概率论与数理统计

[illegible] [illegible] 编

高等教育出版社

高等师范专科学校教材

概率论与数理统计

樊修睦　徐兆强　编

高等教育出版社

本书根据国家教委师范司1989年颁布的二年制师范专科学校数学专业概率论与数理统计教学大纲编写，内容包含随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征和极限定理、统计估值方法、假设检验、方差分析、回归分析及应用简介．书末有附录和附表．

本书可供高等师范专科学校数学专业作为教材使用．

（京）112号

高等师范专科学校教材

概率论与数理统计

樊修睦 徐兆强 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.875 字数 260 000

1990 年 9 月第 1 版 1991 年 9 月第 2 次印刷

印数 4 201—7 211

ISBN7-04-003154-X/O·971

定价 3.40 元

引　言

自然界和人类社会所发生的现象，虽然表现是多种多样的，但经常碰到的有下面的两类：

一类是必然现象．例如，抛向空中的石块，必然要落到地面上来；水在标准大气压下加热到100°C时，必然会沸腾；物体如果不受外力的作用，这个物体就总是保持自己静止状态或匀速直线运动状态不变．这类现象我们可以举出很多，它们都有共同的特点：在同样的条件下观察同一现象，每次所得的结果都完全相同．这种现象叫做必然现象．数学分析、高等代数等就是从数量这一侧面描述必然现象的数学工具．

另一类是随机现象．例如，投掷一枚均匀的硬币，其结果可能是刻有国徽的一面朝上，也可能是刻有币值的一面朝上，但在每次投掷之前无法肯定哪一面朝上；同一门大炮向同一目标射击，各次射击的弹着点不尽相同，且在每次射击之前无法预言弹着点的确切位置．这类现象我们也可以举出很多，它们有如下的特点：在同样的条件下多次观察同一现象，每次所得的结果不完全相同，有多种可能的结果，而且每次观察之前无法预知出现什么结果，这类现象叫做随机现象．

对随机现象在同样的条件下进行多次观察时，出现什么结果具有不确定性，那么对于随机现象有无数量规律存在呢？人们在长期的实践和深入的研究中发现，随机现象虽然就每次观察的结果来说有不确定性，但是经过大量重复观察，便呈现出某种规律性．这种规律叫做随机现象的统计规律．例如，上面提到的投掷一枚

均匀硬币的例子中，虽然在每次投掷之前无法肯定哪一面朝上，但是进行大量次数的投掷后，人们发现它有明显的规律．这个规律就是国徽的一面朝上和币值的一面朝上的次数大体各占投掷总次数的一半，即国徽的一面朝上和币值的一面朝上的次数与投掷总次数之比大体都是$\frac{1}{2}$．这个例子说明，表面上看去有偶然性的地方，内部实际存在着必然规律．

概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律的一门数学学科．由于随机现象在客观世界中广泛地存在着，这就决定了概率论与数理统计这门学科的重要性和应用的普遍性．现在，概率论与数理统计几乎已经应用到自然科学和工程技术的各个领域，甚至也应用到了众多的社会科学的领域．随着四化建设的发展，概率论与数理统计的普及推广和深入研究必将展现出更为广阔的前景．正因为这样，概率论与数理统计已成为高等学校许多专业的必修课程之一，并且是科学技术人员和广大教师进行科学研究工作必须掌握的重要工具之一．

编者的话

这本教材是根据甘肃省高校教材建设规划，在编者多次使用过的讲义基础上，按照国家教委师范司1989年颁布的二年制师范专科学校数学专业概率论与数理统计教学大纲，并总结多年的教学经验和原讲义使用情况编写而成的．编写工作由樊修睦同志负责主持．全书共六章，前三章由樊修睦同志编写，并在其参与下，后三章由徐兆强同志编写，最后由樊修睦同志统一修改定稿．

这本教材编写完成后，经甘肃省教材建设指导委员会组织评审通过，推荐出版，随后又经高等学校理科数学教材编审委员严士健教授主持的审稿会审订，可作为二年制师范专科学校教材．

在编写中，考虑到师范专科学校的特点，内容着重以介绍基本知识和方法为主，注意阐述它的直观背景和实际意义，力求语言叙述通畅，准确明晰，重点突出，便于自学．本书自始至终贯彻理论与实际相结合的原则，着眼于培养分析问题和解决问题的能力．另外，本书既达到了教学大纲的要求，又使阅读本教材并不要求具备实变函数论和测度论的知识，有关定理都给出了证明，只有个别用到较深数学知识的定理没有给出证明．

