21世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

高等代数

（第五版）

全程导学及习题全解

主编 马訾伟 杜 炜 闫晓红

- 知识归纳 梳理主线重点难点
- 习题详解 精确解答教材习题
- 提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社

China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

高等代数

（第五版）

全程导学及习题全解

主编 马誉伟 杜 炜 闫晓红

◆ 知识归纳 梳理主线重点难点
◆ 习题详解 精确解答教材习题
◆ 提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目（CIP）数据

高等代数（第五版）全程导学及习题全解./马訾伟，杜炜，闫晓红主编. —北京：中国时代经济出版社，2009.9

（21世纪高等院校经典教材同步辅导）

ISBN 978-7-80221-940-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①马… ②杜… ③闫… Ⅲ. 高等代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第131904号

高等代数（第五版）全程导学及习题全解

马訾伟　杜　炜　闫晓红　主编

出版者	中国时代经济出版社
地址	北京市西城区车公庄大街乙5号鸿儒大厦B座
邮政编码	100044
电话	（010）68320825（发行部） （010）88361317（邮购）
传真	（010）68320634
发行	各地新华书店
印刷	北京鑫海达印刷厂
开本	880×1230　1/32
版次	2009年9月第1版
印次	2009年9月第1次印刷
印张	11.125
字数	260千字
印数	1～5000册
定价	16.50元
书号	ISBN 978-7-80221-940-3

前 言

高等代数是数学各专业的一门重要基础课，它既是中学代数的继续和提高，也是数学各分支的基础和工具，数学各专业研究生入学考试都将高等代数列为必考课程。高等代数包括多项式理论和线性代数两个部分，内容非常丰富，旨在通过本课程的学习，对学生进行代数学基本思想、基本方法的训练，增强线性代数基本计算能力和综合运用分析、几何、代数方法处理问题的能力。

张禾瑞、郝鈵新等编的《高等代数（第五版）》是许多综合性大学、高等师范院校、函授院校以及教育学院的教学用书也是许多学校研究生入学考试的参考教材，针对学生在学习过程中遇到的困难，我们编写了这本辅导书。全书按照教材的章节顺序编排，每章在点明知识框架的基础上，参照各类考试中经常出现的考题总结出不同类型的典型例题，进行针对性的训练，以开阔学习思路，对于课后习题的解答，我们遵循解答详细、思路清晰、理论严密、简明易懂的原则，力争在帮助大家学习教材习题的同时做到举一反三。但希望大家在学习的过程中，不要依赖答案，要懂得善用。

参与本书编写的除马訾伟、杜炜、闫晓红之外，刘伟、蒋春涛、刘晓亚、方琳也编写了部分章节并提出了宝贵的修改意见和建议，为本书的最终出版付出了辛勤的劳动，在此表示衷心感谢。对《高等代数》第五版教材作者张禾瑞、郝鈵新老师表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免出现疏漏，望读者批评指正。

编　者

2009 年 7 月

目　　录

第一章　基本概念

知识结构图

$$\text{基本概念}\begin{cases}\text{集合}\\\text{映射}\\\text{数学归纳法}\\\text{整数的一些整除性质}\\\text{数环和数域}\end{cases}$$

§1.1　集合

一、知识要点

1. 集合的概念

(1)集合：表示一定事物的集体，称为集合或集.

(2)元素：组成集合的东西叫作这个集合的元素.

(3)有限集合：若一个集合含有有限个元素，则称为有限集合.

(4)无限集合：若一个集合是由无限多个元素组成的，则称为无限集合.

(5)子集：设 A,B 是两个集合，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，那么就说 A 是 B 的子集.

(6)集合的并：设 A,B 是两个集合，由 A 的一切元素和 B 的一切元素所组成的集合叫作 A 与 B 的并集.

(7)集合的交：由集合 A 与 B 的公共元素组成的集合叫作 A 与 B 的交集.

(8)空集：不含任何元素的集合叫作空集.

(9)集合的差：设 A,B 是两个集合，令 $A-B=\{x\mid x\in A, x\notin B\}$，即 $A-B$ 是由一切属于 A 但不属于 B 的元素的所组成的，称为 A 与 B 的差.

