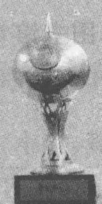
读书是最美的姿态　*Reading is most graceful*

6

拓展数学课堂系列读本——走进数学乐园

华罗庚实验学校
数学课本



六年级

丛书编委会

顾　　问：肖承运　徐伟宣
主　　任：曹少华
副 主 任：周怡和　陈国富　吕水庚　杨国华　吴友庚
丛书编委：潘小本　贺小黑　佘双富　张　俊　陈　斌　李继锋
　　　　　谭年平　戴苏庆　冯建伟　孔粉富　王　权　潘建明
　　　　　蒋守成　孟国伟
丛书主编：吕水庚
小学主编：杨国华
本册主编：李　逸
本册编写：李　逸　孟国伟　蒋守成　王益琴　朱亚云

吉林出版集团有限责任公司

前言

为纪念华罗庚教授诞辰一百周年，华罗庚实验学校名师工作室特别为同学们奉献了这套《华罗庚实验学校数学课本》。它是向九年制数学素质教育更高目标进军的杰作，是华罗庚实验学校全体数学老师数十年教学智慧的结晶。华罗庚教授的一生是勤奋好学的一生，是自学成才的典范。他的格言“天才在于积累，聪明在于勤奋”充分地阐释了这一成功的秘诀。在数学学习上，相信你只要勇于攀登，不断超越，就一定会在美妙的数学乐园中玩转数学摩天轮。《华罗庚实验学校数学课本》将带你遨游数学的海洋，给你增添无限的智慧。

《华罗庚实验学校数学课本》依据现行数学课程标准，紧密结合当前九年义务教育数学教材，力求体现创新的元素：内容创新体现数学来源于现实；呈现方式创新体现让学生自主探究；结构创新体现不同的人学习不同的数学。它的每一章节都分为三部分：知识要点、典例评析和巩固练习。“知识要点”便于同学们在自学前即了解其结构脉络与学习要求，以提高同学们自主探究的针对性；“典例评析”精选了与现学数学课本内容、生活紧密相联的内容作为载体，引领同学们进行自主探究，学会学习；“巩固练习”主要目的是让同学们在练习中进一步体验自主学习所带来的成功感受，题目设置注意了问题的层次性，其中有与例题紧密配套的基本题，只要同学们模仿“典例”即可完成，也有极少数题目需要发挥你的聪明才智，灵活运用所学的知识进行思考。

总之，《华罗庚实验学校数学课本》的定位是要让同学们奠定扎实的数学基础，在动手实践、自主探索、合作交流的学习过程中促进数学思维更好地发展，让每一位同学都能走进数学的乐园，享受学习数学所带来的无限乐趣。它将成为教师的好参谋，为教师的教学提供更好的教学素材，以不断提高当前的课堂教学效益。它也会成为家长们辅导孩子学好数学的好帮手，在不加重孩子学习负担的前提下，与孩子一道分享探索与思考的乐趣，感受孩子成长的喜悦。

衷心祝愿每位同学都能在“数学乐园”里尽情畅游，快乐成长。《华罗庚实验学校数学课本》为你们插上思维飞翔的翅膀，为你们的终生发展奠定坚实的基础。

华罗庚金杯全国少年数学邀请赛组委会副主任
主试委员会主任委员
中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长

徐坤宝

目录

上 篇

下 篇

上篇

第一讲　分数的大小比较

知识要点

一、一般方法

在分数的大小比较中，一种是同分母分数或同分子分数的大小比较。如果两个分数分母相同，分子大的那个分数比较大；如果两个分数的分子相同，分母小的那个分数比较大。另一种是分母分子都不相同的分数的大小比较，在小学数学课本中主要通过通分，转化为同分母分数再比大小，但是在有些情况下，也可以统一两个分数的分子后再比较大小。

二、特殊方法

1. 相减比较法：如果两数相减，差大于零，减数就小。

2. 相除比较法：如果两数相除，商是真分数，则被除数小于除数；若商是假分数，则被除数大于或等于除数。

3. 交叉相乘法：分数$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$，如果 $ad>cb$，则$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$。

4. 倒数比较法：倒数大的分数小于倒数小的分数。

5. 转化比较法：可以把分数化成小数或循环小数比较大小。

三、比较关键

因为题目的变化较大，所以在解题中必须认真分析，要学会多角度、多侧面思考问题，灵活运用解题方法，不断开拓解题思路，提高解题能力。

典例评析

例 1　分数$\frac{5}{12}$、$\frac{12}{19}$、$\frac{10}{23}$、$\frac{4}{7}$、$\frac{15}{22}$中，哪一个分数最大？

