21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数学分析讲义

（第五版）

全程导学及习题全解

（下 册）

主编 马訾伟 闫晓红

◆ 知识归纳 梳理主线重点难点
◆ 习题详解 精确解答教材习题
◆ 提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数学分析讲义

（第五版）

全程导学及习题全解

（下 册）

主编 马誉伟 闫晓红

◆ 知识归纳 梳理主线重点难点
◆ 习题详解 精确解答教材习题
◆ 提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目（CIP）数据

数学分析讲义（第五版）全程导学及习题全解. 下册/ 马訾伟，闫晓红主编. —北京：中国时代经济出版社，2009.9

（21 世纪高等院校经典教材同步辅导）

ISBN 978－7－80221－947－2

Ⅰ. 数…　Ⅱ. ①马…　②闫…　Ⅲ. 数学分析—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 131896 号

数学分析讲义（第五版）全程导学及习题全解（下册）

马訾伟　闫晓红　主编

出 版 者	中国时代经济出版社
地　　址	北京市西城区车公庄大街乙 5 号鸿儒大厦 B 座
邮政编码	100044
电　　话	（010）68320825（发行部） （010）88361317（邮购）
传　　真	（010）68320634
发　　行	各地新华书店
印　　刷	北京鑫海达印刷厂
开　　本	880×1230　1/ 32
版　　次	2009 年 9 月第 1 版
印　　次	2009 年 9 月第 1 次印刷
印　　张	11. 625
字　　数	280 千字
印　　数	1～5000 册
定　　价	18. 00 元
书　　号	ISBN 978－7－80221－947－2

版权所有　侵权必究

前　言

数学分析是数学各专业最重要的一门专业基础课，大学本科乃至研究生阶段的很多后继课程如微分方程、实变函数和复变函数、概率论、统计及泛函分析、微分几何等课程都要以数学分析为基础。正因如此，数学各专业研究生入学考试都将数学分析作为必考课程。数学分析逻辑性很强，其习题的技巧性也很强，只了解基本的理论和方法，不辅以相应的技巧，很难顺利应用理论和方法解出习题，因此往往出现学习者听懂内容容易，课后习题完成困难的现象。加上数学分析学习的时间跨度长、内容极为丰富，这些都给学生的学习带来不少困难。

刘玉琏、傅沛仁等编写的《数学分析讲义（第五版）》是许多综合性大学、高等师范院校、函授院校以及教育学院的数学分析教材，为了帮助学习者更好地掌握课程内容，针对学生在学习过程中遇到的困难，我们编写了这本辅导书。本书的编排严格与教材保持一致。每章的知识要点部分着重点明知识点之间的联系，帮助学生在更高层次上理解教材内容；在此基础上按照各类考试中经常出现的考题总结出不同类型的典型例题，进行针对性的训练，以开阔学习思路。对于课后习题的解答，我们遵循解答详细、思路清晰、理论严密、简明易懂的原则，力争在帮助大家学习教材习题的同时做到举一反三。但希望大家在学习的过程中，不要依赖答案，要懂得善用。

参与本书编写的除马訾伟、闫晓红外，刘伟、蒋春涛、刘晓亚、方琳、李娟娟也参与了编写工作并提出了宝贵的修改意见和建议，为本书的顺利出版付出了辛勤的劳动，在此表示感谢。并对《数学分析讲义（第五版）》的作者刘玉琏、傅沛仁、林玎、苑德馨、刘宁老师表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中难免出现疏漏，望读者批评指正。

编　者

2009 年 7 月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第九章　级　数

知识结构图

- 级数
  - 数项级数
    - 收敛与发散概念
    - 收敛级数的性质
    - 同号级数
    - 绝对收敛级数的性质
  - 函数项级数
    - 函数项级数的收敛域
    - 一致收敛概念
    - 一致收敛判别法
    - 函数列的一致收敛
    - 和函数的分析性质
  - 幂级数
    - 幂级数的收敛域
    - 幂级数和函数的分析性质
    - 泰勒级数
    - 初等函数的幂级数展开
    - 幂级数的应用
    - 指数函数与三角函数的幂级数定义
  - 傅里叶级数
    - 傅里叶级数
    - 收敛定理
    - 奇、偶函数的傅里叶级数
    - 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数和函数的分析性质

§9.1 数项级数(一)

一、知识要点(一)

1. 级数敛散性的概念

(1) **定义**级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 收敛,即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$,称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,S 是它的和,记为 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 否则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是发散的.