(10)笛卡尔积：设 A,B 是两个集合，令 $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$，称为

A 与 B 的笛卡尔积.

2. 集合的运算性质

德 · 摩根律:对于任意集合 A,B,C 来说,以下等式成立:

$$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-A);$$

$$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-A).$$

二、典型例题分析

例 设集合 A 中有 n 个元素,则 A 的子集共有多少个? A 的非空子集共有多少个?

解 A 的子集共有 2^n 个,设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,对于 A 的任意确定子集 B,A 的每一个元素 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$,要么 $a_i\in B$,要么 $a_i\notin B$. 所以通过 n 步,每一步有两种可能的结果,确定一个 A 的一个子集 B,即有 2^n 个集合.

除去一个空集,A 的非空子集共有 2^n-1 个.

三、课后题详解

1. 设 $\mathbf{Z}$ 是一切整数的集合,X 是一切不等于零的有理数的集合. $\mathbf{Z}$ 是不是 X 的子集?

答 不是. 由于 $0\in\mathbf{Z}$,但 $0\notin X$,故 $\mathbf{Z}$ 不是 X 的子集.

2. 设 a 是集合的 A 的一个元素. 记号 $\{a\}$ 表示什么? 写法 $\{a\}\in A$ 对不对?

答 $\{a\}$ 表示仅有一个元素 a 构成的集合. $\{a\}\in A$ 写法不对,正确写法是 $\{a\}\subseteq A$.

3. 设

$$A=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1\leqslant x\leqslant 1\};$$

$$B=\{x\mid x\in\mathbf{R},x>0\};$$

$$C=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1<x<2\};$$

写出 $A\cap(B\cup C)$ 和 $A\cup(B\cup C)$.

解 由 $B\cup C=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1<x<+\infty\}$,进而得到

$$A\cap(B\cup C)=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1<x\leqslant 1\};$$

$$A\cup(B\cup C)=B\cup C=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1\leqslant x<+\infty\}.$$

4. 写出含有四个元素的集合 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 的一切子集.

解 此集合一共有 2^4 个子集. 它们分别为 $\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_4\}$,

$\{a_1,a_2\}$, $\{a_1,a_3\}$, $\{a_1,a_4\}$, $\{a_2,a_3\}$, $\{a_2,a_4\}$, $\{a_3,a_4\}$, $\{a_1,a_2,a_3\}$, $\{a_1,a_2,a_4\}$, $\{a_1,a_3,a_4\}$, $\{a_2,a_3,a_4\}$, $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$.

5. 设 A 是含有 n 个元素的集合. A 中含有 k 个元素的子集共有多少个?

答 共有 $\binom{n}{k}$ 个,其中 $\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)+\cdots+(n-r+1)}{r!}$.

6. 下列论断哪些是对的,哪些是错的? 对于错的举出反例,并且把错误的论断改正过来.

(i) $x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\Rightarrow x\in B$;

(ii) $x\in A$ 或 $x\in B\Rightarrow x\in A\cap B$;

(iii) $x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$;

(iv) $x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$.

解 (i) 对.

(ii) 错. 例如,$A=\{a,b\}$,$B=\{a\}$,$b\in A$ 但 $b\notin A\cap B$.

应改为 $x\in A$ 或 $x\in B\Rightarrow x\in A\cup B$.

(iii) 错. 例如,集合 A,B 同(ii)所设,$b\notin A\cap B$ 但 $b\in A$.

应改为 $x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$.

(iv) 对.

7. 证明下列等式:

(i) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(ii) $A\cap(A\cup B)=A$;

(iii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证明 (i) 对于任意的 $x\in A\cup(B\cup C)$,有 $x\in A$ 或 $x\in B\cup C$. 当 $x\in A$ 时,$x\in A\cup B$,从而 $x\in(A\cup B)\cup C$;当 $x\in B\cup C$ 时,$x\in B$ 或 $x\in C$,即有 $x\in A\cup B$ 或 $x\in C$,从而 $x\in(A\cup B)\cup C$. 故对任意的 $x\in A\cup(B\cup C)$,总有 $x\in(A\cup B)\cup C$,于是

$$A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C,$$

类似可证 $(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$,

故 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(ii) 显然 $A\cap(A\cup B)\subseteq A$;又任意的 $x\in A$,有 $x\in A\cup B$,则有 $x\in A\cap(A\cup B)$,于是 $A\subseteq A\cap(A\cup B)$. 故 $A\cap(A\cup B)=A$.