【分析】　这 5 个分数的分子和分母都不相同，用我们常规的统一分母的方法计算的量比较大，不可取，统一分子则明显要容易的多。

【解答】　[5,12,10,4,15]=60，根据分数的性质，$\frac{5}{12}=\frac{60}{144}$、$\frac{12}{19}=\frac{60}{95}$、$\frac{10}{23}=\frac{60}{138}$、$\frac{4}{7}=\frac{60}{105}$、$\frac{15}{22}=\frac{60}{88}$，分子相同的分数，分母小的分数大，所以这五个分数中最大的分数是$\frac{15}{22}$。

【说明】 本题打破常规，巧妙地运用了统一分子来比较大小的方法，使计算简便。

例 2 比较$\frac{666665}{666667}$和$\frac{777776}{777778}$的大小。

【分析】 这两个分数的分子和分母都很接近，且都相差 2，可以先分别求出它们与 1 的差，比较这两个差，再比较这两个分数。

【解答】 $\frac{666665}{666667}=1-\frac{2}{666667}$，

$\frac{777776}{777778}=1-\frac{2}{777778}$，

因为 $\frac{2}{666667}>\frac{2}{777778}$，

所以 $1-\frac{2}{666667}<1-\frac{2}{777778}$，

即 $\frac{666665}{666667}<\frac{777776}{777778}$。

【说明】 解决本题时，将两个分数的直接比较，转化为比较它们与另一个相同数的差来进行间接比较，今后学习中，我们经常要用到"递推比较法"来解决有关问题。

例 3 比较 $1995\frac{1993}{1994}+1994\frac{1992}{1995}$和 $1996\frac{1993}{1994}+1993\frac{1992}{1995}$的大小。

【分析】 根据这两组数的特点，可以发现如果求出和再比大小，则计算的量较大，如果采用"相减比较法"的话，会发现它的独到之处。

【解答】 $\left(1995\frac{1993}{1994}+1994\frac{1992}{1995}\right)-\left(1996\frac{1993}{1994}+1993\frac{1992}{1995}\right)$

$=\left(1995+\frac{1993}{1994}+1994+\frac{1992}{1995}\right)-\left(1996+\frac{1993}{1994}+1993+\frac{1992}{1995}\right)$

$=[(1995+1994)-(1996+1993)]+\left[\left(\frac{1993}{1994}+\frac{1992}{1995}\right)-\left(\frac{1993}{1994}+\frac{1992}{1995}\right)\right]$

$=0+0$

$=0$

所以 $1995\frac{1993}{1994}+1994\frac{1992}{1995}=1996\frac{1993}{1994}+1993\frac{1992}{1995}$。

【说明】 本题不求和反求差来比较两个和的大小，可见灵活选择合理方法的重要性。

例 4 比较下列三个分数的大小：$\frac{4443}{5554}$，$\frac{5557}{6668}$，$\frac{6668}{7779}$。

【分析】 对于这三个分数，无论化分母为相同(即"通分母")还是化分子为相同(即"通分子")都不太方便。这里可以先讨论它们的倒数，根据倒数愈大，原分数反而愈小(即分子均为 1，分母大的分数反而小)。

【解答】 $\frac{4443}{5554}$的倒数为$\frac{5554}{4443}=1+\frac{1111}{4443}$，

$\frac{5557}{6668}$的倒数为$\frac{6668}{5557}=1+\frac{1111}{5557}$，

$\frac{6668}{7779}$的倒数为$\frac{7779}{6668}=1+\frac{1111}{6668}$。

由于$\frac{1111}{4443}>\frac{1111}{5557}>\frac{1111}{6668}$，

所以$\frac{4443}{5554}<\frac{5557}{6668}<\frac{6668}{7779}$。

【说明】 利用"倒数比较法"是比较分数大小的一种常用的手段。

例 5 比较大小：$\frac{218191}{654321}$和$\frac{152347}{456789}$。

【分析】 本题可以用"倒数比较法"(见上例方法)，这还可以用借助第三个分数进行比较的方法.注意到这两个数都比$\frac{1}{3}$略大，于是可以借助于$\frac{1}{3}$来比较大小。

【解答】 $\frac{218191}{654321}-\frac{1}{3}=\frac{84}{654321}$，$\frac{152347}{456789}-\frac{1}{3}=\frac{84}{456789}$。