(2) 柯西收敛准则(与等价定义)对任意 $\varepsilon > 0$,存在自然数 N_0,对任意自然数 $n > N_0$,任意自然数 p,有 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$.

注意 与数列的情形类似,柯西收敛准则可以在级数部分和无法确定的情况下,仍然可以判定级数的敛散性.

2. 收敛级数的性质

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是收敛级数,其和分别为 S_1, S_2,以下结论成立:

(1) 级数通项极限为零,即 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$;

(2) 改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的有限项,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 仍收敛,但它的和可能会改变. 即改变级数的有限项,不改变级数的敛散性;

(3) 设 c 为实常数,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 仍收敛,其和为 cS_1;

(4) 对于收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,不改变每项的位置,任意的加括号(即按原有的顺序,重新组合这些项),所得新的级数仍然收敛,且和也是 S_1.(实际上,新级数的部分和数列,是原级数部分的子列,自然也是收敛的,且极限不变,反之不成立. 但是需要注意,加括号后收敛的级数,未加括号之前未必收敛,例如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 发散,加括号后 $\sum_{k=1}^{\infty} [(-1)^{2k-1} + (-1)^{2k}] = 0$,或者理解为,收敛级数可以随意加括号,而不能随意去括号,而当括号中的项正负号相同是,去括号不改变和,见教材定

理 4.）

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，即两收敛级数的对应项相加所得级数仍收敛，且和等于原级数的和.

注意

i)(1) 是必要条件，而非充分条件，常用于断定级数发散；

ii)(2) 与数列类比，由柯西收敛准则可知，级数的收敛性由后面的无限项决定，所以有限项不影响其敛散性；与数列不同之处在于改变数列的有限项不改变数列极限，因为数列极限由后面无限项确定，而级数的和是依赖于每一项的，所以改变级数的项，就可能改变级数的和；

iiii)(3) 和(5) 就是收敛的线性性质，即收敛级数的项，进行线性组合所得级数仍收敛，且和就是原级数和的线性组合；

iv)(4) 体现了级数是无限和，与有限和运算的区别，是时刻需要注意的.

二、典型题解(一)

例 1　判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}=0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$的敛散性.

解　由于
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001}=1\neq 0,$$
故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$发散.

注意　通项趋于零是收敛级数的必要条件，所以对于通项不趋于零的级数，可以判断其发散，反之未必. 例如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，通项$\dfrac{1}{n}$趋于零，但是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散.

例 2　若当$p=1,2,3,\cdots$时，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$，问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是否收敛?

解　若当$p=1,2,3,\cdots$时，
$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0,\tag{1}$$
并不一定有级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛. 例如，取$a_n=\dfrac{1}{n}$，显然级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，但却有
$$0<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}<\frac{p}{n+1},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p}{n+1}=0$,故对一切 p,(1) 式均成立.

注意 这个事实与柯西准则并不矛盾,因为在柯西准则中,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在数

$N=N(\varepsilon)$,使当 $n>N$ 和 $p>0$ 时,不等式 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$ 成立,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,其中的 N 只依赖于 ε,而与 p 无关. 本题的叙述中,条件并没有排除 N 要与 p 有关.

三、课后题详解(一)

1. 求下列级数的和:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$.

解 1) 设部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=1-\frac{1}{n+1}.$$

则级数的和

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n}=1.$$

2) 设部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}).$$

则级数的和

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

3) 设部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

通项

$$a_k=\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{k+3-3}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2})-\frac{3}{2}\left[\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right],$$

则 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}\left[\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right]$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+2}+\frac{3}{2(n+2)(n+3)}.$$

可得级数的和

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{n+2}+\frac{3}{2(n+2)(n+3)}\right]=\frac{1}{4}.$$

4) 设部分和　　$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$

级数的通项是等差数列$\{2k-1\}$与等比数列$\{\frac{1}{2^k}\}$的乘积，用公比$\frac{1}{2}$乘以S_n，再与S_n做差得

$$\frac{1}{2}S_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{2k-1}{2^k}-\frac{2k-1}{2^{k+1}})$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{2k+1}{2^{k+1}}-\frac{2k-1}{2^{k+1}})-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{2^{k+1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

即 $S_n=1+2(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^n}$.

则级数的和

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}[1+2(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^n}]=3.$$

2. 证明:若 m 是固定的正整数,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}).$$

证明　设部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+m)}$.

