●普通高等学校“十一五”规划教材●

Higher Mathematics

高等数学

下册

殷志祥　许　峰　赵前进　李　勇　周继振　编著

中国科学技术大学出版社

普通高等学校“十一五”规划教材

Higher Mathematics

高等数学

下册

殷志祥 许 峰 赵前进 李 勇 周继振 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了高等数学中的相关知识，分 5 章：多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程。结构严谨，内容丰富，语言流畅，适合高等院校“高等数学”课程教学需要，也可供相关自学者、工程技术人员参考、使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/殷志祥，许峰，赵前进等编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2010. 1

ISBN 978-7-312-02658-4

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①殷…　②许…　③赵…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 006031 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
网址：http://press.ustc.edu.cn
印刷　安徽江淮印务有限责任公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　18.75
字数　372 千
版次　2010 年 1 月第 1 版
印次　2010 年 1 月第 1 次印刷
定价　25.00 元

《高等数学》编审委员会

前　　言

数学是研究客观世界数量关系与空间形式的一门科学.高等数学因为科学技术的发展而有了更加丰富的内涵和外延,它内容丰富,理论严谨,应用广泛,影响深远,是高等学校中最重要的基础课之一.

本《高等数学》以教育部非数学专业数学基础课教学指导委员会制定的最新"高等学校工科本科基础课教学要求"和"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"为依据,以"必需、够用"为原则确定内容和深度,参考近年"全国硕士研究生入学统一考试大纲"编写而成.

结合长期的教学实践经验,我们努力在本《高等数学》中体现以下特点:

(1) 直观性.对重要概念的引入重视几何与实际背景,基本概念的叙述准确,基本定理的证明简明易懂,基本方法的应用详细易学.

(2) 应用性.注重高等数学的思想和方法在解决实际问题方面的应用,既培养学生抽象思维和逻辑思维能力,更培养学生综合利用所学知识分析和解决问题的能力.

(3) 通俗性.语言简明通俗,叙述详略得当,例题丰富全面,配备大量各种难度与类型的习题,增强可接受性,期望能较好地培养学生的自学能力.

(4) 完整性.注重与中学知识的衔接,增加了极坐标与参数方程的介绍,也注重本课程知识间的前后呼应,使结构更严谨;在深入挖掘传统精髓内容的同时,力争做到与后续课程内容的结合,使内容具有近代数学的气息.

(5) 方便性.优化了部分章节的知识点顺序,使内容更紧凑,难点分散,也使教与学双方在使用上更方便,从讲述和训练两个层面体现因材施教的原则.

(6) 文化性.对重要的数学家与数学方法做了简单介绍,提高阅读兴趣的同时,也可对数学文化的传播产生潜移默化的影响.

本《高等数学》是安徽省高等学校"十一五"省级规划教材,是安徽省精品课程"工科高等数学系列课程"的研究成果,分上、下两册出版.上册第1、2章由费为银编写,第3章由王传玉编写,第4、5、6章由项立群编写,第7章由万上海编写;下册第8章由周继振编写,第9章由许峰编写,第10章由李勇编写,第11章由赵前进编写,第12章由殷志祥编写.全书由殷志祥和费为银统稿.

本《高等数学》是在安徽工程科技学院与安徽理工大学全体数学教师的鼎力支持下才得以编写完成的，同时参考了众多专家学者编著的微积分教材与大学数学教材，在此谨向他们表示衷心的感谢.

限于编者水平，教材中不妥与错误之处在所难免，欢迎广大专家、同行及读者批评指正.

编著者

2009年5月

目　　录

第 8 章　多元函数微分法及其应用

在生产实际和理论研究中，一个变量往往依赖多个因素，反映到数学上就体现为一个变量依赖多个变量的情形，这就提出了多元函数的概念. 例如圆柱的体积公式为

$$V = \pi r^2 h,$$

这里 r 是圆柱的半径，h 是圆柱的高. 又例如物理学上的理想气体状态方程为

$$pV = RT,$$

这里 R 为常数，该方程反映了压强 p，体积 V，温度 T 之间的关系.

本章在一元函数微分学的基础上，研究多元函数微分学及其应用. 讨论中我们以二元函数为主，因为从一元函数到二元函数是一个质的飞跃，从二元函数到二元以上的函数则可以类推. 在学习中，要把握一元函数与多元函数的共性及差异.

8.1　多元函数的基本概念

8.1.1　平面点集

在讨论二元函数及相关内容之前，我们先将讨论一元函数时用到的邻域和区间的概念推广到平面上.

1. 邻域，内点，区域

平面点集是指 xOy 平面上满足某种条件 T 的点 (x,y) 的集合，记为

$$E = \{(x,y) \mid (x,y) \text{ 满足条件 } T\}.$$

例如 $E=\{(x,y) \mid 0<x<y, 0<y<1\}$ 表示以点 $(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$ 为顶点的三角形的内部点的全体.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 为 xOy 平面上的一个点，δ 为某一正数，与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体称为点 P_0 的 δ 邻域，记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta) = \left\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\right\}. \tag{1}$$

几何上，$U(P_0,\delta)$ 就是以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为圆心，δ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$

的全体.若不需要强调邻域半径 δ 时,通常用 $U(P_0)$来表示点 $P_0(x_0,y_0)$的某邻域.点 $P_0(x_0,y_0)$的去心邻域记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}. \tag{2}$$

设 E 是一个平面点集,若存在点 P 的某邻域 $U(P)$使 $U(P)\subset E$,则称点 P 为 E 的内点,显然内点 $P\subset E$.