前一个差比较小，故$\frac{218191}{654321}<\frac{152347}{456789}$。

【说明】 作差比较，变繁为易。

例 6 如果$A=\frac{111111110}{222222221}$，$B=\frac{444444443}{888888887}$，那么$A$与$B$中较大的数是哪一个？

【分析】 为了便于比较它们的大小，首先使它们的分母尽量接近，为此，我们把A的分子与分母同时扩大4倍。

【解答】 $A=\frac{444444440}{888888884}$。

容易看出：

$B=\frac{444444440+3}{888888884+3}$。

因此，可以根据"一个真分数分子与分母同时加上一个相同的自然数，所得到的新分数比原分数大"的道理，得出B大于A的结论，故A与B中较大的数是B。

【说明】 合理变形，是我们解决问题常用的一种手段。

巩固练习

1. 请选择正确答案的序号填入小括号里。

(1)将$\frac{579}{580}$、$\frac{44}{45}$、$\frac{1652}{1653}$这三个分数按从小到大的顺序排列起来是 (　　)

①$\frac{579}{580}<\frac{44}{45}<\frac{1652}{1653}$　②$\frac{44}{45}<\frac{579}{580}<\frac{1652}{1653}$　③$\frac{1652}{1653}<\frac{44}{45}<\frac{579}{580}$

(2)将$\frac{777}{9999}$、$\frac{7777}{99999}$和$\frac{777+7777}{9999+99999}$三个分数按从大到小的顺序排列起来是 (　　)

①$\frac{7777}{99999}<\frac{777+7777}{9999+99999}<\frac{777}{9999}$　②$\frac{777}{9999}<\frac{7777}{99999}<\frac{777+7777}{9999+99999}$　③$\frac{777}{9999}<$

$\frac{777+7777}{9999+99999}<\frac{7777}{99999}$

2. 用“>”将$\frac{16}{15}$、$\frac{7}{9}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{17}{11}$、$\frac{7}{8}$、$\frac{8}{7}$、$\frac{2}{3}$连接起来是　　（　　）

①$\frac{16}{15}>\frac{7}{9}>\frac{4}{5}>\frac{17}{11}>\frac{7}{8}>\frac{8}{7}>\frac{2}{3}$　②$\frac{17}{11}>\frac{8}{7}>\frac{16}{15}>\frac{4}{5}>\frac{7}{9}>\frac{7}{8}>\frac{2}{3}$　③$\frac{17}{11}>\frac{8}{7}>\frac{16}{15}>\frac{7}{8}>\frac{4}{5}>\frac{7}{9}>\frac{2}{3}$

3. 比较下面五个分数的大小，排在中间的是　　（　　）

①$\frac{10}{519}$　②$\frac{14}{725}$　③$\frac{15}{776}$　④$\frac{21}{1088}$　⑤$\frac{35}{1814}$

4. 比较右边两个分数的大小：$\frac{55554}{55557}$（　　　）$\frac{66667}{66670}$。

5. 比较右边两个分数的大小：$\frac{12346}{98764}$（　　　）$\frac{12345}{98765}$。

6. 比较右边两个分数的大小：$\frac{43^{2001}}{43^{2000}}$（　　　）$\frac{43^{2001}-2001}{43^{2000}-2001}$。

7. 比较下面四个算式的大小：

$\frac{1}{11}+\frac{1}{33}$，$\frac{1}{12}+\frac{1}{29}$，$\frac{1}{13}+\frac{1}{25}$，$\frac{1}{14}+\frac{1}{21}$

8. 有八个数，$0.\dot{5}\dot{1}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{9}$，$0.5\dot{1}$，$\frac{24}{47}$，$\frac{13}{25}$是其中的六个，如果从小到大排列时，第四个数是$0.5\dot{1}$，那么从大到小排列时，第四个数是多少？

9. 如果$A=\frac{111110}{222221}$，$B=\frac{444443}{888887}$，那么A和B中较大的是哪个？

10. 求$\frac{9}{10}+\frac{99}{100}+\frac{999}{1000}+\cdots+\frac{99999999999}{100000000000}$的整数部分。

第二讲　解方程与列方程解决实际问题(二)

知识要点

一元一次方程

1. 方程和方程的解:含有未知数的等式统称为方程。方程最基本的问题是要求出未知数的数值,使等式成立,这个数值称为方程的“解”,这一求解的过程就叫“解方程”。

2. 一元一次方程:只含有一个未知数且未知数的指数是 1 的方程叫做一元一次方程。

3. 解一元一次方程的一般步骤:(1)去分母;(2)去括号;(3)移项;(4)合并同类项,化为最简形式 $ax=b$;(5)方程两边同除以未知数的系数,得出方程的解。

