

张景中 / 主编

走进教育数学

Go to Educational Mathematics

数学解题策略

新颖的数学问题，构建通往奥数前沿的捷径；
匠心的解法方法，激发创造与发现的灵感；
富有哲理的概括，开启兴趣与智慧之门；
精心细致的设计，彰显长者的经验。

朱华伟 钱展望 / 著



科学出版社

www.sciencep.com

“十一五”国家重点图书出版规划项目

01-4
Z847-2

走进教育数学

Go to Educational Mathematics

数学解题策略

朱华伟 钱展望 / 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书涵盖了观察、归纳与猜想, 数学归纳法, 枚举与筛选, 整数的表示方法, 逻辑类分法, 从整体上看问题, 化归, 退中求进, 类比与猜想, 反证法, 构造法, 极端原理, 局部调整法, 夹逼, 数形结合, 复数与向量, 变量代换法, 奇偶分析, 算两次, 对应与配对, 递推方法, 抽屉原理, 染色和赋值, 不变量原理等数学竞赛中的解题策略. 本书的特点: 每章以经典的例子, 或者是以形象的生活事例, 或者是以对该策略进行简明的描述方式引入内容, 并对这些丰富的例子给出详细的解答和点评. 每章后面附有大量的问题.

本书提供了许多新颖有趣的例题和令人耳目一新的巧妙解法, 能使读者找到灵感. 可作为高中生参加数学竞赛, 中学数学教师作数学竞赛辅导、进修, 高等师范院校数学教育专业本科生、研究生开设竞赛数学课程的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学解题策略 / 朱华伟, 钱展望著. —北京: 科学出版社, 2009
(走进教育数学 / 张景中主编)

ISBN 978-7-03-025039-1

I. 数… II. ①朱…②钱… III. 数学方法 - 研究 IV. O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 120427 号

丛书策划: 李 敏

责任编辑: 李 敏 / 责任校对: 李奕莹

责任印制: 钱玉芬 / 整体设计: 黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京佳信达欣艺术印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2009 年 8 月第一次印刷 印张: 23 插页: 2

印数: 1—6 000 字数: 445 000

定价: 46.00 元

如有印装质量问题, 我社负责调换

《走进教育数学》丛书编委会

主 编 张景中

委 员 (按汉语拼音排序)

李尚志 林 群 沈文选 谈祥柏

王鹏远 张奠宙 张景中 朱华伟

01-44
2847

总序

看到本丛书，多数人会问这样的问题：

“什么是教育数学？”

“教育数学和数学教育有何不同？”

简单说，改造数学使之更适宜于教学和学习，是教育数学为自己提出的任务。

把学数学比作吃核桃。核桃仁美味而富有营养，但要砸开才能吃到它。有些核桃，外壳与核桃仁紧密相依，成都人形象地叫它们“夹米子核桃”，如若砸不得法，砸开了还很难吃到。数学教育要研究的，就是如何砸核桃吃核桃。教育数学呢，则要研究改良核桃的品种，让核桃更美味，更营养，更容易砸开吃净。

“教育数学”的提法，最早出现在笔者1989年所写的《从数学教育到教育数学》中。其实，教育数学的活动早已有之，如欧几里得著《几何原本》，柯西写《分析教程》，都是教育数学的经典之作。

数学教育有很多世界公认的难点，如初等数学里的几何和三角，高等数学里面的微积分，都比较难学。为了对付这些难点，

很多数学老师、数学教育专家前赴后继，做了大量的研究，写了很多的著作，进行了广泛的教学实践。多年实践，几番改革，还是觉得太难，不得不“忍痛割爱”，少学或者不学。教育数学则从另一个角度看问题：这些难点的产生，是不是因为前人留下来的知识组织得不够好，不适于数学的教与学？能不能优化数学，改良数学，让数学知识变得更容易学习呢？

知识的组织方式和学习的难易有密切的联系。英语中12个月的名字：January, February, ……。背单词要花点工夫吧？如果改良一下：一月就叫 Monthone，二月就叫 Monthtwo，等等，马上就能理解，就能记住，学起来就容易多了。生活的语言如此，科学的语言——数学——何尝不是这样呢？

ii 很多人认为，现在小学、中学到大学里所学的数学，从算术、几何、代数、三角到微积分，都是几百年前甚至几千年前创造出来的数学。这些数学的最基本的部分，普遍认为是经过千锤百炼，相当成熟了。对于这样的数学内容，除了选择取舍，除了教学法的加工之外，还有优化改革的余地吗？

