

霍奈二氏代數學

上 冊

Hall, Knight 著

姚元基 吳廉方譯

商務印書館發行

目 錄

章	頁碼
I. 定義 代入法	1
II. 負量 同類項之加法	13
III. 單括弧 加法 減法	19
加法與減法之交換定律	22
加法與減法之結合定律	22
次元 次 昇冪序與降冪序	25
雜題 I	34
IV. 乘法	36
乘法之交換定律	37
乘法之結合定律	37
乘法之指數定律	37
乘法之分配定律	39
複式之乘法	40
符號法則	41
算術代數及記號代數之註解	42
配積法	46
由視察求積	52
分離係數之乘法	54

章	頁碼
V. 除法	56
除法之指數定律	57
複式之除法	60
除法之重要實例	66
何諾氏之綜合除法	68
VI. 括弧之移去及插入	71
雜題 II	79
VII. 一次方程式	82
VIII. 記號式	90
IX. 一次方程式之問題	98
X. 因數分解	106
三項式	109
兩量平方之差	119
重要情形	125
兩量立方之和或差	126
雜例	128
因數之逆用法	131
因數定理	134
XI. 最高公因數	142
因數定理之應用	151
XII. 最低公倍數	157

章	頁碼
XIII. 分數	165
最低項之通約法	266
乘法及除法	170
加法及減法	175
變號之法則	185
輪換次序	189
XIV. 繁分數 混合式	192
分數之雜練習	200
XV. 分數方程式與文字方程式	206
XVI. 問題	214
雜題 III	219
XVII. 聯立方程式	224
加減消去法	226
代入消去法	227
比較消去法	228
含三未知量之聯立方程式	232
倒數	236
文字聯立方程式	239
XVIII. 問題	244
XIX. 不定及不能問題 負結果	252
$\frac{a}{0}$, $\frac{a}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 之意義	255

章	頁碼
XX. 自乘法	258
多項式之自乘法	261
任何多項式之自乘法	264
二項式定理之應用	265
XXI. 開方法	268
任何多項式之平方根	270
任何多項式之立方根	276
高次根	281
多項式之 n 次根	282
數字之平方根及立方根	284
XXII. 指數論	289
分數指數之意義	291
零指數之意義	292
負指數之意義	293
XXIII. 不盡根(根數)	306
不盡根之通約	308
不盡根之加減法	312
不盡根之乘法	314
不盡根之除法	315
複根	318
使任何二項不盡根有理化之因數	324
二次不盡根之性質	326

章	頁碼
二項不盡根之平方根 . . .	327
用視察求二項不盡根之平方根	330
含有不盡根之方程式	332
XXIV. 虛量	336
虛量單位	337
虛量之基本代數運算	340
XXV. 問題	343
雜題 IV	352
XXVI. 二次方程式	357
純二次方程式	358
雜二次方程式	359
用公式之解法	364
用因數分解之解法	366
用已知根組成方程式之法 .	368
未知量所求之值不適於原方程式	369
XXVII. 具有二次形之方程式	373
XXVIII. 二次聯立方程式	379
同次與等次方程式	386
對稱方程式	388
雜例	388
XXIX. 問題	394

章	頁碼
XXX. 二次方程式論	404
根數	404
根之性質	406
根與係數之關係	407
已知其根組織方程式	408
雜定理	415
剩餘定理	415
對稱式	417
XXXI. 一次不定方程式	421
XXXII. 不等式	426
雜題 V	431
XXXIII. 比	437
比例	444
比例之移項	446
變數法	450
XXXIV. 等差級數	458
等比級數	468
調和級數	477
XXXV. 順列與組合	485
XXXVI. 或許率(適遇法)	502
雜題 VI	507

章	頁碼
XXXVII. 二項式定理	513
正整數指數之證明	513
公項	517
二項式定理之最簡形	518
數學歸納法之證明	519
等係數	523
最大係數	523
最大項	523
係數之和	525
多項式之展開式	526
負指數或分數指數之應用	526
XXXVIII. 對數	533
對數之性質	534
指標及假數	537
常用對數之利益	538
由 a 底對數變成 b 底對數	540
對數之算術計算	541
四位對數表	545
對數表之用法	547
餘對數	551
指數方程式	552
XXXIX. 利息與年金	555

章	頁碼
XL. 極限值與消失分數	560
XLI. 收斂級數與發散級數	569
收斂級數之檢驗	569
補助級數	577
XLII. 未定係數	581
有限次元函數	581
無限次元函數	587
分數展成級數	588
不盡根展成級數	590
級數之轉換	591
部分分數	592
公項	597
XLIII. 連分數	601
連續近數之組成定律	604
差之極限	609
循環連分數	613
XLIV. 級數之總和法	618
級數率	618
循環級數 n 項之和	621
公項	623
差法	625
求級數任何項之法	626