4. 形如 $ax=b$ 的方程的解:

(1)$a\neq0$ 时,有唯一解 $x=\dfrac{b}{a}$;

(2)$a=b=0$ 时,有无穷多个解;

(3)$a=0,b\neq0$ 时,无解。

5. 解方程的依据:方程的同解原理

如果两个方程的解相同,那么这两个方程同解。

方程的两边同时加上(或减去)同一个数或者代数式,得到的新方程和原方程同解。

方程的两边同时乘以(或除以)同一个不等于 0 的数或代数式,得到的新方程和原方程同解。

应用问题是小学数学的重要内容.它与现实生活有一定的联系,它通过量与量的关系以及图形之间的度量关系,形成数学问题。应用数学去解决各类实际问题时,建立数学模型是十分关键的一步,同时也是十分困难的一步。常用的数学模型就是方程(组)。应用问题涉及较多的知识面,要求学生灵活应用所学知识,在具体问题中,从量的关系分析入手,设定未知数,发现等量关系列出方程,获得方程的解,并代入原问题进行验证。

常见的应用题有:行程问题,工程问题,浓度问题,数字问题,打折销售问题,图形问题等。

列方程解应用题的一般步骤:审题(找出题目中的相等关系),设未知数,列方程(组),解方程(组),回答问题。

设未知数是列方程解应用题的关键步骤,常见的设未知数的方法有:(1)直接设法(即问什么设什么);(2)间接设法(当直接设未知数不易表示问题中的相等关系时,可选择与所求量相关的未知数,帮助列出方程);(3)辅助设法(也就是常说的设而不求,题目中常有些未知的常量,不设出来难以表示相关的量,因此常设为参数,帮助思考);(4)整体设法(题目中未

知量多，而又存在整体与部分的关系，则可整体设元，减少未知数的个数）。

典例评析

例 1 课桌每张 a 元，椅子每把 b 元，买 m 套课桌椅共付（　　）元，如果 $a=35$，$b=25.4$，$m=100$ 时，共付（　　）元。

【分析】 根据题目的条件可以知道，总价等于课桌的钱数加上椅子的钱数. 用字母表示是：$am+bm$ 或 $(a+b)\times m$。把具体的数量代入式子中，即可求出共付的钱数。

【解答】 买 m 套课桌椅共付 $(a+b)\times m$，即 $(35+25.4)\times 100=6040$（元）

【说明】 根据题目中的条件列出含有字母的式子，再把具体的数量代入式子中就可以求出总价钱。

例 2 解方程 $(3x-1.2)\times 0.25=1.2$

【分析】 根据等式的性质，在等式的两边同时除以相同的数，等式不变，所以先在等式两边同时除以 0.25，得到 $3x-1.2=1.2\div 0.25$，再运用等式的性质，在等式的两边同时加上 1.2，得到 $3x=1.2\div 0.25+1.2$，最后按照以前学过的解简易方程的方法解答。