但事情还可以换个角度看。这些进入了课堂的数学，是在不同的年代，不同的地方，由不同的人，为不同的目的而创造出来的，而且其中很多不是为了教学的目的而创造出来的。难道它们会自然而然地配合默契，适宜于教学和学习吗？

看来，这主要不是一个理论问题，而是一个实践问题。

走进教育数学，看看教育数学在做什么，有助于回答这类问题。

随便翻翻这几本书，就能了解教育数学领域里近20年来做了哪些工作。从已有的结果看到，教育数学有事可做，而且能做更多的事情。

比如微积分教学的改革，这是在世界范围内被广为关注的事。丛书中有两本专讲微积分，主要还不是讲教学方法，而是讲改革微积分本身。

由牛顿和莱布尼茨创建的微积分，是第一代的微积分。这是

说不清楚的微积分. 创建者说不清楚, 使用微积分解决问题的数学家也说不清楚. 原理虽然说不清楚, 应用仍然在蓬勃发展. 微积分在说不清楚的情形下发展了 130 多年.

柯西和魏尔斯特拉斯等建立了严谨的极限理论, 巩固了微积分的基础, 形成了第二代的微积分. 数学家把微积分说清楚了. 但是由于概念和推理繁琐迂回, 对于绝大多数学习高等数学的人来说, 是听不明白的微积分. 微积分在多数学习者听不明白的情形下, 又发展了 170 多年, 直到今天.

第三代的微积分, 是正在创建发展的新一代的微积分. 人们希望微积分不但严谨, 而且直观易懂, 简易明快. 让学习者用较少的时间和精力就能够明白其原理, 不但知其然而且知其所以然. 不但数学家说得清楚, 而且非数学专业的多数学子也能听得明白.

第一代微积分和第二代微积分, 在具体计算方法上基本相同; 不同的是对原理的说明, 前者说不清楚, 后者说清楚了.

第三代微积分和前两代微积分, 在具体计算方法上也没有不同; 不同的仍是对原理的说明.

几十年来, 国内外都有人从事第三代微积分的研究以至教学实践. 这方面的努力, 已经有了显著的成效. 在我国, 林群院士近 10 年来在此方向做了大量的工作. 本丛书中的《微积分快餐》, 就是他在此领域的代表作.

古今中外, 通俗地介绍微积分的读物极多, 但能够兼顾严谨与浅显直观的几乎没有. 《微积分快餐》做到了. 一张图, 一个不等式, 几行文字, 浓缩了微积分的精华. 作者将微积分讲得轻松活泼、简单明了而且严谨自封, 让读者在品尝快餐的过程中进入了高等数学的殿堂.

丛书中还有一本《直来直去的微积分》, 是笔者学习微积分的心得. 书中从“瞬时速度有时比平均速度大, 有时比平均速度小”这个平凡的陈述出发, 不用极限和实数, “微分不微, 积分不积”, 直截了当地建立了微积分基础理论. 书中概念与《微积

分快餐》中的逻辑等价而呈现形式不尽相同，殊途同归，显示出第三代微积分的丰富多彩。

回顾历史，牛顿和拉格朗日都曾撰写著作，致力于建立不用极限也不用无穷小的微积分，或证明微积分的方法，但没有成功。我国数学大师华罗庚所撰写的《高等数学引论》中，也曾刻意求新，不用中值定理或实数理论而寻求直接证明“导数正则函数增”这个具有广泛应用的微积分基本命题，可惜也没有达到目的。

前辈泰斗是我们的先驱。教育数学的进展实现了先驱们简化微积分理论的愿望。

iv 两本关于微积分的书，都专注于基本思想和基本概念的变革。基本思想、基本概念，以及在此基础上建立的基本定理和公式，是这门数学的筋骨。数学不能只有筋骨，还要有血有肉。中国高等教育学会教育数学专业委员会理事长、全国名师李尚志教授的最新力作《数学的神韵》，是有血有肉、丰满生动的教育数学。书中的大量精彩实例可能是你我熟悉的老故事，而作者却能推陈出新，用新的视角和方法处理老问题，找出事物之间的联系，发现不同中的相同，揭示隐藏的规律。幽默的场景，诙谐的语言，使人在轻松阅读中领略神韵，识破玄机。看看这些标题，“简单见神韵”、“无招胜有招”、“茅台换矿泉”、“凌波微步微积分”，可以想见作者的功力非同一般！特别值得一提的是，书中对微积分的精辟见解，如用代数观点演绎无穷小等，适用于第一代、第二代和第三代微积分的教学与学习，望读者留意体味。

