數學叢書

坐標制

李銳夫編著

正中書局印行

數學叢書

坐標制

李銳夫著

正中書局印行

中華民國二十五年十二月初版

坐標制

全一冊 實價國幣五角
（外埠酌加運費匯費）

編著者 李銳夫

發行人 吳秉常
南京河北路本局

印刷所 正中書局
南京河北路童家巷口

發行所 正中書局
上海福州路
南京太平路

(567)

特 1/1—8

目　次

第一章

緒論

第二章

平面上之量坐標

第三章

平面上之射影坐標

第四章

平面上之曲線坐標

第五章

空間坐標制

第一章

緒論

§1. 幾何之分類 幾何為研究圖形性質之學,因其研究之方法不同,可別為綜合幾何(Synthetic geometry)與解析幾何(Analytic geometry)二種.綜合幾何之方法,為由圖形之已知條件,逐步推論,隨處不離幾何觀念;當吾人運用思想時,腦海中永存一幾何圖形,用縝密之思想與合理之方法,以求所預期之結論.解析幾何則將幾何問題以代數方法解之,再由代數之結論而變為幾何之結論.

解析幾何以代數之方法,使動定之幾何元素發生關係,藉方程式以判別其性質,以靜御動,實為優點,更從根本方面解決問題之範圍,免作無謂之冥想,遠非綜合幾何所能及;不過解析幾何用代數方法,有失純粹幾何之齊整,此其缺點也.

幾何若就其性質而分,則又可別為三種,即量幾何(Metric geometry),射影幾何(Projective geometry),與仿射幾何(Affine geometry).幾何圖形由甲形依一定之方法而變為乙形,此曰變換(Transformation),幾何研究圖形經移位變換(Displacement)後之不變性質者,曰量幾何,而此種變換曰量變換(Metric transformation). 射影幾何完全離開量之關係,而僅論點線面相交之性質,故馮書德(Von Standt)稱之曰位置幾何(Geometry of position)(註一);射影幾何之定理在敍述圖形經射影(Projection)與截影(Section)(註二)後之不變性質,所謂射影與截影亦卽射影變換(Projective transformation). 量變換則爲射影變換之特款. 仿射幾何爲量幾何之推廣,亦爲射影幾何之次幾何(Subgeometry)(註三);圖形經放射變換後,有限點仍爲有限點,而平行及相切之性質亦不變. 幾何依其變換性質而區分,始自德國大數學家克萊恩(Klein)(註四).

§2. **坐標** 一組變數其値定一幾何圖形者曰此圖形之坐標(Coördinates). 故坐標爲使幾何之元素與代數之元素成立對應之關係;以代數之方法研究幾何問題,端賴坐標爲之溝通.

就純粹幾何言,點線面(註五)各爲獨立之幾何元素,初無互相牽涉之必要;但爲便利計,可謂線爲點之軌跡,面爲線之軌跡,或二面相交而成線,二線相割而成點. 由此定點,則線面

註一. 馮書德所著之 Geometrie der Lage 卽爲射影幾何.

註二. 見 Cremona: Elements of Projective Geometry, p. 2.

註三. 見 Granstein: Introduction to Higher Geometry, ch. XI, § 4.

註四. 見 Klein: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Torschungen; 重印於 Mathematische Annalen, vol. 43, p. 63.

註五. 此後凡稱線與面,皆指直線與平面.

之性質可知;定線,則點面之性質可知;定面,點線之性質亦可知故在平面解析幾何中,坐標制可別爲二類;其一以點爲出發點,其他以線爲出發點,前者曰點坐標(Point coördinates),後者曰線坐標(Line coördinates). 在立體解析幾何中,亦有點坐標與面坐標(Plane coördinates)之分. 實則一切幾何圖形皆得作爲坐標,初不僅限於點線面也(註一).

以點坐標所研究之幾何曰點幾何(Point-geometry),以線坐標所研究之幾何曰線幾何(Line-geometry),同樣以面坐標所研究之幾何曰面幾何(Plane-geometry).

§3. 幾何圖形之元 以點爲幾何元素,一點依一定之方向移動,其所成之空間爲一元(One dimension),卽直線.若此直線依一定之方向移動,其所成之空間爲二元.若此平面再依一定之方向而移動,則其所成之空間爲三元.吾人所能經驗之空間,僅限於一元,二元,與三元.故在三元空間中,定一點須有三坐標;其一,定其在一直線上之位置;其二,定此直線在平面上之位置;其三,定此平面在空間之位置;易言之,亦卽空間之點爲三元也.