【解答】 $(3x-1.2)\times 0.25=1.2$

$$3x-1.2=1.2\div 0.25$$
$$3x-1.2=4.8$$
$$3x=4.8+1.2$$
$$x=6\div 3$$
$$x=2$$

【说明】 应用等式的性质来解方程，就是在方程的两边不断地同时加、减、乘、除，保持等式不变，直到求出方程的解。

例 3 解方程 $5.6x=17.28-4x$。

【分析】 方程中未知数在等式的两边，可以用等式的性质把未知数移到一边以后，再解。

【解答】 $5.6x=17.28-4x$

$$5.6x+4x=17.28$$
$$9.6x=17.28$$
$$x=17.28\div 9.6$$
$$x=1.8$$

【说明】 未知数在等式两边时，一般都要把未知数先移到一边，再解方程。

例 4 甲、乙两辆汽车同时从 A 地出发，向相反的方向行驶，甲车每小时行 30 千米，乙车每小时行 40 千米，经过多少小时后，两车相距 245 千米？

【分析】 根据路程和等于甲车行驶的路程加上乙车行驶的路程，就可以列出数量关系，再列方程解答。

【解答】 设经过 x 小时两车相距 245 千米。

$30x+40x=245$

$70x=245$

$x=3.5$

答：经过 3.5 小时两车相距 245 千米。

【说明】 在行程问题中，路程、速度、时间之间的关系通常就是列方程时要找的数量关系。

例 5 学校今年的绿化面积是 1800 平方米，比去年绿化面积的 2 倍还多 40 平方米，去年绿化面积是多少平方米？

【分析】 根据题目的条件可以得出这样的等量关系：去年的面积×2＋40＝今年的面积，只要设去年绿化的面积为 x，根据等量关系就可以列出方程。

【解答】 设去年的绿化面积为 x 平方米。

$2x+40=1800$

$2x=1800-40$

$x=1760\div 2$

$x=880$

答：去年的绿化面积为 880 平方米。

【说明】 在几倍多几或少几的应用题中，一般采用解方程比较容易解决。

例 6 六年级有甲、乙两个班，甲班有 56 人，乙班有 30 人，从甲班调几人到乙班，才能使乙班人数比甲班的 2 倍少 10 人？

【分析】 从甲班调走 x 人，乙班就增加 x 人，这样两个班现在的人数之间就有"2 倍少 10 人"的关系，由此可以列出等式。

【解答】 设从甲班调走了 x 人。

$30+x=2\times(56-x)-10$

$30+x=112-2x-10$

$3x=112-10-30$

$x=24$

答：从甲班调走了 24 人到乙班。

【说明】 从题目的条件中寻找数量关系，通常根据题目中变化后的两种数量之间的关系来找。

例 7 一个六位数，左边的第一位数字是 1，如果把这个数字移到最右边，那么所得的六位数字是原数字的 3 倍，求原数。

【分析】 因为这个六位数的左边第一位是 1，其余的数字不知道，我们就可以设剩下的五位数字为 x，那么原六位数字就可以表示为 $100000+x$，新的六位数字可以表示为 $x\times 10+1$，这样可以根据原六位数和新六位数之间的 3 倍关系列出等式。

【解答】 六位数的左边第一位是 1，设剩下的五位数字为 x，那么原六位数字就可以表示为 $(100000+x)$，新的六位数字可以表示为 $(x\times 10+1)$。

$x\times 10+1=(100000+x)\times 3$

$10x-3x+1=300000$

$7x=299999$

$x=42857$

$100000+42857=142857$

答：原数是142857。

【说明】 在解答有些实际应用的问题时，往往不能直接设所求的问题为x，而是设其中的某些关键量为x，这样列出方程解答后，再求问题的答案。

巩固练习

1. 解方程。

$48-2.4x=28.8$ $\qquad$ $23.46\div3x=4.6$

2. 解方程并验算。

$3x-0.5x=2.8$ $\qquad$ $5.64+3.2x=21$

3. 解方程。

$3x-7.2+2.8=5.2$ $\qquad$ $20+4x=6x-24$

4. 一个平行四边形的面积是25平方厘米，底是4厘米，高是多少厘米？

5. 一个平行四边形的高是12厘米，它的面积和一个长是18厘米、宽是6厘米的长方形

面积相等，这个平行四边形的底是多少厘米？

6. 甲车每小时行 48 千米，乙车每小时行 46 千米，两车从相距 12 千米的两地同时背向而行，几小时后两车相距 294 千米？

7. 甲、乙两车同时从相距 528 千米的两地相向而行，6 小时相遇，甲车每小时比乙车每小时多行 6 千米，甲、乙两车的速度各是多少？

8. 洗衣机厂今年日生产洗衣机 260 台，比去年的日产量的 2.5 倍少 40 台，去年平均日产洗衣机多少台？

9. 一匹布长 36 米，可以做 10 件上衣和 8 条裤子，每件上衣用布 2.4 米，每条裤子用布多少米？

10. 四个连续自然数的和是 390，求其中最大的一个自然数。

第三讲　逻辑推理

知识要点

一、逻辑推理问题的现实作用

人的素质包含生活习惯、道德品质、各种能力、学习成绩、处世态度、……无可否认，能力是素质的重要组成部分。素质教育应该包含提高学生的各种能力：工作能力、自学能力、逻辑思维能力、理论联系实际能力、形象思维能力、空间想象能力、计算能力、……其中与数学有紧密关系的就有逻辑推理、举一反三、寻找规律、从特殊到一般、从简单到复杂等等。我们这里要说到的主题是，华杯赛命题与逻辑思维等能力的培养之间的关系。

二、逻辑推理问题的含义及其一般解决方法

许多有趣的题目都是从题设的一些相关联的条件出发，经过分析推理，排除不可能的情况，得出正确的结论，习惯上把这类题目称为逻辑推理题。

世界上所有的客观事物都是互相关联、互相影响的，往往具有某种因果关系。一个判断是从某几个判断中推出来的，如果把这某几个判断叫做前提，那么由此推出来的判断就叫做结论。逻辑推理的问题不需要专门的数学知识，而是考查思维能力、判断能力以及全面考察问题的能力。

