与 r 都是变量，π 为圆周率，当半径 r 变化时，圆的面积 A 作相应的变化.

例 2 某天一昼夜的气温 T 是随时间 t 的变化而变化的. 气温的变化可以通过气温自动记录仪记录下来. 如图 1-4 所示,利用气温自动记录仪我们得到一条曲线,对这一天 0:00—24:00 之间任一时刻 t_0,气温 T 都有一个确定的值 T_0 与它对应,如 $t = 0$ 时,气温为 10℃;当 $t = 12$ 时,气温为 30℃.

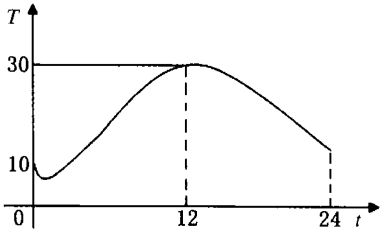

图 1-4

例 3 某人的父母每年在他生日的那天记录下他的身高,下表是他从 1 周岁到 10 周岁的身高.

年龄 t/ 岁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
身高 h/m	0.45	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.04	1.10	1.22	1.25

由该表可知这个人的身高随着年龄的增长而增高. 例如,想要知道他 6 岁时的身高,只要查表,就知道为 0.90m.

现实世界中,广泛存在着的变量间这种相依关系,虽然它们的具体背景不同,具有不同的表现形式,但是在数学上却有一个共同点:都涉及到两个变量,并且当其中一个变量在某一个范围内取定后,按照一定的规则(如公式、图形或表格),另一个变量总有唯一确定的数值与之对应. 将变量间的这种相依关系抽象化并用数学语言表达出来,便得到了函数的概念.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量,D 为一个给定的非空数集,如果对每一个 $x \in D$,变量 y 按照一定法则 f 总有唯一确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,自变量的取值范围 D 叫做这个函数的**定义域**.

f 是函数符号,它表示 y 与 x 的对应法则. 有时,函数符号也可以用其他字母来表示,如 $y = g(x)$,$y = \varphi(x)$ 等.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,依法则 f 的对应值称为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的函数值,记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 只有当 $x_0 \in D$ 时,才有对应的函数值,这

时，称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 有定义，否则称 $f(x)$ 在 x_0 无定义. 所有函数值组成的集合 $R_f=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

关于函数概念，我们提出以下几点注释：

第一，由定义可知，函数是由定义域与对应法则所确定的，因此，定义域与对应法则也常称为函数关系的二要素. 如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，那么，它们是同一函数.

第二，函数除定义域外，还有值域，它随着函数的出现而出现，因此它不可能是空集.

第三，在上述函数定义中，对于自变量 x 在定义域 D 中的每一个值，因变量 y 有唯一确定的值与之对应（而不是两个或两个以上值），故称这样的函数为单值函数；如果对于自变量 x 在定义域 D 中的每一个值，因变量 y 的对应值不止一个，则称 y 是 x 的多值函数. 在没有特别声明的情况下，以后提及的函数，均指一元单值函数.

第四，在函数的定义中，并没有要求自变量变化时函数值一定要变，只要求对于自变量 x 的每一取值，都有确定的 y 和它对应. 因此，常量 $y=C$ 也符合函数的定义，因为当 $x\in\mathbf{R}$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 C.

函数的定义域是函数概念的一部分，给定了函数，自然就给定了它的定义域. 在实际应用问题中，函数的定义域由自变量的实际允许变化范围确定. 但在数学研究中常常不考虑函数有实际意义，而抽象地研究用某个具体算式表示的函数，这时，认为它的定义域就是由所有使得算式有意义的实数组成的数集，它称为该函数的**自然定义域**.

例 4　求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{(x-1)(x+4)}$.

分析　因为是分式，所以要求分母不能等于零.

解　$(x-1)(x+4)\neq 0$，定义域为 $x\neq 1$，且 $x\neq -4$，用区间表示. 即 $D=(-\infty,-4)\cup(-4,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) $y=\sqrt{3-x}$.

分析　因为是二次根式，所以要求被开方数 $3-x$ 必须大于等于零.

解　$3-x\geqslant 0$，所以，定义域为 $x\leqslant 3$，用区间表示，即为 $D=(-\infty,3]$.

(3) $y=\dfrac{1}{x}\ln(x+1)$.

分析　首先有分式要求分母 x 不能等于零，其次有对数要求真数 $x+1$ 大于零，所以，定义域是二者的公共部分.

解 因为$\begin{cases}x \neq 0,\\ x+1>0,\end{cases}$ 所以$\begin{cases}x \neq 0,\\ x>-1.\end{cases}$

所以定义域为：$x>-1$ 且 $x \neq 0$，用区间表示，即为 $D=(-1,0) \cup (0,+\infty)$.

例 5 下列各对函数是否为同一函数.

(1) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$；(2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$, $g(x)=1$；

(3) $y=x^2$, $u=t^2$； (4) $f(x)=\dfrac{x}{x}$, $g(x)=1$.

解 (1) 不相同. 因为对应规律不同，事实上，$g(x)=|x|$.

(2) 相同. 因为定义域与对应规律都相同.

