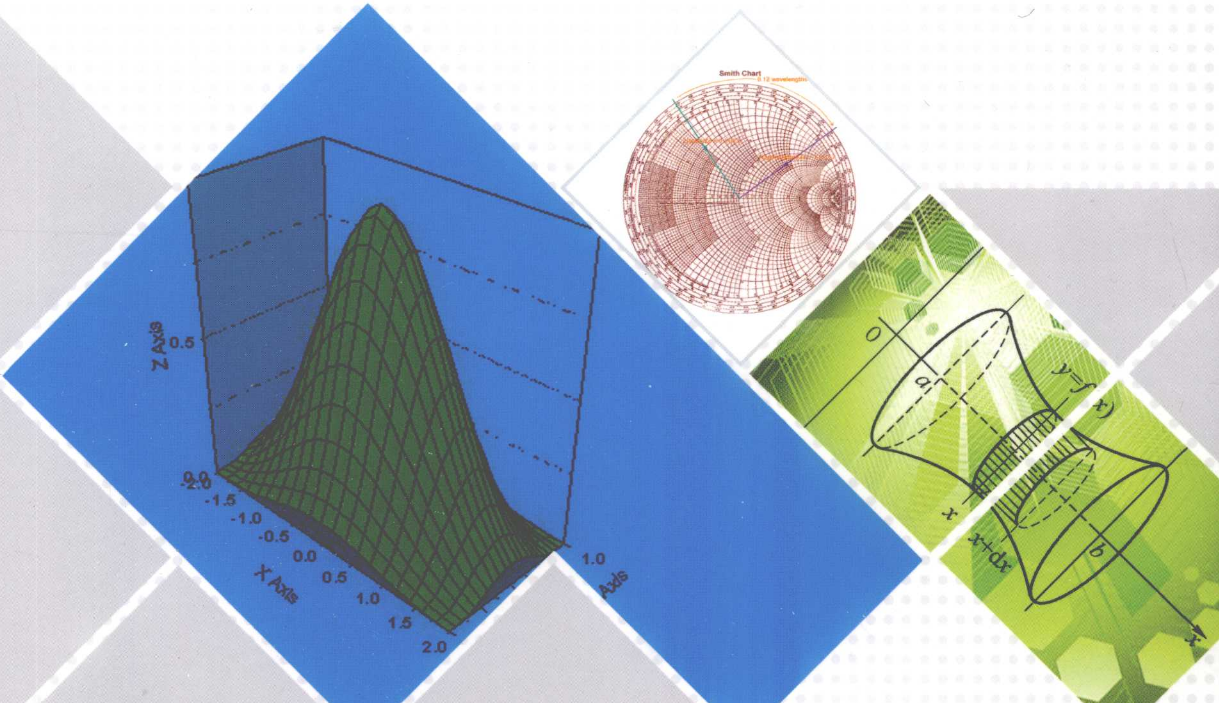
高等教育“十一五”规划教材
公 共 基 础 课 教 材 系 列

线性代数学习辅导

徐秀娟　主　编



科 学 出 版 社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

公共基础课教材系列

线性代数学习辅导

徐秀娟　主　编
肖继先　副主编
何亚丽　张　帅　佟玉霞　参　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是与科学出版社2007年出版的《线性代数》(徐秀娟主编)一书配套的学习辅导书，按教材编排顺序逐章编写. 每章包括目的与要求，知识框图，内容提要疑难问题解析，方法、技巧与例题分析，习题全解等内容；包括对知识点的概括、总结以及对学习的具体要求. 在例题分析与习题解答中，注重一题多解.

本书可作为高等院校线性代数课程的参考书，也可作为考研复习辅导书和其他人员的自学资料.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习辅导/徐秀娟主编. —北京：科学出版社，2009
(高等教育“十一五”规划教材．公共基础课教材系列)
ISBN 978-7-03-025544-0

Ⅰ．线… Ⅱ．徐… Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第161815号

责任编辑：沈力匀 张 斌/责任校对：柏连海 王万红
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
铭浩彩色印装有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年9月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2009年9月第一次印刷 印张：11 1/4
印数：1—6 000 字数：270 000

定价：18.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235(HP04)

前　言

本书是与《线性代数》(徐秀娟主编，科学出版社 2007 年版)一书配套的学习辅导书．编写本书的目的是让学生在学习原教材的基础上，进一步开阔眼界、拓展思路、多实践、多练习、增强分析问题和解决问题的能力．本书具有以下几个特点：