练武功的上乘境界是“无招胜有招”，但武功仍要从一招一式入门。解数学题也是如此。著名数学家和数学教育家项武义先生说，教数学要教给学生“大巧”，要教学生“运用之妙，存乎一心”，以不变应万变，不讲或少讲只能对付一个或几个题目的“小巧”。我想所谓“无招胜有招”的境界，就是“大巧”吧！但是，小巧固不足取，大巧也确实太难。对于大多数学子，还要重视有章可循的招式，由小到大，以小御大，小题做大，小中见

大。朱华伟教授和钱展望教授的《数学解题策略》，踏踏实实地从一招一式一题一法着手，探秘发微，系统地阐述数学解题法门，是引领读者登堂入室之作。作者是数学奥林匹克领域的专家。数学奥林匹克讲究题目出新，不落老套。我看了这本书里的不少例题，看不出有哪些似曾相识，真不知道他是从哪里搜罗来的！

朱华伟教授还为本丛书写了一本《从数学竞赛到竞赛数学》。竞赛数学当然就是奥林匹克数学。华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分。这个看法是言之成理的。数学要解题，要发现问题、创造方法。年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态。早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题。竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑。

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话。有一阵子，媒体上出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄赌毒。我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧。再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训。就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动。这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五。从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可。对于青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流。发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训活动过

热的问题自然就化解或缓解了。

回到前面的话题. 上面说到“大巧”和“小巧”, 自然想到还有“中巧”. 大巧法无定法, 小巧一题一法. 中巧呢, 则希望用一个方法解出一类题目. 也就是说, 把数学问题分门别类, 一类一类地寻求可以机械执行的方法, 即算法. 中国古代的《九章算术》, 就贯穿了分类解题寻求算法的思想. 中小学里学习四则算术、代数方程, 大学里学习求导数, 学的多是机械的算法. 但是, 自古以来几何命题的证明却千变万化, 法无定法. 为了找寻几何证题的一般规律, 从欧几里得、笛卡儿到希尔伯特, 前赴后继, 孜孜以求. 我国最高科技奖获得者、著名数学家吴文俊院士指出, 希尔伯特是第一个发现了几何证明机械化算法的人. 在《几何基础》这部名著中, 希尔伯特对于只涉及关联性质的这类几何命题, 给出了机械化的判定算法. 由于受时代的局限性, 希尔伯特这一学术成果并不为太多人所知. 直到1977年, 吴文俊先生提出了一个新的方法, 可以机械地判定初等几何中等式型命题的真假. 这一成果在国际上被称为“吴方法”, 它在几何定理机器证明领域中掀起了一个高潮, 使这个自动推理中最不成功的部分变成了最成功的部分.

吴方法和后来提出的多种几何定理机器证明的算法, 都不能给出人们易于检验和理解的证明, 即所谓可读证明. 国内外的专家一度认为, 机器证明的本质在于“用量的复杂克服质的困难”, 所以不可能机械地产生可读证明.

笔者基于1974年在新疆教初中时指导学生解决几何问题的心得, 总结出用面积关系解题的规律. 在这些规律的基础上, 1992年提出消点算法, 和周咸青、高小山两位教授合作, 创建了可构造等式型几何定理可读证明自动生成的理论和方法, 并在计算机上实现. 最近在网上看到, 面积消点法也多次在国外的不同的系统中实现了. 本丛书中的《几何新方法和新体系》, 包括了面积消点法的通俗阐述, 以及笔者提出的一个有关面积方法的公理系统, 由冷拓同志协助笔者整理成书. 教育数学研究的副产

品解决了机器证明领域中的难题，对笔者而言实属侥幸。

基于对数学教育的兴趣，笔者从1974年以来，在30多年间持续地探讨面积解题的规律，想把几何变容易一些。后来发现，国内外的中学数学教材里，已经把几何证明删得差不多了。于是“迷途知返”，把三角作为研究的重点。数学教材无论如何改革，三角总是删不掉的吧。本丛书中的《一线串通的初等数学》，讲的是如何在小学数学知识的基础上建立三角，以三角的发展引出代数工具并探索几何，把三者串在一起思路。

在《一线串通的初等数学》中没有提到向量。其实，向量早已下放到中学，与传统的初等数学为伍了。在上海的数学教材里甚至在初中就开始讲向量。讲了向量，自然想试试用向量解决几何问题，看看向量解题有没有优越性。可惜在教材里和刊物上出现的许多向量例题中，方法略嫌繁琐，反而不如传统的几何方法简捷优美。如何用向量法解几何题？能不能在大量的几何问题的解决过程中体现向量解题的优越性？这自然是教育数学应当关心的一个问题。为此，本丛书推出一本《绕来绕去的向量法》。书中用大量实例说明，如果掌握了向量解题的要领，在许多情形下，向量法比纯几何方法或者坐标法干得更漂亮。这要领，除了向量的基本性质，关键就是“回路法”。绕来绕去，就是回路之意。回路法是笔者的经验谈，没有考证前人是否已有过，更没有上升为算法。书稿主要由彭翕成同志执笔，绝大多数例子，也是他采集加工的。

