数学分析（Ⅲ）学习与考试指导书

SHUXUE FENXI XUEXI YU KAOSHI ZHIDAOSHU

丁玉敏 ■ 主编

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

数学分析（Ⅲ）
学习与考试指导书

主　编　丁玉敏

副主编　张金华

西南交通大学出版社

·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

数学分析（3）学习与考试指导书 / 丁玉敏主编. 一成都：西南交通大学出版社，2009.8

ISBN 978-7-5643-0333-4

Ⅰ. 数… Ⅱ. 丁… Ⅲ. 数学分析－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 133590 号

数学分析（Ⅲ）学习与考试指导书

主编　丁玉敏

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮编	610031
网址	http: //press.swjtu.edu.cn
印刷	成都蜀通印务有限责任公司
成品尺寸	170 mm×230 mm
印张	12.125
字数	223 千字
版次	2009 年 8 月第 1 版
印次	2009 年 8 月第 1 次印刷
书号	ISBN 978-7-5643-0333-4
定价	22.00 元

前　言

本书是一本学习与考试指导书. 本书按章编写，每章包含：内容提要、重点难点、学习要求、范例解析、习题选解、练习题、测试题. 本书的特点是：叙述详细且通俗易懂，典型例题较多、便于自学、切合学生实际. 通过本书的学习，可使读者提高分析问题和解决问题的能力，加深对基本概念、基本理论和基本方法的理解和掌握，增强学生学好本门课程的信心，提高学生的学习兴趣.

本书的第十六、十七、十八、二十一、二十二章由丁玉敏编写，第十九、二十章由张金华编写；丁玉敏担任了编写的组织、大纲的制定及协调统稿工作. 本书可作为大学生学习《数学分析（Ⅲ）》课程的参考书，也可供自学《数学分析》课程和报考研究生的读者作为参考书.

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，诚恳希望读者批评指正！

编　者

2009 年 4 月

目　录

第十六章　多元函数的极限与连续

一、内容提要

1. $\mathbf{R}^2$ 中一些重要点集的概念及主要性质.

(1) $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 两点之间的**距离**记为

$$\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2}$$

R^2 上任意三点 P_1，P_2，P_3 有如下的**三角不等式**：

$$\rho(P_1,P_2)\leqslant\rho(P_1,P_3)+\rho(P_2,P_3)$$

(2) 设点集 $E\subseteq\mathbf{R}^2$，定义 E 的**直径**

$$d(E)=\sup_{P_1,P_2\in E}\rho(P_1,P_2)$$

E 为有界点集 $\Leftrightarrow d(E)$ 为有限值.

(3) 设 $P_0(x_0,y_0)$，$P(x,y)\in\mathbf{R}^2$，则点 P_0 的**邻域**为

$$U(P_0;\delta)=\{P\,|\,\rho(P_0,P)<\delta\}\qquad\text{(圆形邻域)}$$

或

$$U(P_0;\delta)=\{(x,y)\,|\,|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}\qquad\text{(方形邻域)}$$

若将 $U(P_0;\delta)$ 中的点 P_0 去掉，则称此邻域为点 P_0 的空心邻域，记为 $U^{\circ}(P_0;\delta)$.

(4) 点与点集的关系（Ⅰ）.

设点 $P_0\in\mathbf{R}^2$，点集 $E\subseteq\mathbf{R}^2$，按“内-外”而论，P_0 与 E 有以下三种关系：

P_0 是 E 的**内点**：若 $\exists\delta>0$，使 $U(P_0;\delta)\subset E$；

P_0 是 E 的**外点**：若 $\exists\delta>0$，使 $U(P_0;\delta)\cap E=\varnothing$；

P_0 是 E 的**界点**：若 $\forall\delta>0$，有 $U(P_0;\delta)\cap E\neq\varnothing$，$U(P_0;\delta)\cap\complement E\neq\varnothing$，其中 $\complement E=R^2\setminus E$. 也就是说，$E$ 的界点既非 E 的内点，又非 E 的外点.

记 $\operatorname{int}E$ 为 E 的**内部**：E 的所有内点组成的集合；∂E 为 E 的**边界**：E 的所有界点组成的集合.

显然，E 的内点必属于 E，因此，$\operatorname{int}E\subseteq E$；$E$ 的外点必不属于 E；E 的

界点可以属于 E，也可以不属于 E.