(1)紧扣大纲，突出重点．每一章都有“目的与要求”、“知识框图”，其中既有对本章重点内容的简略概括，又有对本章学习的具体要求，目的在于使学生能明确重点、难点，弄清各知识点之间的相互联系，以便对本章有一个全局性的认识和把握．学习要求是根据教育部制定的《线性代数教学大纲》和考研大纲的要求提出的，强调读者按照教学大纲的要求进行学习．

(2)一题多解，方法灵活．每一章都有“疑难问题解析”、“方法、技巧与例题分析”、“习题全解”，疑难问题解析部分不仅适合学生课下消化、吸收课上所学内容，而且对于扩展学生的知识面也很有帮助；在例题分析与习题解答中，注重一题多解，大部分题目给出了两种以上的解法，每种题型的解法都具有一定的代表性，构思新颖、方法灵活．对各类题型的解法都有分析和小结，引导学生多方位思考，开阔解题思路，学生可在掌握这些类型的解题方法后，使所学知识融会贯通、举一反三、触类旁通，并能灵活地解决问题．

(3)紧密结合原教材．每一章都有“内容提要”，内容的编排上与原教材结合紧密，定义和概念的叙述以及符号的使用都与原教材保持一致，使学生学起来比较方便．每章内容的编排比原教材更加深入，更有条理，使学生更易于理解和掌握．

本书可作为学习线性代数课程的参考书，也可作为考研复习的辅导书．

由于时间仓促，错误或不足之处在所难免，请读者批评指正．

目　录

第 1 章　矩阵与行列式

1.1　目的与要求

(1)理解矩阵的概念,知道行矩阵、列矩阵、零矩阵、单位矩阵、三角矩阵、对角矩阵对称矩阵、反对称矩阵等特殊矩阵的定义与性质.

(2)熟练掌握矩阵的加法、数乘、乘法、转置、方幂等运算及其运算规则.

(3)知道 n 阶行列式的定义以及几种特殊行列式的值,能熟练正确地计算三阶、四阶及简单的 n 阶行列式.

(4)知道方阵行列式的性质.

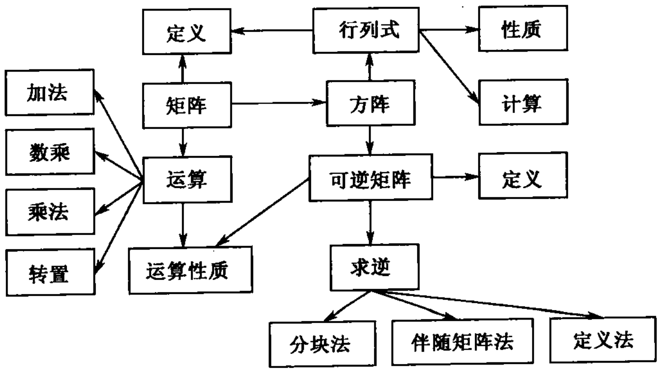
(5)理解逆矩阵的概念,掌握逆矩阵的性质及矩阵可逆的充要条件．会用伴随矩阵求矩阵的逆.

(6)了解矩阵的分块原则,掌握并会用分块对角矩阵的运算性质.

重点　行列式的计算　矩阵的运算　矩阵的逆　伴随矩阵

难点　抽象行列式的计算方法与技巧

1.2　知 识 框 图



1.3 内容提要

1.3.1 矩阵的概念与运算

1. 矩阵的概念

(1)定义:由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列(横称行,纵称列,并括以圆括号或方括号)的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ **矩阵**,其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为这个矩阵的第 i 行第 j 列**元素**,也称为该矩阵的(i,j)**元**.

(2)矩阵的相等:两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 称为**相等**,它们必须有相同的行数,相同的列数,且对应元素也相同. 即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\ \text{当且仅当}\ a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

(3)负矩阵:设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,由 $-a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 为元素的矩阵,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**,记为 $-\boldsymbol{A}$.

2. 几种特殊的矩阵

对于矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,若

(1)$m=1$,即只有一行的矩阵称为**行矩阵**,也称**行向量**. 记作 $\boldsymbol{A}=(a_1a_2\cdots a_n)$.