章	頁碼
級數 n 項之和	628
彈丸堆積法	630
插入法	634
XLV. 二項式定理 任何指數	637
XLVI. 指數級數與對數級數	643
XLVII. 行列式	650
小行列式	652
行列式相消	654
行列式相乘	655
一行列式表作其他二行列式之和	655
行列式之簡約法	657
一次聯立方程式之解法	663
項之符號	667
低次行列式	669
XLVIII. 方程式論	673
何諾氏綜合除法	675
根數	676
方程式次數之減低法	678
方程式之組成法	678
根與係數之關係	679
分數根	684
虛根	685

章

頁碼

方程式之變形	688
倒數方程式之標準形	695
狄卡德氏之符號法則	700
誘導函數	703
等根	705
根之位置	706
史頓氏定理及其方法	710
函數之圖示法	715
高次數字方程式之解法	720
牛頓氏法	720
一之立方根	724
卡鄧氏法	725
四次方程式	728
不可通約根	732
何諾氏近似法	732
數之任何根	737
雜題 VII	738
XLIX. 函數之圖示法	771
聯立方程式之應用	781
各種圖形之測量法	797
圖形之實用	810
直線圖形之雜應用	840
附錄 I. 數學名詞英漢對照	849
II. 數學所用之希臘文字	858

霍奈二氏 代 數 學

第 一 章

定 義 代 入 法

1. 代數之論量與算術同，然其所論之範圍較為普遍；蓋算術所用之量以數字表之，此則各有一定之數值；代數所用之量為以記號表之，因記號須由吾人選擇而指定，故可有任何之值。

代數量所用之記號恆以英文字母表之，雖記號所代之數值無限，然在同一之問題中，其數值必為完全一致。由是，如言“令 a 等於 1”，此非言 a 之數值必恆等於 1，然必於討論此特殊例題時方有此數值。況用記號演算，無指定其為任何特別數值之必要，良以此項演算純係對代數而言者也。

現先論代數之定義，記號 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 、 $()$ 、 $=$ 與算術所用之記號同。現在又假定代數所用一切記號均代整數。

2. 代數式爲諸記號之集合體，其所含之項或爲一項或爲多項，其間互以符號 $+$ 及 $-$ 分成若干部。由是， $7a+5b-3c-x+2y$ 爲一含有五項之式。

[註] 當項前無記號時，係記號 $+$ 略去者。

3. 單式或複式。式之含一項者曰單式，如 $5a$ ；式之含二項或二項以上者曰複式，複式更能區別之，如由二項所成之式，如 $3a-2b$ ，亦名二項式，而由三項所成之式，如 $2a+3b+c$ ，亦名三項式。單式亦謂之一項式，複式亦謂之多項式。

4. 當二量或二量以上相乘時，則其結果謂之積。算術與代數間須注意一重要之分別；在算術中 2 與 3 之積書如 2×3 ，然在代數中 a 與 b 之積可書如 $a\times b$ ， $a\cdot b$ 或 ab 之任一式，其較普通者爲 ab 。由是，設 $a=2$ ， $b=3$ ，則 ab 之積 $=a\times b=2\times 3=6$ ；然在算術中 23 將爲“二十三”或 $2\times 10+3$ 矣。

5. 諸量相乘所成之積，其各量對其積而言曰因數。由是 5 ， a ， b 各爲 $5ab$ 積之因數。

[註] 項及因數之分別初學者應特別留意。

6. 當式中有一因數爲數字量時，是謂其餘因數之係數。由是，在 $5ab$ 式中，5 爲係數，然係數之字若以廣義言之，則有時爲便利計，可視積之任意因數或諸因數爲其餘因數之係數。由是，在 $6abc$ 積中， $6a$ 名爲 bc 之係數，亦無不可，數字係數之外尚有文字係數。

[註] 若係數爲一，恆從略，故可單書 a 以代 $1a$ 。

7. 某量之乘冪，爲以此量如因數重若干次所得之積，而以因數之次數書於此量之右上角而記之。由是，

$a \times a$ 謂之 a 之二乘冪，書如 a^2 ；

$a \times a \times a$ 謂之 a 之三乘冪，書如 a^3 ，餘仿此。

指數者，任何量所記之冪數也。由是 2, 5, 7 各爲 a^2 , a^5 , a^7 之指數。

[註] a^2 恆讀如“ a 方”， a^3 讀如“ a 三方”， a^4 讀如“ a 四方”，餘仿此。

若指數爲一，恆略而不書，可僅書 a 以代 a^1 。由是， a , $1a$, $1a^1$ 之意義俱同。

8. 初學者須留意係數與指數間之區別。

例題 1 $3a$ 與 a^3 在意義上有何分別？

就 $3a$ 言，意即 3 及 a 二量之積；

就 a^3 言,意即 a, a, a 三量之積.