若干點組成一幾何圖形,此圖形可視爲一點類(Class of points);同樣若干線組成一圖形,此圖形可視爲線類,若干面組成一圖形,此圖形可視爲面類.所謂某類之元,可以其中所含幾何元素之性質以定之.然此性質不能爲其所含元素之

註一. 見 Fischer: Koordinatensysteme, § 4.

個數.喜耳拔脫(Hilbert)(註一)曾由等分直線與正方形以證明線分上之點與正方形上之點爲一一相當(One to one correspondence),亦卽線分上所含之點之數(註二)與正方形上所含之點之數爲相等;故雖在異類,其所含元素之個數可爲相同;由此一類中所含元素之個數,不足據以定其元矣.但若幾何元素排列之次序不同,則其所成之圖形亦異,亦卽圖形之性質恆視元素排列之次序以定.故吾人恆取幾何元素排列之次序以爲定圖形之元之標準(註三).例如點類合於線序(Linear order),卽依一定方向排列者,曰一元點類.由此二元點類爲線序點類之線序點類,亦曰雙序點類(Doubly ordered class);三元點類爲雙序點類之線序點類.平面爲二元,蓋以其爲線序線類;空間爲三元,蓋以其爲線序面類也.

由此定義,空間之所有球爲四元;蓋若固定球心,半徑變動而成無限數之同心球,若再球心在空間任意變動,則得全空間之所有球,球心爲三元,再加半徑,故爲四元.由此幾何圖形之元,亦卽定此圖形所需最少之坐標之數.任一圖形包含幾何元素之個數爲無窮,如圖形之元爲 n 者,卽定此圖形須有 n 個坐標,則此圖形所含幾何元素之個數可爲 ∞^n.若以

註一.見 Hilbert: Über die stetige Abbildung einer Linie Auf ein Flächenstück, Mathematische Annalen, Bd. 38, 1891, pp. 449—460.

註二.指基數(Cardinal number).

註三.參考 Young: Fundamental Concept of Algebra and Geometry, Lecture XVI, p. 170.

點爲幾何元素,直線含有∞^1點,平面含有∞^2點,空間含有∞^3點.若以綫爲幾何元素,平面仍爲二元,空間含有∞^4線,故空間爲四元,直線之本身,則無元之可言.由此種方法以定幾何圖形之元,吾人可有能經驗之多元(高於三元)之幾何也.

在射影幾何中,共線之點曰點列(Range of points),平面上過一點之諸直線曰線束(Pencil of lines),空間過一直線之諸面曰面叢(Sheaf of planes);點列,線束,及面叢曰一元基本形(One dimensional primitive forms).

§4. **向量與軸** 一直線有二相異之方向,吾人可任取其一爲正,名曰正向(Positive direction),其他爲負,名曰負向(Negative direction).凡正向取定之直線曰軸(Axis).

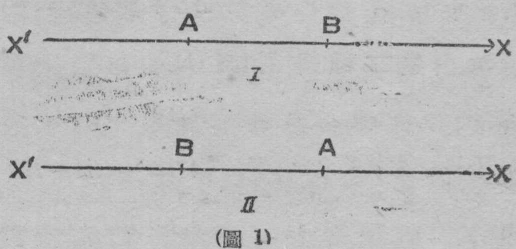
在軸上任意二點所定之線分曰向量(Vector);此二點命其一曰起點,其他曰終點.以自起點至終點之方向,表向量之方向;以自起點至終點之距離,表向量之長度.例如有向量AB,則A爲起點,B爲終點,自A至B之方向爲正.

設在$X'X$軸上有向量AB,若AB之方向與軸爲同向,則爲正,否則爲負.例如以$X'X$之方向爲正,則由圖I,

$$AB=+$$

由圖II,

$$AB=-$$



(圖 1)

顚倒一向量之起點與終點必須變號;故

$$AB = -BA$$

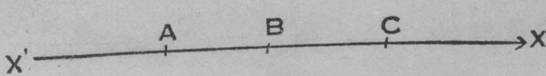
亦卽

$$AB + BA = 0$$

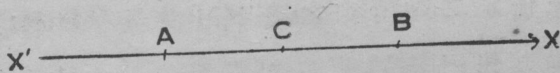
夏爾定理(Chasle's theorem) 設 $A, B, C, \cdots\cdots H, K, L$ 爲一軸上之任意 n 點,則恆有下列之關係:

$$AB + BC + \cdots\cdots + HK + KL + LA = 0$$

取此軸爲 $X'X$,并以自 X' 至 X 爲正向.當 $n=2$ 時,上已證明.茲設 $n=3$,并此三點爲 A, B, C.三點排列之次序共有六種,卽 ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, 及 CBA.