(2)$n=1$,即只有一列的矩阵称为**列矩阵**,也称**列向量**. 记作 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$.

(3)元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$都是零的矩阵称为**零矩阵**,记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

(4)$m=n$,即行数与列数相等矩阵称为 **n 阶方阵**,或 **n 阶矩阵**,记作 $\boldsymbol{A}_n$ 或简记为 $\boldsymbol{A}$.

(5)对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,若非零元素只出现在主对角线及其上(或右)方,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角形矩阵**,记作

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(6)对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,若非零元素只出现在对角线及其下(或左)方,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**下三角形矩阵**,记作

$$L=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(7)一个既是上三角形又是下三角形(即非零元素只可能在主对角线上出现)的矩阵，称为**对角形矩阵**，记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

也可记作 $A=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

(8)主对角线上的元素都等于某个数 k 的对角形矩阵称为**纯量矩阵或数量矩阵**，特别地，称 $k=1$ 时的纯量矩阵为**单位矩阵**，记作 E 或 I.

例如，$E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$就是 n 阶单位矩阵.

3. 矩阵的运算

(1)矩阵的加法：给定两个 $m\times n$ 矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$与$B=(b_{ij})_{m\times n}$，把矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

矩阵 A 与$-B$ 的和$A+(-B)$记为 $A-B$，此种运算也称为矩阵的减法.

矩阵的加法满足如下运算性质(其中 A,B,C,O 均为 $m\times n$ 矩阵)：

$$A+B=B+A$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$
$$A+(-A)=O;\quad A+O=A$$

(2)数与矩阵的乘法：数 λ 和矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$的乘积，简称**数乘**，记作 λA，规定为 $\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$.

矩阵的数乘具有如下性质(其中 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，k,l 为数)：

$$k(A+B)=kA+kB$$
$$(k+l)A=kA+lA$$
$$(kl)A=k(lA)=l(kA)$$
$$1\cdot A=A$$

(3)矩阵的乘法：设有矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times l}$，把矩阵 A 和 B 的乘积记作 AB，规定为 $AB=(C_{ij})_{m\times l}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,l)$$

矩阵的乘法满足下述运算性质(其中有关矩阵都假设满足可以进行有关运算的条件)：

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$
$$A(B+C) = AB + AC \qquad (B+C)A = BA + CA$$
$$A_{m\times n}E_n = E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$$
$$A_{m\times n}O_{n\times p} = O_{m\times p} \quad O_{l\times m}A_{m\times n} = O_{l\times n}$$
$$k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

(4)矩阵的转置.

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，把 A 的行与列互换所得到的矩阵称为 A 的**转置矩阵**，记为 A^{T}（或 A'）.

称满足 $A=A^{\mathrm{T}}$ 的矩阵为**对称矩阵**；称满足 $A=-A^{\mathrm{T}}$ 的矩阵为**反对称矩阵**.

转置矩阵具有下述性质：

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$$
$$(A\pm B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \pm B^{\mathrm{T}}$$
$$(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$$
$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$$

(5)矩阵的方幂：设 A 为 n 阶方阵，则 A 的 m 次幂 A^m 规定为

$$A^m = \underbrace{A\cdot A\cdots A\cdot A}_{m个}(m\text{ 是正整数})$$

特别地，规定 $A^0=E$，又设 $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$ 为 m 次多项式，则 $f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_mE$ 为另一个 n 阶方阵，称为方阵 A 的 m 次**矩阵多项式**.

矩阵的方幂满足如下运算规律：

$$A^mA^k = A^{m+k} \quad (A^m)^k = A^{mk} \quad (\text{其中 } m,k \text{ 为任意非负整数})$$

1.3.2 n 阶行列式

1. 定义

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，用式子 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 表示一个与 A 相联系的数，称为方阵 A 的**行列式**，也可记作 $\det A$ 或 $|A|$.

当 $n=1$ 时，一阶方阵 $A=(a_{11})$ 的行列式定义为数 a_{11}，即 $\det A=a_{11}$. 一般地，对 $n=2,3,\cdots$，用以下递归公式定义 n 阶行列式为

$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1}\det S_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\det S_{12} + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}\det S_{1n}$$

即

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\det S_{1j}$$

2. 几种特殊的行列式及其值

(1)主对角形行列式：

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 副对角形行列式：

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

(3)下三角形行列式：

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4)上三角形行列式：

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

3. 行列式的性质

性质 1.1　行列式与它的转置行列式相等，即$(\det \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \det \boldsymbol{A}$.