(5) 点与点集的关系（Ⅱ）.

按“疏-密”而论，P_0 与 E 之间的关系又可分为以下两种情形：

P_0 是 E 的**聚点**：若 $\forall\delta>0$，必有 $U^{\circ}(P_0;\delta)\bigcap E\neq\varnothing$.

P_0 是 E 的**孤立点**：若 $\exists\delta>0$，使 $U^{\circ}(P_0;\delta)\bigcap E=\varnothing$.

P_0 不是 E 的聚点 $\begin{cases}\text{若 } P_0\notin E,\ \text{则 } P_0 \text{ 必为 } E \text{ 的}\textbf{外点}\text{；}\\ \text{若 } P_0\in E,\ \text{则 } P_0 \text{ 为 } E \text{ 的}\textbf{孤立点}\text{。}\end{cases}$

P_0 是 E 的聚点 $\Leftrightarrow$ 存在一个各项互异的点列 $\{P_n\}\subset E$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$.

E 的所有聚点组成的集合称为 E 的**导集**，记为 E^d；又称 $\overline{E}=E\bigcup E^d$ 为 E 的**闭包**.

显然，孤立点一定是界点；内点和非孤立点的界点一定是聚点；既不是聚点又不是孤立点的点，必为外点.

(6) 开集与闭集.

设 $E\subseteq\mathbf{R}^2$，若 $\operatorname{int}E=E$，即 E 中的点均是 E 的内点，则称 E 为 $\mathbf{R}^2$ 中的一个**开集**；若 $\overline{E}=E$，则称 E 为 $\mathbf{R}^2$ 中的一个**闭集**. 特别地，若 E 无聚点也称 E 为闭集.

约定：空集 $\varnothing$ 既是开集又是闭集. 特别地，当 E 的导集 $E^d=\varnothing$ 时，亦认为 E 是闭集. 所以，由有限个孤立点组成的集合必为闭集.

(7) 开域、闭域和区域.

非空连通的开集 $D\subseteq\mathbf{R}^2$，称为 $\mathbf{R}^2$ 中的一个**开域**；开域 D 连同它的边界 ∂D 组成的点集称为**闭域**（即 $D\bigcup\partial D$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个闭域）.

开域、闭域或它们连同它们的部分边界组成的点集统称为**区域**.

2. $\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理.

(8) 点列的极限定义.

设 $\{P_n\}\subseteq\mathbf{R}^2$ 为平面点列，$P_0\in\mathbf{R}^2$ 为一固定点，则

$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$（$\{P_n\}$ **收敛**于 P_0）$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in N^+,\ \forall n>N$，$\rho(P_n,P_0)<\varepsilon$.

(9) 点列极限的柯西收敛准则.

平面点列 $\{P_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in N^+,\ \forall n>N,\ \forall q\in N^+$，有 $\rho(P_n,P_{n+q})<\varepsilon$.

(10) 闭区域套定理.

设 $\{D_n\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭域列，它满足：

① $D_n\supseteq D_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$；

② 设 $d_n=d(D_n)$，$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$，

则存在唯一一点 $P_0 \in D_n$， $n=1,2,\cdots$.

(11) 聚点定理.

设 $E \subseteq \mathbf{R}^2$ 为有界无穷点集，则 E 在 $\mathbf{R}^2$ 中至少有一个聚点.

聚点定理有以下两个推论：

推论 1（致密性定理） 有界无限点列 $\{P_n\} \subseteq \mathbf{R}^2$ 必有收敛子列 $\{P_{n_i}\}$，并称该子列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n_i} = P_0$ 为 $\{P_n\}$ 的一个聚点.

推论 2 $E \subseteq \mathbf{R}^2$ 为有界集 $\Leftrightarrow E$ 的任意无穷子集必有聚点.

(12) 有限覆盖定理.

设 $D \subseteq \mathbf{R}^2$ 是一个有界闭域，$\{\varDelta_\alpha\}$ 为一开域族，它覆盖了 D（即 $D \subseteq \bigcup\limits_{\alpha} \varDelta_\alpha$），则在 $\{\varDelta_\alpha\}$ 中必存在有限个开域 $\varDelta_1, \varDelta_2, \cdots, \varDelta_n$， 它们同样覆盖了 D （$D \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \varDelta_i$）.

(9) ～(12) 这几个完备性定理在数学分析中的主要功用，是用来证明多元连续函数在有界闭集上的一组整体性质.