若点集 E 的每一个点都是 E 的内点,称 E 为开集,例如 $E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$是一个开集.实际上,取 E_1 里的任一点 $P_0(x_0,y_0)$,因为 $x_0^2+y_0^2<1$,则该点到圆周$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$的距离 $r=1-\sqrt{x_0^2+y_0^2}$,令 $\delta=r/2$,则 $U(P_0,\delta)\subset E_1$,从而证明了 E_1 为一个开集,见图8-1.

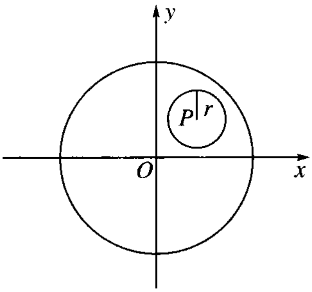

图 8-1

若点 P 的任一邻域内既有属于 E 中的点,也有不属于 E 中的点,则称点 P 为点集 E 的边界点,在这里,点 P 可以属于 E,也可以不属于 E.例如图 8-1 的边界点为圆周$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.开集不包含其边界点,我们把开集连同它的边界称为闭集,例如$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$是一闭集.

设 D 为一个集合,若对 D 内的任意两点都可用属于 D 中的折线相连,则称 D 为连通集.例如矩形$\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$是一个连通集,但下面定义的集合 E_2 不是连通集,

$$E_2=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1 \text{ 或 } x>2,-\infty<y<\infty\}.$$

连通的开集称为区域或开区域,例如$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$及$\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$都是区域.区域连同它的边界称为闭区域,例如$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$及$\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$都是闭区域.

2. 有界集

设 E 为一平面点集,若存在某一个正常数 K 和定点 $P_0(x_0,y_0)$,使对任意点 $P\in E$ 成立 $E\subset U(P_0,K)$,称 E 是有界点集,否则称为无界点集.例如$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$是有界点集,而$\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$是无界点集.

8.1.2　二元函数的定义

定义 1　设 D 为 xOy 面上的非空点集，若对 D 中任一点 $P(x,y)$，变量 z 按照一定的对应法则 f 总有惟一确定的数值与之对应，则称 z 是 x、y 的二元函数，或称 f 是定义在 D 上的二元函数，记为

$$z=f(x,y)\quad 或\quad z=f(P),$$

点集 D 称为二元函数的定义域，x、y 称为自变量，z 称为因变量，函数值的集合

$$\left\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\right\}$$

称为二元函数的值域.

由定义可知，对于任意一点 $P(x,y)\in D$ 和其对应的函数值 $z=f(x,y)$，可以确定空间中的一点 (x,y,z)，当 $P(x,y)$ 在平面点集 D 中连续变动时，空间点集

$$\left\{(x,y,z) \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\right\}$$

称为二元函数 $z=f(x,y)$ 在空间中的图形，一般情况下二元函数的图形是曲面，D 称为该空间曲面在 xOy 平面上的投影，见图8－2.

关于二元函数的定义域，与一元函数类似，我们作如下规定：在一般讨论 $z=f(P)$ 时，称使得解析表达式有意义的平面点集为该二元函数的定义域. 例如 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为 $\left\{(x,y)\mid x+y>0\right\}$，见图 8－3. 显然，二元函数的定义域为 xOy 面上的二维平面区域.

例 1　二元函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的图形是空间中在平面 xOy 上的半径为 R 上半球面，定义域为平面 xOy 上的圆 $\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\leqslant R^2\right\}$，值域为 $[0,R]$.

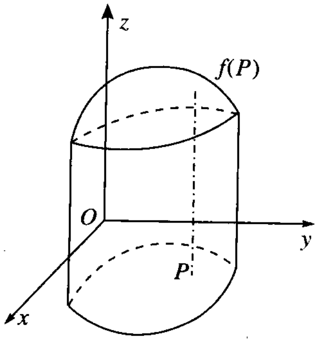

图 8－2

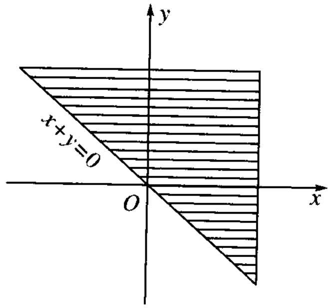

图 8－3

例 2　函数 $z=x^2+y^2$ 表示一个旋转抛物面，定义域为整个 xOy 平面，值域为 $[0,+\infty)$.

8.1.3 n 维空间与 n 元函数

因为二维数组(x,y)可看作平面上的一个向量或点，三维数组(x,y,z)是空间当中的一个向量或点，故我们可将二元函数看作一个点函数或向量函数，从这一角度出发，可将二元函数的概念推广到一般的 n 元函数的概念.