解答这类问题，首先要从所给的条件中理清各部分之间的关系，然后进行分析推理，排除一些不可能的情况，逐步归纳，找到正确的答案。

典例评析

例 1　数学竞赛后，小明、小华、小强各获得一枚奖牌，其中一人得金牌，一人得银牌，一人得铜牌。王老师猜测："小明得金牌；小华不得金牌；小强不得铜牌。"结果王老师只猜对了一个。那么小明得________牌，小华得________牌，小强得________牌。

【分析】　逻辑问题通常直接采用正确的推理，逐一分析，讨论所有可能出现的情况，舍弃不合理的情形，最后得到问题的解答。这里以小明所得奖牌进行分析。

【解答】　①若"小明得金牌"时，小华一定"不得金牌"，这与"王老师只猜对了一个"相矛盾，不合题意。

②若小明得银牌时，再以小华得奖情况分别讨论。如果小华得金牌，小强得铜牌，那么王老师没有猜对一个，不合题意；如果小华得铜牌，小强得金牌，那么王老师猜对了两个，也不合题意。

③若小明得铜牌时,仍以小华得奖情况分别讨论。如果小华得金牌,小强得银牌,那么王老师只猜对小强得奖牌的名次,符合题意;如果小华得银牌,小强得金牌,那么王老师猜对了两个,不合题意。

综上所述,小明、小华、小强分别获铜牌、金牌、银牌。

【说明】 这是一道简单的逻辑推理题目,这类题目可以各式各样,因此没有什么特别的方法,就是需要同学们有良好的逻辑推理能力,而多做这类题目,对于同学们的逻辑推理能力也有很大的帮助。

例 2 现在有两堆石子,一堆 5 颗,一堆 8 颗。甲、乙两人轮流取石子,甲先乙后。规定每人每次只能在某一堆石子里边任意取走一些,但不能不取。谁取到最后一颗石子谁就赢。问:谁有必胜策略?

【分析】 如果只有一堆,那显然先取的人赢。因此,先把某一堆取完的人就是输家。

【解答】 我们从简单情况入手。

如果两堆各有一颗石子,显然甲必输。所以,如果有一堆是一颗石子而另一堆不止一颗石子,那么甲只需要先把另一堆拿得剩下一颗石子即可获胜。

如果两堆各有两颗石子,显然甲必输。他无论把其中一堆全拿走还是只拿一颗,都无法挽回败局。

如果有一堆有两颗石子而另一堆不止两颗,那么甲先把另一堆拿得剩两颗即可获胜。

现在我们发现,如果一个人面临两堆石子颗数相同的话,那他要输,否则则可以获胜。所以,解答也就出来了。

甲先把 8 颗的那堆拿走 3 颗剩 5 颗。以下每次乙无论从哪堆里拿,甲就从另一堆里边拿同样多的石子,保持两堆石子颗数一直相等。这样,最终乙要有一次把其中一堆拿完,而下一次甲就可以把另一堆拿完从而获胜。

【说明】 这类问题叫做博弈问题。可以看出,获胜的一方,往往不是一两个回合就取得了胜利,而是在不断的操作过程中,一直保持某种局势而使另一方无法摆脱这种局势。当游戏进行到最后的时候,这种局势就可以使优势的一方稳稳地获胜了。

例 3 某校学生中,没有一个学生读过学校图书馆的所有图书,又知道图书馆内任何两本书至少被一个同学都读过,问:能不能找到两个学生甲、乙和三本书 A、B、C,甲读过 A、B,没读过 C,乙读过 B、C,没读过 A?说明判断过程。

【解法一】 首先从读书数最多的学生中找一人叫他为甲,由题设,甲至少有一本书 C 未读过,

设 B 是甲读过的书中的一本,根提题设,可找到学生乙,乙读过 B、C。

由于甲是读书数最多的学生之一,乙读书数不能超过甲的读书数,而乙读过 C 书,甲未读过 C 书,所以甲一定读过一本书 A,乙没读过 A 书,否则乙就比甲至少多读过一本书,这样一来,甲读过 A、B,未读过 C;乙读过 B、C,未读过 A。