3. 关于二元函数的几个基本概念.

(13) 二元函数的定义.

设 $D \subseteq \mathbf{R}^2$，且 $D \neq \varnothing$，称 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射

$$f: D \to \mathbf{R}$$
$$P| \to z$$

为**二元函数**，其中 D 为 f 的**定义域**， $z = f(P) = f(x,y)$ 为 f 在点 $P(x,y) \in D$ 的**函数值**；f 的**值域**为 $f(D)$，点 P 的两个坐标 x, y 称为 f 的两个**自变量**，z 称为**因变量**.

$\mathbf{R}^3$ 中的点集

$$S = \{(x,y,z) \big| z = f(x,y), (x,y) \in D\} \subseteq \mathbf{R}^3$$

便是二元函数 f 的**图像**（在通常情况下为 $\mathbf{R}^3$ 中的一张曲面）.

(14) 若 $f(D)$ 为一有界集（即 $\exists M>0, \forall P \in D$，有 $f(P) \leqslant M$），则称 f 在 D 上为一**有界函数**. 否则（若 $f(D)$ 为一无界集，即 $\forall M>0, \exists P_0 \in D$，有 $f(P_0) > M$），称 f 在 D 上为一**无界函数**.

4. 二元函数的极限.

(15) 极限的定义.

设 $D \subseteq \mathbf{R}^2$， $f: D \to \mathbf{R}$， $P_0(x_0, y_0)$ 为 D 的一个聚点， A 为某一常数. 若

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $P \in U^{\circ}(P_0;\delta) \cap D$ 时，有

$$|f(P) - A| < \varepsilon$$

则称 f 在 D 上当 $P \to P_0$ 时以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P) = A$$

在不至于误解的情况下，也可简记为

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \quad \text{或} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

这种形式的极限也称为**重极限**.

(16) 极限存在的充要条件.

(i) $\forall E \subseteq D$，P_0 始终为 E 的聚点，则有

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P) = A \Leftrightarrow \lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in E}} f(P) = A$$

(ii) $\forall \{P_n\} \subseteq D,\ \lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$（$P_n \neq P_0$），则有

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P) = A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(P_n) = A$$

(i) 和 (ii) 是判别二元函数 f 在点 P_0 不存在极限的理论依据.

(17) **广义极限** $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P) = +\infty$（或 $-\infty$，或 ∞）的定义.

设 P_0 为 D 的聚点，$\forall M > 0, \exists \delta > 0$，当 $P \in U^{\circ}(P_0;\delta) \cap D$ 时，有

$$f(P) > M \qquad （\text{或 } f(P) < -M，\text{或} |f(P)| > M）$$

(18) **累次极限**的定义.

设 $D = D_x \times D_y$，则

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = L$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D_x}} f(x,y) = \varphi(y)\ （\text{对每个 } y \in D_y, y \neq y_0），\ \lim_{\substack{y\to y_0 \\ y\in D_y}} \varphi(y) = L;$$

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = K$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{y\to y_0 \\ y\in D_y}} f(x,y) = \psi(y)\ （\text{对每个 } x \in D_x, x \neq x_0），\ \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D_x}} \psi(x) = K.$$

(19) 重极限与累次极限之间的关系.

重极限与累次极限是两个不同的概念，它们的存在性没有必然的蕴含关系．但在一定条件下，这两种极限之间也存在着联系．

定理　若重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 存在，则

(i) 当 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=L$ 存在时，必有 $A=L$；

(ii) 当 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=K$ 存在时，必有 $A=K$．

推论 1　当上述重极限与两个累次极限都存在时，三者必相等．

推论 2　当两个累次极限都存在但不相等时，重极限必不存在．

5．二元函数的连续性．

(20)（在某点处）连续的定义．

设 $f:D\to\mathbf{R}$，$D\subseteq\mathbf{R}^2$，$P_0\in D$（P_0 或者是 D 的孤立点，或者是 D 的聚点），若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $P\in U(P_0;\delta)\bigcap D$ 时，有

$$\left|f(P)-f(P_0)\right|<\varepsilon \tag{1}$$

则称 f 关于集合 D 在点 P_0 **连续**．在不至于误解时，也称 f 在点 P_0 连续．

若 f 在 D 上任意点都连续，则称 f 为 D 上的**连续函数**．

由上述定义可知：

(i) 若 P_0 是孤立点，则 P_0 恒为 f 的连续点，即"孤立点必为连续点"．

(ii) 若 P_0 是 D 的聚点，则上述定义等价于：

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)=f(P_0) \tag{2}$$

(21) 间断点．

若 P_0 是 D 的聚点，而式 (1) 不成立，则称 P_0 是 f 的一个**间断点**（或**不连续点**）．

间断点包括以下两种情形：

(i) 若极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)$ 不存在，则称 P_0 是 f 的一个**本性间断点**（不论 P_0 是否属于 D）；