(iii)对于任意的 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$. 从而可

知 $x\in A$,或者 $x\in B$ 且 $x\in C$,即 $x\in B\cap C$. 于是 $x\in A\cup(B\cap C)$,即证

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C).$$

反之,若任意的 $x\in A\cup(B\cap C)$,则 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$. 若 $x\in A$,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$;若 $x\in B\cap C$,则 $x\in B$ 且 $x\in C$,从而 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,于是 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,即证

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

综上所述,$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

§1.2 映射

一、知识要点

1. 映射的概念

(1)映射:设 A,B 是两个非空集合,A 到 B 的一个映射指的是一个对应法则,通过这个法则,对于集合 A 中每一个元素 x,有集合 B 中唯一确定的元素 y 与它对应.

(2)满射:设 f 是 A 到 B 的一个映射,如果 $f(A)=B$,那么就称 f 是 A 到 B 的一个满射.

(3)单射:设 $f:A\to B$ 是一个映射,如果对于 A 中任意两个元素 x_1,x_2,只要 $x_1\neq x_2$,就有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,那么就称 f 是 A 到 B 的一个单射.

(4)合成:设 $f:A\to B,g:B\to C$,则称 $g\circ f:A\to C$ 为 f 和 g 的合成.

(5)双射:设 $f:A\to B$ 是一个映射,如果 f 既是单射又是满射,就称 f 是 A 到 B 的一个双射.

(6)逆映射:设 $f:A\to B$ 是一个映射,如果存在 B 到 A 的一个双射 g,使得 $g\circ f=j_A,f\circ g=j_B$,则称 $g:B\to A$ 叫作 f 的逆映射.

2. 双射的一个等价条件

令 $f:A\to B$,是集合 A 到 B 的一个映射,那么以下两条件是等价的:

(i)f 是一个双射;

(ii)存在 B 到 A 的一个双射 g,使得 $g\circ f=j_A,f\circ g=j_B$.

再者,当条件(ii)成立时,映射 g 是由 f 唯一确定.

二、课后习题详解

1. 设 A 是前 100 个正整数所成的集. 找一个 A 到自身的映射，但不是满射.

解　令 $f:A\to A, f(x)=|x-50|+1$. 对任意的 $x\in A$，有唯一的 $f(x)\in A$ 与之对应，故 f 是 A 到自身的映射. 但 $f(A)\neq A$. 例如，不存在 $x\in A$，使 $f(x)=100$，故 f 不是满射.

2. 找一个全体实数到全体正实数集的双射.

解　对任意的 $x\in\mathbf{R}$，令 $f:x\longmapsto\left(\frac{1}{2}\right)^x$，则 f 是全体实数 $\mathbf{R}$ 到全体正实数 $\mathbf{R}^+$ 的映射. 下证 f 是双射，事实上，若对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，有 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$，则 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1-x_2}=1$，故 $x_1=x_2$. 所以 f 是单射；又对任意的 $y\in\mathbf{R}^+$，

存在 $x=\log_{\frac{1}{2}}y\in\mathbf{R}$，使

$$f(x)=f(\log_{\frac{1}{2}}y)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}y}=y,$$

所以 f 是满射. 综上所述，f 为双射.

3. $f:x\longmapsto\frac{1}{x}$ 是不是全体实数集到自身的映射？

答　不是. 因为当 $x=0$ 时，不存在实数与 $f(0)$ 对应，即 $f(0)$ 没有意义.

4. 设 f 定义如下：

$$f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<1,\\ 2x-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

f 是不是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射？是不是单射？是不是满射？

答　f 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射. 但 f 不是单射，例如，$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)=1$；$f$ 也不是满射，例如，不存在 $x\in\mathbf{R}$，使 $f(x)=0$.