因此可以找到满足要求的两个学生。

【解法二】 将全体同学分成两组。

若某丙学生所读的所有的书,都被另一同学全部读过,而后一同学读过的书中,至少有一本书,丙未读过,则丙同学就分在第一组。另外,凡一本书也未读过的同学也分在第一组,

其余的同学就分在第二组。

按照以上分组方法，不可能将全体同学都分在第一组，因为读书数最多的同学一定在第二组。

在第二组中，任找一位同学叫做甲，由题设有书 C，甲未读过，再从甲读过的书中任找一本书叫做 B，由题设，可找到同学乙，乙读过 B、C 书，由于甲属于第二组，所以甲一定读过一本书 A，乙未读过 A，否则甲只能分在第一组，这样，甲读过 A、B，未读过 C；乙读过 B、C，未读过 A。

【说明】 这是一个逻辑推理题，目的是考查同学们的推理能力，促进同学们加强逻辑推理能力的训练。解法一中从一个读书数最多的同学出发，也就是从具有某种特殊性的对象着手，这一方法是推理中常用到的，有些人称为“极端原则”。开始利用这一原则试一试，可以解决我们“无从着手”的难处，解法二中将同学们分成两组，但重要的一步是要说明第二组中一定有同学，正确地分组是解决这一问题的关键。

例 4 有三只盒子，甲盒装了两个 1 克的砝码；乙盒装了两个 2 克的砝码；丙盒装了一个 1 克、一个 2 克的砝码。每只盒子外面所贴的标明砝码重量的标签都是错的。聪明的小明只从一只盒子里取出一个砝码，放到天平上称了一下，就把所有标签都改正过来了。你知道这是为什么吗？

【分析】 解决本题的关键是确定打开哪只盒子：若打开标有“两个 1 克砝码”的盒子，则该盒的真实内容是“两个 2 克砝码”或“一个 1 克砝码，一个 2 克砝码”，当取出的是 2 克砝码时，就无法对其内容作出准确的判断。同样，打开标有“两个 2 克砝码”的盒子时，也会出现类似的情况。所以，应打开标有“一个 1 克砝码，一个 2 克砝码”的盒子。而它的真实内容应该是“两个 1 克砝码”或“两个 2 克砝码”。

【解答】 ①若取出的是 1 克砝码，则该盒一定装有两个 1 克砝码，从而标有“两个 2 克砝码”的盒子里，不可能是两个 2 克或两个 1 克的砝码，而只能是一个 1 克，一个 2 克的砝码了；标有“两个 1 克砝码”的盒子自然装有两个 2 克砝码。

②若取出的是 2 克砝码，同理可知，此盒装有两个 2 克砝码；标有“两个 1 克砝码”的盒子里实际上是一个 1 克和一个 2 克的砝码；标有“两个 2 克砝码”的盒子里实际上是两个 1 克砝码。

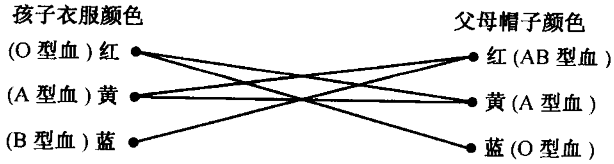
按以上的推理结果，小明就将全部标签改正过来了。

例 5 人的血型通常为 A 型，B 型，O 型，AB 型。子女的血型与其父母血型间的关系如下表所示：

父母的血型	O,O	O,A	O,B	O,AB	A,A	A,B	A,AB	B,B	B,AB	AB,AB
子女可能的血型	O	A,O	B,O	A,B	A,O	A,B,AB,O	A,B,AB	B,O	A,B,AB	A,B,AB

现有三个分别身穿红、黄、蓝上衣的孩子，他们的血型依次为 O、A、B。每个孩子的父母都戴着同颜色的帽子，颜色也分别为红、黄、蓝三种，依次表示所具有的血型为 AB、A、O。问：穿红、黄、蓝上衣的孩子的父母各戴什么颜色的帽子？（第五届“华杯赛”试题）

【分析】 通常处理这类题的办法，有假设反证法，排除法，图解示意法，列表推理法等。例如本题，也可结合使用图解及排除的方法来解决，如下图。



把代表孩子的点与他的可能的双亲的代表点之间连一直线段，便可得上面的图；由于孩子与其父母之间是唯一搭配的，所以，保存下来的只有连着红、蓝；黄、黄及蓝、红的三条直线段。