考虑子列 $\{S_{im}\}$,对任意自然数 i,

$$\begin{aligned}S_{im}&=\sum_{k=1}^{im}\frac{1}{k(k+m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{im}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m})\\&=\frac{1}{m}[(1-\frac{1}{m+1})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})+\cdots+(\frac{1}{m}-\frac{1}{2m})\\&\quad+(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{2m+1})+(\frac{1}{m+2}-\frac{1}{2m+2})+\cdots+(\frac{1}{2m}-\frac{1}{3m})\\&\quad+\cdots+(\frac{1}{(i-1)m+1}-\frac{1}{im+1})+(\frac{1}{(i-1)m+2}-\frac{1}{im+2})+\cdots\\&\quad+(\frac{1}{(i-1)m}-\frac{1}{im})+(\frac{1}{im+1}-\frac{1}{(i+1)m+1})+(\frac{1}{im+2}-\frac{1}{im+2})\\&\quad+\cdots+(\frac{1}{im}-\frac{1}{(i+1)m})]\\&=\frac{1}{m}[(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m})-(\frac{1}{im+1}+\frac{1}{im+2}+\cdots\frac{1}{im+m})].\end{aligned}$$

已知 m 是固定的自然数,有

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty}S_{im}&=\lim_{i\to\infty}[\frac{1}{m}[(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m})-(\frac{1}{im+1}+\frac{1}{im+2}+\cdots\frac{1}{im+m})]\\&=\frac{1}{m}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}).\end{aligned}$$

由于该级数为正项级数,其部分和 $\{S_n\}$ 为单调递增,且有一个子列 $\{S_{im}\}$ 收敛于 $\frac{1}{m}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m})$,可知 $\{S_n\}$ 也收敛于 $\frac{1}{m}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m})$.

即 $\lim\limits_{i\to\infty} S_n = \frac{1}{m}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m})$.

3. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a > 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 已知$\lim\limits_{i\to\infty} na_n = a$，可得存在 $N_0 \in N$，对任意 $n > N_0$，$na_n > \frac{a}{2}$，即

$a_n > \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{n}$.

由级数性质，改变有限项不会影响收敛性，不妨设任意 $n \in N$，$a_n > \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{n}$.

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a}{2} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，

同样级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{n}$ 也发散.

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n > \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{n}$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

4. 证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(a_n \geqslant 0)$ 收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 反之是否成立？

证明 已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，由收敛级数的必要条件可知$\lim\limits_{i\to\infty} a_n = 0$，可知存在 $N_0 \in N$，对任意 $n > N_0$，$a_n < 1$，从而 $a_n^2 < a_n < 1$.

不妨假设任意$n \in N$，$a_n^2 < a_n$，由比较判别法可知，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(a_n \geqslant 0)$ 收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.

反之不一定成立，例如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

5. 证明：若$\{a_n\}$ 是整数数列，且 $0 \leqslant a_n \leqslant 9$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ 收敛，其和是 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

证明 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ 是正项级数，且其通项 $a_n 10^{-n} \leqslant \frac{9}{10^n}$，由于等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$ 收敛，由比较判别法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ 也收敛.

设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ 的部分和是S_n,其和$S=\lim_{n\to\infty} S_n$.

由于 $|S_n - 0.a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^k} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k} = r_n$,

而 $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

故 $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$.

6. 证明:若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,且

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n, n = 1,2,\cdots,$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛.(提示:应用级数的柯西收敛准则.)

证明　已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,由Cauchy收敛准则得,任意$\varepsilon>0$,存在$N_0 \in N_+$,对任意$p \in N$,有$\left|\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} a_k\right| < \varepsilon$ 及$\left|\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} b_k\right| < \varepsilon$;
同时由于$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n, n=1,2,\cdots$,可得

$$\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} a_k \leqslant \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} c_k \leqslant \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} b_k;$$

由上述不等式可知　$\left|\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} c_k\right| < \varepsilon$,

由Cauchy收敛准则可知,级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛.