谈起中国的数学科普，谈祥柏的名字几乎无人不知。老先生年近八旬，从事数学科普创作超过半个世纪，出书50多种，文章逾千篇。对于数学的执著和一生的爱，洋溢于他为本丛书所写的《数学不了情》的字里行间。哪怕仅仅信手翻上几页，哪怕是对数学知之不多的中小学生，也会被一个个精彩算例所显示的数学之美和数学之奇深深吸引。书中涉及的数学知识似乎不多不深，所蕴含的哲理却足以使读者掩卷遐想。例如，书中揭示出高等代数的对称、均衡与和谐，展现了古老学科的青春；书中提到

海峡两岸的数学爱好者发现了千百年来从无数学者、名人的眼皮底下滑过去的“自然数高次方的不变特性”，这些生动活泼的素材，兼有冰冷的思考与火热的激情，无论读者偏文偏理，均会有所收益。

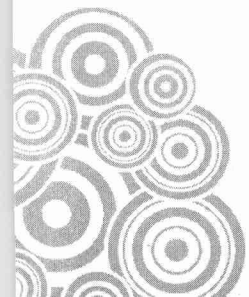
沈文选教授长期从事中学数学研究、初等数学研究、奥林匹克数学研究和教育数学的研究。他的《走进教育数学》和本丛书同名，是一本从学术理论角度探索教育数学的著作。在书中他试图诠释“教育数学”的概念，探究“教育数学”的思想源头与内涵；提出“整合创新优化”、“返璞归真优化”等优化数学的方法和手段；并提供了丰富的案例。笔者原来杜撰出“教育数学”的概念，虽然有些实例，但却凌乱无序，不成系统。经过文选教授的旁征博引，诠释论证，居然有了粗具规模的体系框架，有点学科模样了。这确是意外的收获。

浏览着这风格不同并且内容迥异的10本书，教育数学领域的现状历历在目。这是一个开放求新的园地，一个蓬勃发展的领域。在这里耕耘劳作的人们，想的是教育，做的是数学，为教育而研究数学，通过丰富发展数学而推进教育。在这里大家都做自己想做的事，提出新定义新概念，建立新方法新体系，发掘新问题新技巧，寻求新思路新趣味，凡此种种，无不是为教育而做数学。

为教育而做数学，做出了些结果，出了这套书，这仅仅是开始。真正重要的是进入教材，进入课堂，产生实效，让千千万万学子受益，进而推动社会发展，造福人类。这才是作者们和出版者的大期望。切望海内外同道者和不同道者指正批评，相与切磋，共求真知，为数学教育的进步贡献力量。



2009年7月



前 言

本书是笔者多年从事数学奥林匹克活动的成果。我们在研究国内外各项数学竞赛中，特别是培训高中生参加各级数学竞赛包括全国高中数学联赛、中国数学奥林匹克（Chinese Mathematical Olympiad, CMO）、国际数学奥林匹克（International Mathematical Olympiad, IMO）、IMO 中国国家队选拔考试以及培训 IMO 中国国家队的过程中收集了大量的题目，也发现了许多新颖的问题^①。由于忙于各项竞赛和为 IMO 中国队输送、选拔更优秀的人才，所以一直没有时间把这些资料整理出来。如今，我国的数学奥林匹克已经进入了一个相对稳定的阶段，每年派出的中国代表队都会在 IMO 上获得优异的成绩。现在我们可以有比较多的时间来回顾和总结这些收集到的资料。并且随着数学竞赛的发展，已经形成一个新的数学分支，称为竞赛数学（或奥林匹克数学）。

^① 编辑注：本书的第二作者钱展望先生共辅导 11 名选手入选 IMO 中国国家队，7 名选手获金牌，1 名选手获银牌，1998 年 IMO 中国国家队 6 名选手有 3 名选手是钱展望先生的高徒，这一年中国队因故没有参赛。