5. 令 $A=\{1,2,3\}$. 写出 A 到自身的一切映射. 在这些映射中哪些是双射？

解　记映射 $f:1\longmapsto i_1, 2\longmapsto i_2, 3\longmapsto i_3$ 为 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ i_1 & i_2 & i_3\end{pmatrix}$，其中 $i_1,i_2,i_3\in A$，它们可以相同，也可以不同. 因此，映射的总数是 1，2，3 三个数允许重复排列的总数，即 $3^3=27$ 个；当且仅当 i_1,i_2,i_3 互不相同时映射是双射，共有 $3!=6$ 个.

6. 设 a,b 是任意两个实数且 $a<b$. 试找出一个 $[0,1]$ 到 $[a,b]$ 的双射.

解　设 $x\in[0,1]$，令 $f:x\longmapsto a+(b-a)x$，则 f 是 $[0,1]$ 到 $[a,b]$ 的映射.

下证 f 是双射，事实上，若任意的 $x_1,x_2\in[0,1]$，有 $f(x_1)=f(x_2)$，则
$$a+(b-a)x_1=a+(b-a)x_2$$
从而 $x_1=x_2$，故 f 是单射；又对任意的 $y\in[a,b]$，有
$$y=a+(b-a)\cdot\frac{y-a}{b-a}=f\left(\frac{y-a}{b-a}\right),$$
且 $\frac{y-a}{b-a}\in[0,1]$，故 f 是满射.

从而得证 f 是 $[0,1]$ 到 $[a,b]$ 的双射.

7. 举例说明，对于一个集合 A 到自身的两个映射 f 和 g 来说，$f\circ g$ 和 $g\circ f$ 一般不相等.

解　取 $A=R$. 设映射 $f:x\longmapsto 2x+3, g:x\longmapsto 4x+5$. 则 $f\circ g:x\longmapsto 8x+13$，而 $g\circ f:x\longmapsto 8x+17$，可见 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 一般不相等.

8. 设 A 是全体正实数所成的集合. 令
$$f:x\longmapsto x, g:x\longmapsto\frac{1}{x}, x\in A.$$
(i) g 是不是 A 到 A 的双射?

(ii) g 是不是 f 的逆映射?

(iii) 如果 g 有逆映射，g 的逆映射是什么?

答　(i) g 是 A 到 A 的双射. 因为对于任意的 $x\in A$，有 $\frac{1}{x}\in A$. 是 $g\left(\frac{1}{x}\right)=x$，故 g 是满射；又若 $x_1\neq x_2$，则 $\frac{1}{x_1}\neq\frac{1}{x_2}$，$g$ 是单射. 因而 g 是 A 到 A 的双射.

(ii) 一般地，$(g\circ f)(x)=g(x)=\frac{1}{x}\neq x$，即 $g\circ f$ 不是恒等映射. 故 g 不是 f

的逆映射.

(iii) 对任意的 $x\in A$，$(g\circ g)(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)=x$. 所以 g 的逆映射是 g 本身.

9. 设 $f:A\longmapsto B$，$g:B\longmapsto C$ 是映射，又令 $h=g\circ f$，证明：

(i) 如果 h 是单射，那么 f 也是单射；

(ii) 如果 h 是满射，那么 g 也是满射；

(iii) 如果 f,g 都是双射，那么 h 也是双射，并且

$$h^{-1}=(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}.$$

证明　(i) 用反证法. 若 f 不是单射，则存在 $x_1,x_2\in A$，若 $x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)=f(x_2)$. 于是

$$\begin{aligned}h(x_1)&=(g\circ f)(x_1)=g(f(x_1))=g(f(x_2))\\&=(g\circ f)(x_2)\end{aligned}$$

从而 h 也不是单射，与假设矛盾.

(ii) h 是满射，则对任意的 $z\in C$，有 $x\in A$，使

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=z,$$

即有 $y=f(x)\in B$，使 $g(y)=z$，所以 g 也是满射.