I



II

(圖 2)

由第一種排列(圖 I),

$$AB + BC = AC$$

卽

$$AB + BC = -CA$$

∴

$$AB + BC + CA = 0$$

由第二種排列(圖 II),

$$AB = AC + CB$$

卽

$$AB = -CA - BC$$

∴

$$AB + BC + CA = 0.$$

其餘四種排列可以同理證之.

由數學歸納法,假定當點數爲$n-1$時,定理能成立,而觀其當點數爲n時,定理能否成立;如能成立,則n爲四,爲五,以及任何正整數皆能成立.茲假定$n-1$點爲$A, B, C\cdots\cdots H, K$,而

$$AB+BC+\cdots\cdots+HK+KA=0.$$

若增一點L,則在A, K, L三點間,由以上之證明,應有

$$AK+KL+LA=0$$

即

$$KA=KL+LA$$

代入上式,得

$$AB+BC+\cdots\cdots+HK+KL+LA=0$$

故證得定理成立.

歐拉定理(Euler's theorem)　設A, B, C, D爲軸上之四點,則恆有下列之關係:

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC+CA\cdot BD=0$$

因

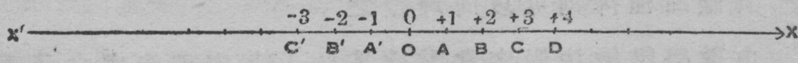
$$AD=AB+BC+CD$$

$$CA=-(AB+BC)$$

$$BD=BC+CD$$

代入關係式中,則得證明定理爲成立.

§5. 點與數　由以上所論,線分有正負.吾人當知實數分爲有理數與無理數,有理數又分爲整數與分數及零;各數除零以外,皆有正負之分.設取一軸$X'X$,以自X'至X爲正向.在軸上任取一點O代零,此曰原點(Origin).在原點之右取



(圖 3)

等距離之 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等點;在原點之左取 $A', B', C', \cdots\cdots$ 等點;以 OA 為單位長,則

$$OA=+1,\quad OB=+2,\quad OC=+3,\quad \cdots\cdots;$$

$$OA'=-1,\quad OB'=-2,\quad OC'=-3,\quad \cdots\cdots.$$

由此所有正負整數,皆得以軸上之點表之.

分數為間於二整數間之數;例如 $\frac{1}{2}$ 在 0 與 1 之間,可以 OA 之中點表之.又 $\frac{3}{2}$ 等於 $1+\frac{1}{2}$,可以 AB 之中點表之.

有理數為有密性(Dense)(註一),即在任二不等有理數之間,另有其他有理數,而在 $X'X$ 上能表有理數之點亦為無窮,點與有理數且能一一相當.例如在 $X'X$ 上任意二點 A_i 與 A_j 之間,吾人可任意取若干有理數點;設 A_iA_j 為在 OA 之間,則可由阿基米得公理(Axiom of Archimedes)選取一整數 K,使

$$K\cdot OA>1.$$

分 OA 為 K 等分,必至少有一分點 P 為在 A_iA_j 之中,而不與 O 及 A 為相合;同樣再可求一點 Q 為在 A_iP 之中,及求一點 R 為在 A_iQ 之中,如此可繼續進行而至無窮次,亦即在 A_iA_j 之中可得無窮個有理數點也.是以所有有理數皆得以軸上之點表之.

註一. 證明可見 Fine: College Algebra, Part I, § 113.