所以我们也有必要为这个新兴的分支整理更多系统的参考书。

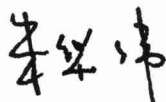
这些题目以怎样的形式呈现给读者比较好呢？如果以问题集的形式，把问题按知识内容进行分类，通常分为代数、几何、数论、组合等，我们发现有些问题往往同时涉及几块知识，相互交叉，难以细分。而我们也发现许多问题，虽然属于不同的知识内容，但它们在方法策略上有相同或类似之处。再从解题的角度来看，顺利解决一道数学问题除了必须具备扎实的学科知识基础，更重要的是要有灵活的方法策略。我们在解题的时候常常碰到这样的情况：在自己百思不解的时候，经过解题高手一点拨，我们的思路豁然开朗，闪电一般解决了问题。这说明我们并不是不熟悉问题涉及的知识内容，而是我们的方法策略不对，跳不出题目（或命题人）设下的圈套。于是，我们决定从解题策略这个角度对问题进行分类。

全书共25章，每章的内容都是相对独立的，每章讲解一种解题策略，这些策略包括观察、归纳与猜想，数学归纳法，枚举与筛选，整数的表示方法，逻辑类分法，从整体上看问题，化归，退中求进，类比与猜想，反证法，构造法，极端原理，局部调整法，夹逼，数形结合，复数与向量，变量代换法，奇偶分析，算两次，对应与配对，递推方法，抽屉原理，染色和赋值，不变量原理等，几乎涵盖了数学竞赛中所有的解题策略。每章的标题下面都有一句富有哲理的名人名言，它是该章所讲解的方法策略的精辟概括，当学习完一章的内容时，我们会对那句名言有更深刻的理解和体会。每章的开头或者是以经典的例子，或者是以形象的生活事例，或者是以对该策略进行简明的描述的方式引入该章的内容，接着是丰富的例子和详细的解答，还有点评。每章后面都有大量的问题（限于篇幅我们没有给出相应的解答，我们将在适当的时间出版解答）。第25章问题的引入与背景从命题的角度来探讨解题的策略，也就是站在更高的角度来考虑解题的策略。如果我们能够弄清命题的原则和题目的背景，可以说是知己知彼，百战不殆。

每个学习数学的人都希望自己能敏捷而又巧妙地解决各种数学问题。但事实总是让人感到困扰，因为学会解题必须要经过长期的模仿和练习。正如美国著名数学家 G. 波利亚所言：“解题是一种实践性技能，就像游泳、滑雪或弹钢琴一样，只能通过模仿和实践来学到它。本书不能给你一把万能钥匙去打开所有的门，或解决所有的问题，但是它却能提供给你一些值得效仿的范例和许多实践的机会。你想学会游泳，你就必须下水，你想成为解题的能手，你就必须去解题。”所以不要指望这本书能给读者一种万能的解题策略，对所有的题目都可以迎刃而解。这是任何一本关于数学解题的书都不能做到的。我们希望读者通过学习书中介绍的解题策略，可以在解数学习题甚至其他学科的问题时，脑子不会一片空白，束手无策，而是可以尝试多种方法来解决同一问题。

本书可作高中生参加数学竞赛，中学数学教师作数学竞赛辅导、进修，高等师范院校数学教育专业本科生、研究生开设竞赛数学课程的教材或参考书。数学业余爱好者也可以从这本书中找到许多新颖有趣的问题和令人耳目一新的巧妙解题方法。冥思苦想的命题者也许可以从这本书中找到灵感，提出更多新问题为竞赛数学注入新的血液。总之，这本书的对象应该是广泛的，而不仅仅是局限在参加高层次竞赛的少数学生中。

在本书的写作过程中，我们参阅了众多的文献资料，并得到数学教育界前辈和同仁的支持和帮助，得到科学出版社和广州市教育局的大力扶持。在此一并表示感谢。对于本书存在的问题，热忱希望读者不吝赐教。



2009年2月

目 录

xii

总序

前言

第 1 章 观察、归纳与猜想	1
1.1 归纳法帮你猜想命题结论	2
1.2 归纳法帮你猜想解题思路	6
1.3 两个著名的反例	11
第 2 章 数学归纳法	15
2.1 数学归纳法的基本形式	16
2.2 数学归纳法的应用技巧	22
第 3 章 枚举与筛选	32
第 4 章 整数的表示方法	45



4.1 整数的十进制表示	45
4.2 整数的 m 进制表示	47
4.3 整数的带余除式表示	52
4.4 整数的唯一分解表示	54
4.5 整数的 $2^m q$ 型的表示	56
第5章 逻辑类分法	60
第6章 从整体上看问题	72
第7章 化归	83
7.1 直接化归	84
7.2 化归	86
7.3 合理规划 拾级而上	88
7.4 立体问题化归为平面问题	93
第8章 退中求进	98
8.1 投石问路	98
8.2 退一变一进	103