性质 1.2　n 阶行列式对任意一行按下式展开，其值相等，即

$$\det \boldsymbol{A} = a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

性质 1.3　互换行列式的两行，行列式的值改变符号．

推论 1.1　若行列式的某两行元素完全相同，则此行列式等于零.

性质 1.4　行列式的某一行中所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

推论 1.2　若行列式中有一行的所有元素全为零，则此行列式的值为零.

推论 1.3　如果行列式中有两行对应元素成比例，则此行列式为零.

推论 1.4　对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\det k\boldsymbol{A} = k^n \det \boldsymbol{A}$.

性质 1.5　若行列式某一行的所有元素都是两个数的和，则此行列式等于两个行列式的和.这两个行列式的这一行的元素分别为对应的两个加数之一，其余各行的元素与原行列式相同.

性质 1.6 把行列式的某一行的各元素乘以同一数后加到另一行对应元素上去，行列式的值不变.

性质 1.7 行列式某一行的各元素与另一行的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

由此可得行列式按行(列)展开定理如下

定理 1.1 对于 n 阶行列式 $\det\boldsymbol{A}$，有

$$a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{jn}=\begin{cases}\det\boldsymbol{A} & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

或

$$a_{1i}\boldsymbol{A}_{1j}+a_{2i}\boldsymbol{A}_{2j}+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{A}_{nj}=\begin{cases}\det\boldsymbol{A} & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

1.3.3 可逆矩阵

1. 定义

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$$

则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**，简称 $\boldsymbol{A}$ 的**逆**，记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

2. 可逆矩阵的性质

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶可逆矩阵以及非零常数 λ，则有

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

(2) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(4) $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(5) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

3. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件

(1)存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E})$.

(2) $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

4. 求逆矩阵的方法

(1)定义法：设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，则当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E})$ 时，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都可逆，且有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$，可按此性质求逆.

(2)伴随矩阵法：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$$

其中伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}$ 定义为

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

5. 逆矩阵的应用——克拉默法则的证明

(1)克拉默法则:设有 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots x_n$, n 个方程的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若其系数矩阵的行列式 $|A| \neq 0$,则方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

其中 n 阶矩阵 $A_j (j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数矩阵 A 的第 j 列用常数向量 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 代替后所得的矩阵.

(2)如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $|A| \neq 0$,那么方程组只有零解. 若系数行列式 $|A| = 0$,则齐次线性方程组有非零解. 反之亦然.

注意　克拉默法则只能用于方程组的个数与未知量个数相等且行列式不等于零的线性方程组,对于方程个数与未知量个数不等或未知量个数与方程个数相等,但系数行列式等于零的情况,需用另外的方法求解.

1.3.4　分块矩阵

1. 分块矩阵定义

根据矩阵本身的结构特点或运算的需要,用几条自上而下的纵线与自左向右的横线把一个矩阵分成若干小块,每一小块为原矩阵的子矩阵或子块,则原矩阵是以这些子块为元素的**分块矩阵**.

2. 分块矩阵的运算

进行分块矩阵的加、减、乘法与转置运算,可将子块当作矩阵的元素看待.

注意 进行分块矩阵乘法运算时，要求左矩阵列的分法必须与右矩阵行的分法一致.

3. 分块矩阵的行列式

设 $\boldsymbol{A}$ 为 r 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 s 阶方阵，则分块矩阵的 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ O & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 行列式为：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ O & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$$

4. 分块对角矩阵

(1)定义：设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵中，凡不在对角线上的子块都是零矩阵，而在主对角线上的子块都是方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**分块对角矩阵**，也称为**准对角方阵**，记作

$$diag(\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_r)$$

即

$$\boldsymbol{A} = diag(\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_r) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & O \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boldsymbol{A}_r \end{pmatrix}$$

式中各子块 $A_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为 n_i 阶方阵，且 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$.

(2)分块对角矩阵的性质：设

$$\boldsymbol{A} = diag(\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_r) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & O \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boldsymbol{A}_r \end{pmatrix}$$

则有：

性质 1.8 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_r|$.