我们知道，二维向量的集合$\left\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\right\}$表示一个二维平面，三维向量的集合$\left\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbf{R}\right\}$表示一个三维空间，类似的我们称 n 维有序数组组成的集合$\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\right\}$为 n 维空间，记为 $\mathbf{R}^n$. 一般称 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧几里德空间，即欧氏空间. 每个 n 维有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 n 维欧氏空间的点，数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为该点的坐标. 这样直线、平面与空间可分别看作一维、二维、三维空间. 关于在四维空间及四维以上空间中的曲面，我们在三维空间里是无法想法的，例如在四维空间中的 Klein 瓶，有兴趣的同学可以参考基础拓扑学方面的书.

类似于平面、空间中点的距离的定义，我们可定义 n 维空间中两点的距离. 设 $P_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$P_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是 n 维空间中的两点，定义 P_1、P_2 两点间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}. \tag{3}$$

仿照平面上的情形，读者可以定义 n 维空间中邻域、内点、区域等概念，在此不再一一叙述.

定义 2 设 D 为 n 维空间里的非空点集，若对 D 中任一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，变量 u 按照一定的对应法则 f 总有惟一确定的数值与之对应，则称 u 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 元函数，或称 f 是定义在 D 上的 n 元函数，记为

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad 或 \quad u=f(P),$$

非空点集 D 称为 n 元函数的定义域，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为自变量，u 称为因变量，函数值的集合

$$\left\{u \mid u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\right\}$$

称为 n 元函数的值域. 当 $n\geqslant 2$ 时，n 元函数也称多元函数. 本书重点讨论二元和三元函数.

习题 8 - 1

A

1. 给出 $\mathbf{R}^3$ 空间中点 $P(x_0, x_0, x_0)$ 邻域的定义，并作几何说明.

2. 设函数 $f(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{x}{y}\tan\frac{x}{y}$，试求 $f(tx, ty)$.

3. 设 $z = x + y + f(x - y)$，若 $y = 0$ 时，$z = x^2$，试求 f 及 z.

4. 求下列函数的定义域并画出定义域的图形.

(1) $f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$；　　(2) $f(x,y) = \ln(x + y)$；

(3) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$；　　(4) $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2)$；

(5) $f(x,y) = \arcsin\frac{z}{x^2 + y^2}$；　　(6) $f(x,y,z) = \sqrt{z - x^2 - y^2}$.

B

1. 若 $f(x,y) = 2x + 3y$，试求 $f(xy, f(x,y))$.

2. 已知 $f(x + y, y/x) = x^2 - y^2$，求 $f(x,y)$.

8.2　二元函数的极限与连续

8.2.1　二元函数的极限

用定义一元函数极限的方法可以类似定义二元函数的极限.

定义 1　设 D 是 xOy 平面上的非空点集，函数 $z = f(x,y)$ 在 D 内有意义，对任意 $P_0(x_0, y_0) \in D$，若存在常数 A，对任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 $P(x,y) \in D$ 且 $0 < |P_0P| < \delta$，即

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

时，恒有

$$\left| f(x,y) - A \right| < \varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $z = f(x,y)$ 当 $(x,y) \to (x_0, y_0)$ 时的二重极限，记做

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

由二元函数极限的定义可知，二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否有极限以及有极限时极限为多少与函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否有定义无关，这与一元函数的情形是一样的. 从二元函数极限定义可以看出，二元函数的极限与一元函数极限的定义有相同的形式，只不过二元函数的极限的定义中使用的是平面上两点间的距离. 因此，一元函数极限的某些性质，例如极限的惟一性，局部有界性，局部保号性，变量之间的代换，夹逼准则以及极限的四则运算等法则对二元函数的极限同样成立.

例 1 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=0$.

证 因为 $0<\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$，因此，对任意正数 ε，取 $\delta=\varepsilon$，当 $P(x,y)\in\mathring{U}(P_0(0,0),\delta)$，即

$$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$$

时，恒有

$$\left|f(x,y)-0\right|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon.$$

故由二元函数的定义即得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=0.$$

该题也可使用代换法证明，设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，当 $x,y\to 0$ 时 $r\to 0$，$\theta\in[0,2\pi]$ 且是任意的（注意），则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta任意}}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r}=0.$$

例 2 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy}-1}{xy}$.

解 当 $x\to 0$，$y\to 0$ 时，有 $\sqrt{xy}-1\to\dfrac{1}{2}xy$，故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\sqrt{xy}-1}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{1}{2}\,\frac{xy}{xy}=\frac{1}{2}.$$

从上面的证明中可以看出，二元函数的极限存在是与路径无关的，这一点需要特别注意. 这是因为，一元函数的定义域是实轴上的点集，实轴上的点 x 趋向于 x_0 只有两种方式，即 x 从左边或者右边趋于 x_0. 但二元函数的定义域是平面上的点集，平面上的点 $P(x,y)$ 趋向于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式有无限多种，即路径有无穷