(ii) 若极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)$ 存在，但不等于 $f(P_0)$（或者 f 在 P_0 没定义），则称 P_0 是 f 的一个**可去间断点**．

(22) 全增量与偏增量．

设 $P_0(x_0,y_0)$，$P(x,y)\in D$，并记 $x=x_0+\Delta x$、$y=y_0+\Delta y$，则称

$$\Delta z|_{P_0} = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{3}$$

为 f 在点 P_0 的**全增量**. 在式（3）中，令 $\Delta x = 0$，$\Delta y = 0$，分别得到

$$\Delta_x z\Big|_{P_0} = \Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \tag{4}$$

$$\Delta_y z\Big|_{P_0} = \Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{5}$$

式（4）称为 f 在点 P_0 **关于 x 的偏增量**；式（5）称为 f 在点 P_0 **关于 y 的偏增量**.

全增量、偏增量和连续的关系：

(i) 式（2）等价于 $\lim\limits_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} \Delta f(x_0, y_0) = 0$.

(ii) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta_x f(x_0, y_0) = 0$ 表示一元函数 $f(x, y_0)$ 在点 x_0 连续.

(iii) $\lim\limits_{\Delta y\to 0} \Delta_y f(x_0, y_0) = 0$ 表示一元函数 $f(x_0, y)$ 在点 y_0 连续.

注意：一般来说，$\Delta z|_{P_0} \neq \Delta_x z\Big|_{P_0} + \Delta_y z\Big|_{P_0}$.

(23) 连续函数的局部性质.

若 f 在点 P_0 连续，则 f 在点 P_0 的近旁具有以下局部性质：

(i) 局部有界性：$\exists \delta > 0, \exists M > 0, \forall P \in U(P_0, \delta) \bigcap D$，有

$$|f(P)| \leqslant M$$

(ii) 局部保号性：若 $f(P_0) > 0$（或 < 0），则 $\exists \delta > 0,\ \forall P \in U(P_0, \delta) \bigcap D$，有

$$f(P) > 0 \text{（或} < 0\text{）}$$

(iii) 四则运算法则.

若 f 与 g 在 P_0 点都连续，则 $f + g$，$f \cdot g$ 在 P_0 点也连续；当 $g(P_0) \neq 0$ 时，$\dfrac{f}{g}$ 在 P_0 点也连续.

(iv) 复合函数的连续性.

若 $u = \phi(x, y)$，$v = \varphi(x, y)$，在 xOy 平面上点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义，并在 P_0 连续；$u_0 = \phi(x_0, y_0)$，$v_0 = \varphi(x_0, y_0)$，函数 $f(u, v)$ 在 uv 平面上的点 $Q_0(u_0, v_0)$ 的某邻域内有定义，且在 Q_0 连续，则复合函数 $g(x, y) = f[\phi(x, y), \varphi(x, y)]$ 在 P_0 也连续.

(24) 有界闭域上连续函数的整体性质.

设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 为有界闭域，f 在 D 上连续，则有如下性质：

(i) 有界性：$\exists M > 0, \forall P \in D$，有

$$|f(P)| \leqslant M$$

(ii) 最值性：f 在 D 上能取最大值 M 和最小值 m，即 $\exists P_1, P_2 \in D$ 使得 $f(P_1)=M, f(P_2)=m$，且 $\forall P \in D$，有

$$m \leqslant f(P) \leqslant M$$

(iii) 一致连续性：f 在 D 上必一致连续，即 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$，$\forall P_1, P_2 \in D: \rho(P_1, P_2)<\delta$，就有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$$

(iv) 介值性：$\forall P_1, P_2 \in D$，若 $f(P_1)<f(P_2)$，则 $\forall \mu: f(P_1)<\mu<f(P_2)$，$\exists P_0 \in D$，使

$$f(P_0)=\mu$$

二、重点难点

重点：

(1) 二元函数的概念及重极限概念.