7. 证明:若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

证明　(反证法)反设级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛,已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,由教材中定理5可知,级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n-a_n)$(即 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$)收敛,这与题设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散矛盾,

故$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

8. 证明:若级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ 与$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 都收敛,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明　由于级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$与$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k}$都收敛，设$\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}=a'$，即对任意$\varepsilon>0$，存在$K_0\in N_+$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{K_0} a_{2k-1}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad 及\quad \left|\sum_{k=1}^{K_0} a_{2k}-a'\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$而言，取$n_0=2K_0$时，

$$\left|\sum_{k=1}^{2K_0} a_k-a+a'\right|=\left|\left(\sum_{k=1}^{K_0} a_{2k-1}-a\right)+\left(\sum_{k=1}^{K_0} a_{2k}-a'\right)\right|$$
$$\leqslant\left|\sum_{k=1}^{K_0} a_{2k-1}-a\right|+\left|\sum_{k=1}^{K_0} a_{2k}-a'\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

9. 证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.（提示：证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和数列$\{S_n\}$的两个子数列$\{S_n\}$与$\{S_{2n-1}\}$有相同的极限.）

证明　设A_n与B_n分别是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和，已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty} A_n=A$，同时

$$B_{2n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}=A_n,$$

可知　$\lim\limits_{n\to\infty} B_{2n}=A.$

再考虑　$B_{2n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}$
$$=a_1+a_2+\cdots+a_{2n-3}+a_{2n-2}+a_{2n-1}$$
$$=A_{n-1}+a_{2n-1}.$$

由题设　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，

可得　$\lim\limits_{n\to\infty} B_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty} A_{n-1}+a_{2n-1}=A.$

综上讨论可知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和$B_n$的极限为$A$，即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

10. 证明：若数列$\{na_n\}$收敛，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$也

收敛.

证明　设 A_n 与 B_n 分别是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和,由题设数列 $\{na_n\}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛,设 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

考虑

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k-1}) \\
&= a_1 - a_0 + 2a_2 - 2a_1 + 3a_3 - 3a_2 + \cdots + na_{2n} - na_{2n-1} \\
&= na_n - a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\
&= na_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\
&= na_n - a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\
&= na_n - a_0 - B_{n-1},
\end{aligned}
$$

即　$B_{n-1} = na_n - a_0 - A_n$.

可得　$\lim\limits_{n\to\infty} B_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}(na_n - a_0 - A_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(na_n - a_0) - \lim\limits_{n\to\infty} A_n = a - a_0 - A$,

即级数　$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

11. 证明:若 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots \geqslant 0$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

证明　已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,由 Cauchy 收敛准则,对任意 $\varepsilon > 0$,存在自然数 N_0,对任意 $n > N_0$,任取自然数 $p = n$, $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}| < \varepsilon$.
同时题设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots$,结合上不等式可知, $|na_{2n}| < \varepsilon$,亦可得 $|2na_{2n}| < 2\varepsilon$.

即得　$\lim\limits_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$.

再考虑子列 $\{(2n+1)a_{2n+1}\}$,由于 $a_{2n} \geqslant a_{2n+1} \geqslant 0$,

$$0 \leqslant (2n+1)a_{2n+1} \leqslant (2n+1)a_{2n} = 2na_{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n},$$

由　$\lim\limits_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$,可得　$\lim\limits_{n\to\infty} 2na_{2n} \cdot \dfrac{2n+1}{2n} = 0$,

再由夹逼定理可知　$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1} = 0$.

综上可得，$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

12. 证明：若将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的依次若干项结合得到的新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_k$ 收敛，其中 $A_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$，且 A_k 的项有相同的符号，则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且两个收敛级数的和相等.

证明　设 s_n 与 S_n 分别是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 的部分和，已知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛，设 $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$，考虑 $S_k = A_1 + A_2 + \cdots + A_k = S_{k-1} + a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k} = \sum\limits_{n=1}^{n_k} a_n$，同时由于 A_k 中的项不改变正负号，所以当 n 介于 $n_{k-1}+1$ 和 n_k 之间时，部分和 s_n 必介于 S_{k-1} 与 S_k 之间，即

$$S_{k-1} \leqslant s_n \leqslant S_k \quad 或 \quad S_{k-1} \geqslant s_n \geqslant S_k.$$

由于 $n \to \infty \Leftrightarrow k \to \infty$，并且　$\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} S_{k-1} = S$，可得　$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$.

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且与级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 同样收敛于 S.

数项级数(二)

一、知识要点(二)

本节主要包含两部分，同号级数(正项级数)的审敛法、变号级数的审敛法及一个重要概念——绝对收敛概念.

1. 同号级数

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的每一项 u_n 同为非负或同为非正数. 其中项同为非负的，称为正项级数，同为非正的级数，称为负项级数.

注意

i) 根据教材中定理 2，讨论同号级数的敛散性只需对正项级数进行讨论即可；

ii) 同号级数的最大特点在于，其部分和是单调的，正项级数的部分和单调递增，负项级数单调递减，所以同号级数的敛散性等价于其部分和的有界性.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com