这本教材的每章之后，都配有足够数量的习题，读者可以选做；在书后附有习题答案，可供解题时参考．这些习题有助于读者进一步深入体会和掌握教材内容，读者要争取多做．

按这本教材教学，需要60学时，带“*”号的内容，可根据各学校的实际情况选学．

本书作为专科层次的其他专业的概率论与数理统计课程的教

材也是适用的。

这本教材在编写中，许多同志给予了热情的支持和帮助，特别是刘秀芳副教授详细审阅了全部书稿，提出了许多宝贵的意见，并具体进行了修改，在此一并表示感谢。

由于编者水平所限，疏漏之处难免，欢迎给予批评指正。

编者

1989.12.20

目　录

第一章 随机事件及其概率

§1.1 随机试验和随机事件

为了研究随机现象的统计规律，常常需要对随机现象进行观察. 我们把对随机现象进行的观察或为此而进行的实验都称为试验，而称观察所得的结果为试验的结果. 我们知道对于一个随机现象，在同样条件下进行多次观察，每次得出的结果不完全一样，有多种可能的结果，而且每次观察之前不能预知出现什么结果. 所以，对于我们所说的试验，概括起来都具有以下三个特点:

(1) 试验可以在同样的条件下重复进行;

(2) 试验有多种可能的结果，并且能事先明确知道试验的所有可能结果会是些什么;

(3) 每次试验总是恰好出现可能结果中的一个，但是试验之前却不能肯定这次试验会出现可能结果中的哪一个结果.

在概率论中，我们将具有以上三个特点的试验称为随机试验，简称试验，常用 E 表示，不同的随机试验可用下标区别.

一个随机试验 E 的所有可能结果的集合称为样本空间，用 Ω 表示. 样本空间 Ω 的元素，即试验 E 的每一个可能的结果，我们称为样本空间 Ω 的样本点，常用 ω 表示，对于不同的样本点可用下标区别.

一般地，样本空间 Ω 可以是有限集合，也可以是可列*的无限

* 可列又称为可数. 当一个集合中元素可与自然数集建立一一对应的关系时，此集合称为可列(或可数)集.

集合，甚至是不可列的无限集合.

例 1.1 E: 掷一枚均匀的硬币，观察朝上的一面，可能是刻有国徽的一面(正面)，也可能是刻有币值的一面(反面). 如果用 ω_0 表示“反面”朝上，ω_1 表示“正面”朝上，于是样本空间由两个样本点 ω_0 和 ω_1 组成，即

$$\Omega=\{\omega_0,\omega_1\}.$$

例 1.2 E: 一个盒子中有十个完全相同的球，球上分别标有号码 1，2，…，10，从中任取一个球，令

$\omega_i=$“取得第 i 号球”，$i=1,2,\cdots,10$，

则样本空间由 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}$ 组成，即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}.$$

对于本例，有时为了简便起见，常取 $\omega_i=i\,(i=1,2,\cdots,10)$，从而

$$\Omega=\{1,2,\cdots,10\}.$$

例 1.3 E: 观察某电话交换台在单位时间内接到的呼唤次数，可能为 0 次，1 次，2 次，…，如果令

$\omega_i=$“接到的呼唤次数为 i 次”，$i=0,1,2,\cdots$，

则样本空间 Ω 由 $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots$ 组成，即

$$\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}.$$

为简便起见，有时就取 $\omega_i=i\,(i=0,1,2,\cdots)$，则样本空间 Ω 就可以表示为

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}.$$

例 1.4 E: 测量某地水的温度，令

$t=$“测得的水的温度为 t°C”，$0\leqslant t\leqslant 100$，则样本空间

$$\Omega=\{t\text{°C}:0\leqslant t\leqslant 100\}.$$

对于一个随机试验 E，除了弄清楚样本点 ω 和样本空间 Ω 外，我们还关心带有某些特征的试验结果是否发生. 例如，在例 1.2

中，要考察“球的号码是偶数”、“球的号码$\leqslant 5$”、“球的号码恰好是6”等等事情是否发生. 显然，它们都由一些样本点构成:

$$\text{“球的号码是偶数”}=\{2,4,6,8,10,\},$$
$$\text{“球的号码}\leqslant 5\text{”}=\{1,2,3,4,5,\},$$
$$\text{“球的号码恰好是6”}=\{6\}.$$

我们看到，这些事情在试验中可能发生，也可能不发生. 像这样在试验中可能发生也可能不发生的事情，我们称为随机事件，用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示，有时以$\{\cdots\cdots\}$表示事件，大括号中指明该事件的内容，例如

$$A=\text{“球的号码是偶数”}=\{2,4,6,8,10\},$$
$$B=\text{“球的号码}\leqslant 5\text{”}=\{1,2,3,4,5\},$$
$$C=\text{“球的号码恰好是 6”}=\{6\}.$$

且它们都是随机事件. 由此可以看出，一个随机事件不过是样本空间 Ω 的一个子集. 像上面的随机事件 C 由一个样本点构成，称为基本事件，而随机事件 A 和 B 都由多个样本点构成，相对于基本事件，称为复合事件.