(2) 连续函数的概念及其局部性质.

(3) 闭区域上连续函数的整体性质.

难点：

(1) 重极限概念.

(2) $\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理及其证明.

三、学习要求

(1) 掌握平面点集的一些概念，如：邻域，内点，界点，有界集，无界集，开区域，闭区域，区域；掌握 n 元函数（特别是二元函数）的概念；会求某些二元函数的定义域；会描绘某些简单二元函数的图像.

(2) 理解重极限的概念，会用定义验证某些二元函数的极限或证明某些二元函数的极限不存在；会求某些二元函数的重极限，弄清二重极限与累次极限的联系与区别.

(3) 理解并掌握二元函数的连续概念，了解一致连续的概念；会用二元函

数的保号性，有界闭区域上连续函数的有界性、最值性、介值性及一致连续性解决相关的一些问题.

（4）了解 $\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理及证明.

四、范例解析

例 1　设 $E\subset\mathbf{R}^2$，E^d 为 E 的导集. 证明：E 为闭集，且不含孤立点的充要条件是 $E=E^d$.

解析　E 为闭集的定义是 $E\bigcup E^d=E$；$\forall P\in E$，P 或者是 E 的聚点，或者是 E 的孤立点，不存在第三种情况（根据聚点和孤立点的定义）. 上述两种认识是以下证明的基础.

证明

必要性. 由 E 为闭集且不含孤立点可知

$$\left.\begin{array}{l} E\bigcup E^d=E\Rightarrow E^d\subset E \\ \forall P\in E,\ \text{有}\ P\in E^d\Rightarrow E\subset E^d \end{array}\right\}\Rightarrow E=E^d$$

充分性. 由条件知

$$E=E^d\Rightarrow\begin{cases} E\bigcup E^d=E\Rightarrow E\ \text{为闭集} \\ \forall P\in E,\ \text{则}\ P\in E^d\Rightarrow E\ \text{不含孤立点} \end{cases}$$

说明：由例 1 知，对于一般的闭集 E，它与其导集 E^d 的差别仅在于 E 比 E^d 可能多含有一些孤立点.

例 2　证明聚点定理的两个推论（见“内容提要”（11））.

（1）设 $\{P_n\}\subset\mathbf{R}^2$ 为有界无穷点列，欲证存在收敛子列 $\{P_{n_i}\}\subset\{P_n\}$.

证明　若 $\{P_n\}$ 中有无穷多个相同的项，则由这些项组成的子列总是收敛的.

若 $\{P_n\}$ 中不含无穷多个相同的项，则 $\{P_n\}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上对应的点集为一有界无穷点列. 由聚点定理，$\{P_n\}$ 至少有一个聚点，不妨设为 P_0，再由聚点的充要条件，存在 $\{P_n\}$ 的一个各项互异的子列 $\{P_{n_i}\}$，使

$$\lim_{n\to\infty}P_{n_i}=P_0$$

（2）设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 为无穷点集，欲证 E 为有界集的充要条件是：E 的任一无穷子集 E_s 必有聚点.

证明

必要性. E 为有界无穷点集，则 E_s 也是有界无穷点集. 由聚点定理，E_s 必有聚点.

充分性. 用反证法. 假设 E 为无界集的无穷点集，则必存在各项互异的点列 $\{P_n\}\subset E$，使

$$|P_n| = \rho(O, P_n) > n,\quad n = 1, 2, \cdots$$

故 $E_s = \{P_n\}$ 无聚点，矛盾. 所以 E 必为有界集.

例 3 讨论函数 $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限.

解

（解法一）$\forall\varepsilon>0$，由

$$|f(x,y)-0| = \left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0\right| \leqslant \frac{1}{2}|x^2-y^2| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

可知 $\exists\delta=\sqrt{2\varepsilon}>0$，当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

（解法二）令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，有

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{1}{4}r^2|\sin 4\theta| \leqslant \frac{1}{4}r^2 \to 0\quad (r\to 0)$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

注意：若将解法一中的不等式写为

$$|f(x,y)-0| = \left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant \left|xy\frac{x^2-y^2}{2xy}\right| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

则是错误的. 这是因为当 $(x,y)\to(0,0)$ 的过程中只假设 $(x,y)\neq(0,0)$（即 $x^2+y^2\neq 0$），但上述写法中并不能保证出现在分母中的 $xy\neq 0$.