由是,設 $a=4$,

$$3a = 3 \times a = 3 \times 4 = 12;$$

$$a^3 = a \times a \times a = 4 \times 4 \times 4 = 64.$$

例題 2 設 $b=5$, 試區別 $4b^2$ 及 $2b^4$.

今 $4b^2 = 4 \times b \times b = 4 \times 5 \times 5 = 100;$

於是 $2b^4 = 2 \times b \times b \times b \times b = 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 1250.$

例題 3 設 $x=1$, 求 $5x^4$ 之數值.

今 $5x^4 = 5 \times x \times x \times x \times x = 5 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 5.$

[註] 初學者應注意 1 之任何乘幂仍為 1.

例題 4 設 $a=4$, $x=1$, 求 $5x^a$ 之數值.

$$5x^a = 5 \times x^a = 5 \times 1^4 = 5 \times 1 = 5.$$

9. 連續之符號, $\dots$, 讀如“餘仿此”.

10. 推論之符號, $\therefore$, 讀如“故”或“因此”.

11. 算術乘法中積之諸因數書時與次序無關.

$$3 \times 4 = 4 \times 3.$$

同理,在代數中 ab 及 ba 各表以字母 a 與 b 所代兩量之積,故有同一之值,雖積之諸因數書時與次序無關,然恆依英文字母排列. 分數係數之大於一者恆書作假分數式.

例題 設 $a=6$, $x=7$, $z=5$, 求 $\frac{13}{10}axz$ 之數值.

$$\text{今} \quad \frac{13}{10}axz = \frac{13}{10} \times 6 \times 7 \times 5 = 273.$$

習題 Ia

設 $a=7$, $b=2$, $c=1$, $x=5$, $y=3$, 求下列之值:

- | | | | |
|-------------|--------------|-------------|------------|
| 1. $14x$. | 2. x^5 . | 3. $3ax$. | 4. a^3 . |
| 5. $5by$. | 6. b^5 . | 7. $3b^2$. | 8. $2ax$. |
| 9. $6c^4$. | 10. $4y^3$. | | |

設 $a=8$, $b=5$, $c=4$, $x=1$, $y=3$, 求下列之值:

- | | | | |
|--------------|--------------|-------------|--------------|
| 11. $3c^2$. | 12. $7y^3$. | 13. $5ab$. | 14. $9xy$. |
| 15. $8b^3$. | 16. $3x^5$. | 17. x^3 . | 18. $7y^4$. |
| 19. c^x . | 20. b^y . | 21. y^c . | 22. x^b . |
| 23. y^b . | 24. a^y . | 25. b^x . | |

設 $a=5$, $b=1$, $c=6$, $x=4$, 求下列之值:

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|
| 26. $\frac{1}{4}x^4$. | 27. $\frac{5}{12}c^2$. | 28. $\frac{3}{8}x^3$. | 29. $\frac{1}{10}ax$. |
| 30. 3^x . | 31. 2^c . | 32. 8^b . | 33. 7^x . |
| 34. $\frac{7}{15}acx$. | 35. $\frac{1}{8}bcx$. | | |

12. 當若干異量相乘時, 可採用類似 7 款之記數

法由是, $aabbbcd$ 書如 $a^2b^3cd^3$, 反之, $7a^3cd^2$ 與 $7 \times a \times a \times a \times c \times d \times d$ 之意義同。

例題 1 設 $x=5, y=3$, 求 $4x^2y^3$ 之數值。

$$4x^2y^3 = 4 \times 5^2 \times 3^3 = 4 \times 25 \times 27 = 2700.$$

例題 2 設 $a=4, b=9, x=6$, 求 $\frac{8bx^2}{27a^3}$ 之數值。

$$\frac{8bx^2}{27a^3} = \frac{8 \times 9 \times 6^2}{27 \times 4^3} = \frac{8 \times 9 \times 36}{27 \times 64} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

13. 設積中有一因數為 0, 則不論其他因數為何數值, 其積必等於 0, 因數 0 恆名為零因數。

例如, 設 $x=0$, 則 ab^3xy^2 包含一零因數, 故設 $x=0$ 不論 a, b, y 之數值為何, 必為 $ab^3xy^2=0$ 。

又設 $c=0$, 則 $c^3=0$, 故不論 a 與 b 之數值為何, 恆為 $ab^2c^3=0$ 。

[註] 0 之任何乘幂恆為 0。

習題 1b

設 $a=7, b=2, c=0, x=5, y=3$, 求下列之值:

1. $4ax^2$. 2. a^3b . 3. $8b^2y$. 4. $3xy^2$.

5. $\frac{3}{4}b^2x$. 6. $\frac{5}{6}b^3y^2$. 7. $\frac{2}{5}xy^4$. 8. a^3c .

9. a^2cy . 10. $8x^3y$.