对于一个样本空间 Ω，如果用 ω 表示它的样本点，则所有单元素集$\{\omega\}$都称为这个样本空间 Ω 的基本事件. 但是，以后为了方便起见，常常把样本点和基本事件不严格区别，统一都叫基本事件，在使用时，只要注意区分具体场合中是指样本点还是样本点的单元素集，这样便不会引起混乱.

如果一个试验中，基本事件 ω 发生，而随机事件包含有这个基本事件ω，则这个随机事件在试验中就发生. 例如，A 是一个随机事件，如果基本事件 $\omega\in A$，则在这个试验中当基本事件ω 发生时，事件 A 就发生. 例如，事件 A 就是前面的事件“球的号码是偶数”，则当试验中基本事件 2,4,6,8,10 中任一个发生时，此事件便发生.

由于样本空间Ω由所有基本事件组成，而在任何一次试验中，都必然要出现某一个基本事件 ω，所以样本空间Ω作为一个事件来考虑的话．它在每次试验中都必然发生．像这样在每一次试验中都必然发生的事件称为必然事件，用表示样本空间Ω的同样的符号Ω表示．例如，在例 1.2 中，事件“球的号码$\leqslant 10$”$=\{1,2,\cdots,10\}$包含所有的基本事件，它在每次试验中都必然发生，就是一个必然事件．这里要注意，对于一个具体的试验来说，必然事件的表述往往是不唯一的，可以有不同的表达方式，但是其实质完全是一样的．例如，在例 1.2 中，必然事件 Ω 也可以表述为“球的号码<12”或“球的号码<15”等等，其实这些不同的表述都是一样的，即 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$．

同样，我们用$\varnothing$表示样本空间 Ω 的空子集，即对于任何一个基本事件ω都有 $\omega \overline{\in} \phi$．这样，在每一次试验中，$\varnothing$作为一个事件来看的话，它都是不可能发生的．像这样在任何一次试验中必然不会发生的事情称为不可能事件，用表示空集的同样的符号$\varnothing$表示．例如，在例 1.2 中，事件“球的号码>10”，或事件“球的号码<0”等等都不包含任何一个基本事件，它们在任何一次试验中都必然不会发生，就是不可能事件．显然，不可能事件的表述也是不唯一的，但实质是完全一样的．

必然事件 Ω 和不可能事件$\varnothing$已失去“不确定性”，本质上不是随机事件，但为了方便起见，把它们看做随机事件的两个极端情形．

§ 1.2 事件之间的关系和运算

在一个随机试验中可以观察到很多事件，它们各有其特点，相互之间又有一定的联系．概率论的任务之一，就是要研究事件之间相互关系的规律，通常的方法是通过对较简单的事件的规律的

研究,去掌握更复杂的事件的规律.因此,我们需要讨论事件之间的关系和运算. 在讨论中,假定已经给了一个样本空间 Ω 以及其中的一些事件 $A,B,C,\cdots$,并使用维恩(Venn)图辅助说明所讨论的事件间的关系和运算.

1. 包含关系

如果事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含在事件 B 中,或事件 B 包含事件 A,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

例如,在例 1.2 中,事件

A=“球的号码是小于 5 的偶数”$=\{2,4\}$,

B=“球的号码是偶数”$=\{2,4,6,8,10\}$,

则

$$A\subset B,\text{或 } B\supset A.$$

由此看出,事件 B 包含事件 A,意即属于事件 A 的基本事件一定都是属于 B 的,其直观形象如图 1.1 所示.

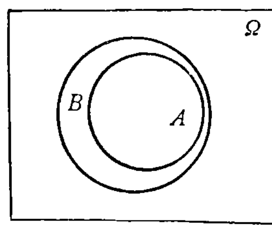

图 1.1

对于包含关系显然成立:

(1) 对于任一事件 A,我们约定 $\phi\subset A$,则 $\phi\subset A\subset\Omega$;

(2) 如果 $A\supset B$,且 $B\supset C$,则 $A\supset C$.

2. 相等关系

如果事件 $A\subset B$ 和 $B\subset A$ 同时成立,则称事件 A 与事件 B 相等或等价,记作 $A=B$.

从事件是样本空间的子集来看,事件 A 与事件 B 相等,就是事件 A 与事件 B 所含的基本事件完全相同. 由此可见,如果 $A=B$,且 $B=C$,则 $A=C$.

上面关于事件 A 与 B 相等的概念似乎有点“绕圈子”,实际上是将相等概念用更简单的包含概念来表达,以后会明白,它对于验

证两个事件是否相等，将是非常有用的.