例 4 证明下列函数在 $(x,y)\to(0,0)$ 时的二重极限不存在：

（1）$f(x,y) = \dfrac{x-y^2-y^3}{2x+y^2}$； （2）$g(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$.

解析 由内容提要中的（16）和（18）可知，证明 f 在点 (x_0,y_0) 重极限不存在的方法有两种：

(i) 若让动点 (x,y) 沿 D 内某条特殊路径无限趋于点 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 趋于不同的值，则 f 在点 (x_0,y_0) 的重极限不存在.

(ii) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)\neq\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$，则 f 在点 (x_0,y_0) 的重极限不存在.

对于（1），两种方法都可以用且方法（ii）比较简单；而对于（2），因为 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}g(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}g(x,y)=0$，所以不能用方法（ii）证明.

证明 （1）因为两个累次极限不相等，即

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2+y^3}{y^2}=-1$$

所以重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

（2）当动点 (x,y) 沿直线 $y=0$ 无限趋于 $(0,0)$ 时，$g(x,0)=0$，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}g(x,y)=\lim_{x\to 0}g(x,0)=0$$

当动点 (x,y) 沿曲线 $y=x^2-x$ 无限趋于 $(0,0)$ 时，有

$$g(x,y)=g(x,x^2-x)=\frac{x(x^2-x)}{x^2}=x-1\quad(x\neq 0),$$

所以
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2-x}}g(x,y)=\lim_{x\to 0}g(x,x^2-x)=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)$ 不存在.

例 5 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^\alpha}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad(\alpha>0)$$

在坐标原点的连续性.

证明 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，有

$$0\leqslant\left|f(x,y)\right|=\left|\frac{x^{\alpha}}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{r^{\alpha}\cos^{\alpha}\theta}{r^2}\right|\leqslant r^{\alpha-2}$$

当$\alpha>2$时，由于$\lim\limits_{r\to 0}r^{\alpha-2}=0$，于是有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=0$$

此时$f(x,y)$在原点连续.

当$\alpha\leqslant 2$时，重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在，因此$f(x,y)$在原点不连续（间断）.

说明：讨论二元函数$f(x,y)$的连续与间断时，若$f(x,y)$是“二元初等函数”，则可根据结论：“二元初等函数在其定义区域内都连续”来判别$f(x,y)$的连续性；若$f(x,y)$是用分段形式给出的，一般情况下，$f(x,y)$在非分段点处均连续，而在分段点处可能连续也可能间断，故需用定义来判别其连续性. 如例5中的函数在$\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$上都连续；而在分段点$(0,0)$处，当$\alpha>2$时，$f(x,y)$连续，而当$\alpha\leqslant 2$时，$f(x,y)$间断.

例 6　证明：$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 在$\mathbf{R}^2$上一致连续.

解析　记$r=r(P)=\rho(O,P)=\sqrt{x^2+y^2},P(x,y)\in\mathbf{R}^2$. 按一致连续定义，只需对$\forall\varepsilon>0$，找到$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，对$\forall P_1,P_2\in\mathbf{R}^2$，当$\rho(P_1,P_2)<\delta$时，有$\left|r(P_1)-r(P_2)\right|<\varepsilon$即可.

证明　记$r=r(P)=\rho(O,P)$，$P(x,y)\in\mathbf{R}^2$，由三角不等式得

$$\left|r(P_1)-r(P_2)\right|=\left|\rho(O,P_1)-\rho(O,P_2)\right|\leqslant\rho(P_1,P_2)$$

故对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon>0$，$\forall P_1,P_2\in\mathbf{R}^2$，只要$\rho(P_1,P_2)<\delta$，便有

$$\left|r(P_1)-r(P_2)\right|<\varepsilon$$

即$r(P)$在$\mathbf{R}^2$上一致连续.

例 7　设在区域$D\subset\mathbf{R}^2$上$f(x,y)$分别对x和y都连续，试证满足下列条件之一时，$f(x,y)$在D上处处连续.

(1) 对其中一变量（例如y）满足利普希茨条件，即$\exists L>0$，使得对$\forall(x,y_1)$，$(x,y_2)\in D$，恒有

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\leqslant L\left|y_1-y_2\right|$$