性质 1.9 若有 $|\boldsymbol{A}_i| \neq 0(i=1,2,\cdots,r)$，则有

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & O \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boldsymbol{A}_r^{-1} \end{pmatrix}$$

性质 1.10 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & O \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boldsymbol{A}_r \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & & & O \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boldsymbol{B}_r \end{pmatrix}$，

其中 $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为同阶子方阵，则有：

$$AB=\begin{bmatrix}A_1B_1 & & & O\\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_rB_r\end{bmatrix}$$

1.4　疑难问题解析

问题 1　矩阵的乘法运算与数的乘法运算有何区别?

答　首先,数的乘法运算满足交换律,而矩阵的乘法不然. 这表现在如下几点:

(1)若矩阵 A 与 B 可以相乘,但 B 与 A 未必可以相乘. 例如,$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$,但是 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$不能相乘.

(2)即使 $A_{m\times n}B_{n\times m}$ 与 $B_{n\times m}A_{m\times n}$ 都存在,但当两者的阶数满足 $m\neq n$ 时二者也不相等. 例如,设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(3)即使 A 与 B 都是 n 阶方阵,AB 与 BA 也未必相等. 例如,设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$$

也正是因为如此,矩阵的乘法分为 B 左乘 A(即 BA)与 B 右乘 A(即 AB).

其次,数的乘法不存在化零因子,即若有 $ab=0(a,b\in\mathbf{R})$,则 a,b 中至少有一个数为零;而矩阵的乘法存在化零因子,即存在两个非零矩阵的乘积为零矩阵,如上述(3)中的矩阵.

最后,数的乘法满足消去律,即若有数 a,b,c 满足 $ab=ac$ 且 $a\neq0$,则必有:$b=c$ 而在矩阵的乘法中消去律不再成立,即由矩阵 A,B,C 满足 $AB=AC$ 且 $A\neq O$,并不能推出 $B=C$. 例如,设有矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\4&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\5&6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},$$

则

$$AC=\begin{pmatrix}3&1\\4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\6&6\end{pmatrix},\quad BC=\begin{pmatrix}2&1\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\6&6\end{pmatrix},$$

但是 $A\neq B$.

问题 2 矩阵与行列式有什么区别与联系？

答 矩阵的记号是数表外加圆括号或中括号，而行列式的记号是数表外加两条竖线；作为矩阵的数表可以不是方的，即行数与列数可以不同，但作为行列式的数表必须是方的，即行数与列数必须相同；矩阵就是一个数表，而行列式是一个代数运算式子；行列式是方阵所确定的一个数，可视其为方阵的函数；方阵的行列式是否为零，是方阵可逆与否的重要标志.

问题 3 如果 n 阶行列式的所有元素都变号，那么行列式的值有何变化？

答 当 n 为奇数时，行列式的值变为相反数，当 n 为偶数时，行列式的值不变.

问题 4 奇数阶的反对称行列式的值有何特点？

答 根据反对称行列式的特点以及行列式的数乘性质很容易证得其值一定为零.

问题 5 任何两个矩阵都可进行加法运算、乘法运算吗？

答 不是.

只有同型矩阵才可以做加法运算；只有第一个因子的列数与第二个因子的行数相等才能做乘法运算.

问题 6 任何一个 n 阶矩阵都可表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和吗？

答 是的.

因为对任一 n 阶矩阵 A，都有：$A+A^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵，$A-A^{\mathrm{T}}$ 是反对称矩阵，从而 $\dfrac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}$ 是对称矩阵，$\dfrac{A-A^{\mathrm{T}}}{2}$ 是反对称矩阵，又因为 $A=\dfrac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}+\dfrac{A-A^{\mathrm{T}}}{2}$，所以结论成立.

问题 7 已知线性方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$ 的系数行列式 D 及 D_j 均为零，其中 D_j 是由 D 的第 j 列换成方程组的常数项构成，问方程组是否有解？

答 不一定.

因为由系数行列式 D 为零，不能直接用克拉默法则. 比如，对方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2=2\\2x_1+4x_2=4\end{cases}$ 满足上述条件，但方程组有无穷多解；而对方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=2\\3x_1+6x_2+9x_3=8\\2x_1+4x_2+6x_3=4\end{cases}$ 其系数行列式 D 及 D_j 也均为零，但该方程组无解（因为其中含矛盾方程）.

1.5 方法、技巧与例题分析

例 1.1 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$n$ 是正整数，试求 A^n.