【解答】 题中表明，每个孩子的父母是同血型的。具有 B 型血的孩子，其父母同血型时，由表中可见，只能是 B 型或 AB 型，但题中没有同具 B 型血的父母，所以戴红帽子的父母的孩子穿蓝上衣。具有 A 型血的孩子的同血型的父母，只可能同为 A 型血或同为 AB 型血。今已知有一对父母 AB 型血者，所以穿黄上衣的孩子的父母戴黄帽子。由表中可见，其孩子为 O 型血时，父母血型只能同为 A 型或 B 型或 O 型。今已知不具有同为 B 型血的父母，而同为 A 型血的父母的孩子具有 A 型血。所以，穿红上衣(O 型血)孩子的父母戴蓝帽子。

答：穿红上衣的孩子的父母戴蓝帽子；穿黄上衣的孩子的父母戴黄帽子；穿蓝上衣的孩子的父母戴红帽子。

【说明】 本题是一个逻辑推理题。做这类题的要点是：要把题中所给出的关系弄得十分熟。

例 6 有 10 张扑克牌，点数分别为 1，2，3，…，9，10。从中任意取出若干张牌，为了使其中必有几张牌的点数之和等于 15，问：最少要取几张牌？

【分析】 这是一个逻辑推理题，其中我们用到了类推和抽屉原理的思想。

【解答】 首先我们可以选择 1，2，8，9，10 这 5 张牌，而不满足条件，因此，最少取的张数不少于 6；

那么我们来看看，6 张一定满足吗？答案是肯定的。

①这 6 个数如果有一个是 10，那么我们将剩下的分类：

(1，4)；(2，3)；(5)；(8，7)；(9，6)；

剩下 5 个数，我们知道，如果有 5，那么 10+5=15；

如果没有 5，那么至少有两个数来自同一个括号中，也可以得到 15；

②这 6 个数如果没有一个是 10，有一个是 9，那么我们将其分类：

(1，5)；(2，4)；(3)；(8，7)；(6)；

类似上面，也会有和为 15；

③如果既没有 9 也没有 10，但有 8 的话，我们分类：

(1，6)；(2，5)；(3，4)；(7)

类似，也会有和为 15；

④如果没有 8、9、10，那么如果有 7，我们同样可以找到和为 15；

⑤如果没有 7、8、9、10，那么只有 1、2、3、4、5、6，结论也成立。

答：综上所述，至少要 6 个数。

【说明】 这道题是一个逻辑推理题目，是从 GRE(即美国研究生入学英语考试)逻辑试题里面摘录的一个简单题目。这类题目在 GRE 逻辑试题中经常出现。

例 7 五个班之间举行了一次友谊赛，每个班出两名同学参加一共 4 项单人比赛，每项单人比赛每个班都只派一个人上场。结果，参加比赛的同学如下：

第一项：$ABCDE$

第二项：$ABDFI$

第三项：$ACFGH$

第四项：$ABEGI$

其中 J 同学有事未能参加比赛，问：这 10 名同学谁和谁是一个班的？

【解答】 如果直接一个一个讨论谁不能和谁一个班的，再找谁和谁是一个班的，将十分复杂，下面换一种方法。

由于一个班的两名同学恰好不重不漏地参加了 4 个项目的比赛，所以只需要列出谁参加哪几项比赛再配对就一目了然了。

讨论每名同学参加了哪几项比赛：

A：1，2，3，4；

B：1，2，4；

C：1，3；

D：1，2；

E：1，4；

F：2，3；

G：3，4；

H：3；

I：2，4；

J：无。

由于两个同班同学必须恰好参加了 4 个不同项目的比赛，所以：

A 和 J 同班；B 和 H 同班；C 和 I 同班；D 和 G 同班；E 和 F 同班。

【说明】 换个角度思考，是数学题尤其是难题经常使用的方法。

例 8 这是一个挖地雷的游戏。如图 1 所示，在 64 个方格中一共有 10 个地雷，每个方格中至多有一个地雷。对于写有数字的方格，其格中无地雷，但与其相邻的格中有可能有地雷，地雷的个数与该数字相等。请你指出哪些方格中有地雷。(第六届“华杯赛”试题)

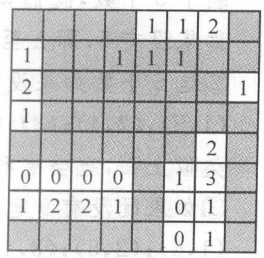


图 1

【解答】 地雷分布如图 2 所示。

因为①$4A$ 格中有地雷。因为 $5A$ 格相邻的格中只有 $4A$ 中可能有地雷，且肯定有一个。

②由于 $1C$ 格中数字是 2，而 $1B$，$1D$ 中又无地雷，所以 $2B$，$2C$，