(iii)设 $x_1,x_2\in A$，且 $x_1\neq x_2$，由于 f 是单射，$f(x_1)\neq f(x_2)$；再由 g 也是单射，$g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$ ，即 $(g\circ f)(x_1)\neq(g\circ f)(x_2)$，所以 $h(x_1)\neq h(x_2)$，h 是单射；

又设 $z\in C$，由于 g 是满射，存在 $y\in B$，使 $g(y)=z$. 又因 f 是满射，存在 $x\in A$，使 $f(x)=y$. 从而

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(y)=z$$

故 h 是满射.

综上可知 h 是双射. 又因为

$$\begin{aligned}h\circ(f^{-1}\circ g^{-1})&=(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})\\&=g\circ(f^{-1}\circ f^{-1})\circ g^{-1}=j_C\end{aligned}$$

同理 $(f^{-1}\circ g^{-1})\circ h=j_A$，

其中 j_C，j_A分别表示 C 和 A 的恒等映射，所以

$$h^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

10. 判断下列规则是不是所给的集合 A 的代数运算：

	集合 A	规则
1	全体整数	$(a,b)\longmapsto a^b$
2	全体整数	$(a,b)\longmapsto -ab$
3	全体有理数	$(a,b)\longmapsto \sqrt[b]{a}$
4	全体实数	$(a,b)\longmapsto \dfrac{a}{b}$

解 (1)不是. 因为(3,-2)无对应元素.

(2)是.

(3)不是. 因为(2,2)无对应元素.

(4)不是. 因为(1,0)无对应元素.

§1.3 数学归纳法

一、知识要点

最小数原理及数学归纳法

(1)最小数原理:正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的任何一个非空子集 S 必含有一最小数,也就是有这样一个数 $a\in S$,对于任何 $c\in S$,都有 $a\leqslant c$.

注意:

(i)最小数原理并不是对于任何数集都成立.

(ii)设 c 是任何一个整数,令 $M_c=\{x\in\mathbf{Z}\mid x\geqslant c\}$,那么以 M_c 代替正整数集 $\mathbf{N}^*$,最小数原理对于 M_c 仍然成立. 也就是说,M_c 的任意一个非空子集必含有一个最小数. 特别,$\mathbf{N}$ 的任意一个非空子集必含有一个最小数.

(2) 数学归纳法原理:设有一个与正整数 n 有关的命题. 如果

(i) 当 $n=1$ 时命题成立;

(ii)假设 $n=k$ 时命题成立,则 $n=k+1$ 时命题也成立;

那么这个命题对于一切正整数 n 都成立.

(3)第二数学归纳法:设有一个与正整数 n 有关的命题. 如果

(i) 当 $n=1$ 时命题成立;

(ii)假设命题对于一切小于 k 的正整数来说成立,则命题对于 k 也成立;

那么命题对于一切正整数 n 来说都成立.

二、课后习题详解

1. 证明：$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

证明　用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，$1\cdot 1!=(1+1)!-1$，命题成立；

假设当 $n=k$ 时命题成立，即

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1,$$

当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k!+(k+1)(k+1)!\\&=[(k+1)!-1]+(k+1)(k+1)!\\&=(k+1)!-1+k(k+1)!+(k+1)!\\&=(k+2)(k+1)!-1\\&=[(k+1)+1]!-1,\end{aligned}$$

命题成立，故命题对一切正整数 n 成立.

2. 设 h 是一个正整数. 证明 $(1+h)^n\geqslant 1+nh$，n 是任意自然数.

证明　用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，$(1+h)^1=1+h\geqslant 1+1\cdot h$，命题成立；

假设当 $n=k$ 时命题成立，即

$$(1+h)^k\geqslant 1+kh,$$

当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1}&=(1+h)^k(1+h)\geqslant(1+kh)(1+h)\\&=1+(k+1)h+kh^2\geqslant 1+(k+1)h,\end{aligned}$$

命题成立，故命题对一切正整数 n 成立.

3. 证明二项式定理：

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{r}a^{n-r}b+\cdots+b^n,$$

这里

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)+\cdots+(n-r+1)}{r!}$$

是 n 个元素中取 r 个的组合数.