3. 事件的和(并)

事件 A 与 B 的和(并) 是由至少属于它们之中的一个事件的全体基本事件构成的事件，记作 $A \cup B$.

例如，在例 1.2 中，事件

A="球的号码是偶数"$=\{2,4,6,8,10\}$,

B="球的号码$\leqslant 5$"$=\{1,2,3,4,5\}$,

$A\cup B$="球的号码为 1,2,3,4,5,6,8,10"$=\{1,2,3,4,5,6,8,10\}$.

由此看出，事件 A 与 B 的和 $A\cup B$ 的直观形象就是图 1.2 中的阴影部分.

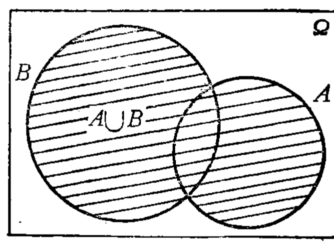

图 1.2

对于任一事件 A，有

(1) $A\cup A=A$;

(2) $\Omega\cup A=\Omega$;

(3) $\phi\cup A=A$.

事件的和的概念可以推广到有限多个事件和可数个事件的情形.

n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和(并)是由至少属于它们之中的一个事件的全体基本事件构成的事件，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

可数个事件 $A_1, A_2, \cdots$的和 (并)是由至少属于它们之中的一个事件的全体基本事件构成的事件，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots$或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

4. 事件的积(交)

事件 A 与 B 的积(交) 是由同时属于它们的全体基本事件构

成的事件，记作 $A\cap B$ 或 AB.

例如，对于上款所举的事件 A 与 B，有

$$AB=\text{“球的号码为 }2,4\text{”}=\{2,4\}.$$

由此看出，事件 A 与 B 的积 AB 的直观形象就是图 1.3 中的阴影部分.

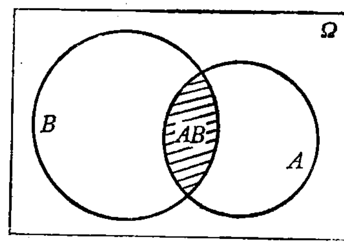

图 1.3

对于任二个事件 A 和 B，有

$$AB\subset A\subset A\cup B;$$

$$AB\subset B\subset A\cup B.$$

当 $A\subset B$ 时，有

$$A\cup B=B;\qquad AB=A.$$

容易验证，对于事件求和及求积的运算满足：

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(3) 分配律 $A(B\cup C)=AB\cup AC$;

$$A\cup BC=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

事件的积的概念可以推广到有限个事件和可数个事件的情形.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积(交)是由同时属于它们的全体基本事件构成的事件，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

可数个事件 $A_1,A_2,\cdots$的积（交）是由同时属于它们的全体基本事件构成的事件，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots$或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

5. 事件的差

事件 A 与 B 的差是由属于事件 A 但不属于事件 B 的全体基本事件构成的事件，记作 $A-B$.

例如，对于上两款中所举的事件 A 与 B，有

$A-B=$"球的号码为 6,8,10"$=\{6,8,10\}$.

由此看出，事件 A 与 B 的差 $A-B$ 的直观形象就是图 1.4 中的阴影部分.

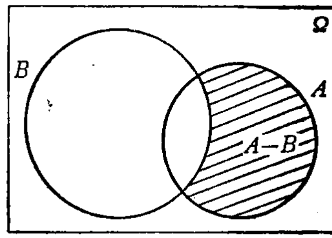

图 1.4

对于任一事件 A，有

(1) $A-A=\varnothing$;

(2) $A-\Omega=\varnothing$;

(3) $A-\varnothing=A$.

6. 互斥事件(互不相容事件)

如果事件 A 与 B 不可能同时发生，则称事件 A 与 B 为互斥事件或互不相容事件.

例如，在例 1.2 中，事件

$A=$"球的号码>6"$=\{7,8,9,10\}$.

$B=$"球的号码$\leqslant 4$"$=\{1,2,3,4\}$.

这里的事件 A 与 B 就是互斥事件，这时事件 A 包含的基本事件与事件 B 包含的基本事件没有共同的. 这说明对于二事件 A 与 B，如果 $A\cap B=\varnothing$，则事件 A 与 B 就是互斥事件，其直观形象如图1.5所示.

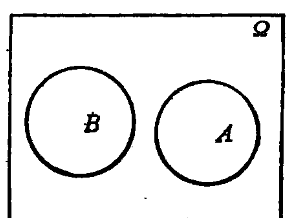

图 1.5

互斥事件的概念可以推广到有限多个事件的情形.

如果 n 个事件 $A_1,A_2\cdots$, A_n 中任意两个事件都不可能同时发生，即 $A_iA_j=\varnothing$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots n$, 则称事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 两