(3) $y=x^2$ 与 $u=t^2$ 表示同一函数，因为对应规律相同，函数的定义域也相同.

(4) 不相同，因为定义域不同.

由此可知一个函数由定义域与对应规律完全确定，而与用什么字母表示无关.

在坐标平面上，函数可用一个图形表示. 设有函数 $y=f(x)$，$x \in D$. 以横轴表示自变量 x，纵轴表示因变量 y，当 x 遍取定义域 D 中的每一个数值时，平面上的点集

$$\{(x,y) \mid y=f(x), x \in D\},$$

称为定义在数集 D 上的函数 $y=f(x)$ 的图形(图 1-5).

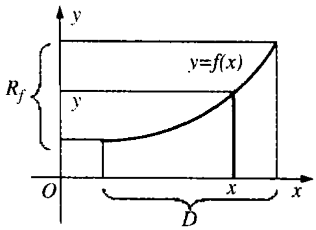

图 1-5

1.2.2 函数表示法

表示函数的方法有许多，最常见的有表格法、图形法及公式法(又称解析法).

(1) 表格法：把自变量的一系列数值与对应的函数值列成表来表示它们的对应关系. 如例 3.

(2) 图形法：用平面曲线表示自变量与函数的对应关系，它是函数关系的几何表示. 如例 2.

(3) 解析法：用数学式子表示自变量与函数的对应关系. 如例 1.

本书所讨论的函数常用公式法表示.

在有些情况下，一个函数关系不能用一个解析式表示，在自变量不同的取值范围内要用不同的式子来表示.

例 6 邮政局规定信函重量不超过 50g 支付邮资 0.80 元，超过部分按 0.40 元 /g 支付邮资，信函重量不得超过 5 000 g，则邮资 y(单位：元)与信函重

量 x(单位:g) 的关系可由解析表达式表示为

$$y=\begin{cases}0.80, & 0<x\leqslant 50,\\ 0.80+0.40(x-50), & 50<x\leqslant 5\,000.\end{cases}$$

该函数的定义域为$(0,5\,000]$,它在定义域内不同的区间上是用不同的解析式来表示的,这样的函数称为**分段函数**.

下面给出几个特殊的分段函数.

例 7 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,图形如图 1-6 所示.

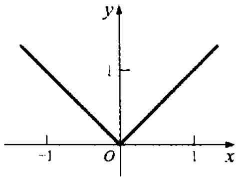

图 1-6

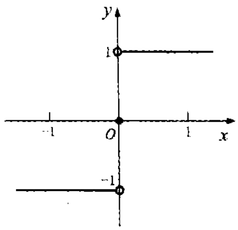

图 1-7

例 8 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,图形如图 1-7 所示.

例 9 取整函数 $y=[x]$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如$[\pi]=3$,$[e]=2$,$[-2.5]=-3$. 取整函数的定义域$D=(-\infty,+\infty)$,值域$R_f=Z$,图形如图 1-8 所示.

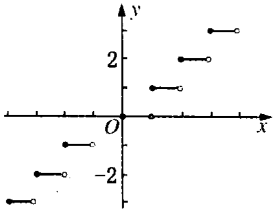

图 1-8

注意:分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数,而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值,分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

例 10 作出下面分段函数

$$f(x)=\begin{cases}2, & x>2,\\ 2x-1, & 0<x\leqslant 2,\\ x^2-1, & x\leqslant 0\end{cases}$$

的图形．并求函数的定义域及 $f(\frac{1}{2}),f(-2),f(2)$．

解　先分段作出分段函数的图形(分段函数的图形分段作)(图 1－9)．函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$．

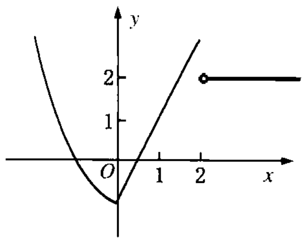

图 1－9

因为 $\frac{1}{2}\in(0,2)$，

所以 $f(\frac{1}{2})=2\times\frac{1}{2}-1=0$；

因为 $-2\in(-\infty,0)$，

所以 $f(-2)=(-2)^2-1=3$；

因为 $2\in[2,+\infty)$，

所以 $f(2)=2$．

习题 1－2

1．已知 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$，求下列函数值．

$f(0),f(-2),f(a-1),f(\frac{1}{x}),f(x+1),f[f(x)]$．

2．判断下列各对函数是否相同，并说明理由：

(1) $y=x$ 与 $y=e^{\ln x}$；

(2) $y=\sqrt{1+\cos 2x}$ 与 $y=\sqrt{2}\cos x$；

(3) $y=\ln(x^2-1)$ 与 $y=\ln(x-1)+\ln(x+1)$；

(4) $y=1$ 与 $y=\sec^2 x-\tan^2 x$；

(5) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$；

(6) $y=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $y=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$．

3．求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；(2) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$；(3) $y=\frac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$；

(4) $y=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-3}+\lg(5-x)$；(5) $y=\sqrt{x^3-4x+3}$；

(6) $y=\sqrt{2+x}+\frac{1}{\lg(1+x)}$；(7) $y=\frac{x}{\tan x}$．

4．求下列分段函数的定义域及指定的函数值，并画出它们的图形．