無理數不能表爲任何整數或分數(註一)；例如 $\sqrt{2}$ 爲一無理數,吾人不能有一整數或分數,其平方爲2. 由實行開方;

$$1.414213562373<\sqrt{2}<1.414213562374$$

由此可將有理數分爲二部, A_1 與 A_2; A_1 中包含所有等於或小於敍列(Sequence):

$$1,\quad 1.4,\quad 1.414,\quad 1.4142,\quad \cdots\cdots$$

之有理數, A_2 中包含所有大於此敍列之各項之有理數;亦卽等於或大於敍列:

$$2,\quad 1.5,\quad 1.42,\quad 1.415,\quad 1.4143,\quad \cdots\cdots$$

各項之所有有理數. 由此易知

1°. A_1 中之任何數爲小於 A_2 中之各數;

2°. A_1 無最大之一數, A_2 無最小之一數(註二).

以上二敍列各項之平方,愈後與2愈爲接近,其與2之差之微,可隨吾人之所欲,但終不能等於2; 亦卽 $\sqrt{2}$ 爲不在 A_1 與 A_2 之中. 由是可知 $\sqrt{2}$ 爲界於 A_1, A_2 間之一數;因不爲有理數,故名爲無理數.

應用此理,將有理數任意分爲二部, A_1 與 A_2, 而在 A_1 中各數爲小於 A_2 中諸數;在此將有三種情形發生:

1°. A_1 有最大之一數, A_2 無最小之一數.

2°. A_1 無最大之一數, A_2 有最小之一數.

註一. 證明可見 Hardy: Pure Mathematics, ch. I, § 3, p. 6.

註二. 證明可參考 Bromwish: Theory of Infinite Series, Ap. I. 137, p. 402.

3°. A_1無最大之一數,A_2亦無最小之一數.

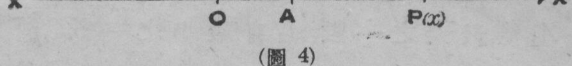
在第三種情形,有理數有截隙(Section),設此截隙爲I,吾人爲補此截隙,特命I爲無理數.此爲德第根(Dedekind)無理數定義(註一).而在第一與第二兩種情形,未有截隙,故無無理數存在.因有理數可作無窮次之分割,故無理數之個數亦爲無窮.

設在$X'X$上有一點S,其與原點之距離OS與單位線分OA爲不可度(Incommensurable);則在$X'X$上之點,其與原點之距離與OA爲可度者,可分爲B_1及B_2二部,B_1中各點爲在S之左,B_2中各點爲在S之右;B_1無最後之一點,B_2無最前之一點.故S爲諸可度點之割點.因凡與OA爲可度者,皆可表爲有理數,故B_1與A_1相當,B_2與A_2相當,由此S與I相當;亦卽I爲無理數之點,故若有一無理數I,則可假定有一S點存在;反之,若有一點S,則可由量OS之長以定I之近似值.

由以上之理論,$X'X$上所有之點皆與實數成一一相當,卽點可以表實數,實數亦可以表點.

§6 點列之坐標 設P爲$X'X$上之任一點,取OA爲單位線分,則P點之位置可以OP/OA定之.命

$$\frac{OP}{OA}=x,$$



(圖 4)

註一. 參考 Dedekind: Essays on the theory of Numbers, §4. 此外無理數尙有 Meray, Weierstrass, 及 G. Cantor 諸人之定義.

則 x 曰 P 點之坐標(註一), 因

$$OP=x\cdot OA$$

取 $OA=1$, 則 $OP=x$.

命
$$x=\frac{x_1}{x_2}, \qquad x_2\neq 0,$$

則 (x_1, x_2) 曰 P 點之齊次坐標 (Homogeneous coördinates), 而 x 曰非齊次坐標 (Non-homogeneous coördinates).

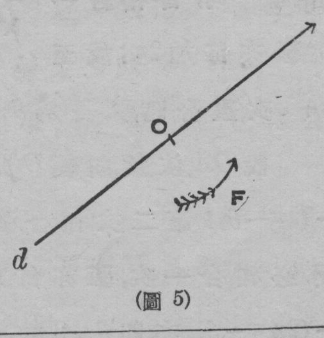
若 P 點在 OX 或 OX' 方向之無窮遠,則 x 爲無窮大;反之,若 x 爲無窮大,則 P 在無窮遠,若 $x_2=0$, 則 x 爲無窮大;故 $(a, 0)$, $a\neq 0$, 爲無窮遠點之坐標. $(0, 0)$ 爲無意義.

設 P_1 及 P_2 爲軸上之二點,其非齊次坐標爲 x' 及 x'', 則由夏爾定理,

$$OP_1+P_1P_2+P_2O=0,$$

即
$$P_1P_2=OP_2-OP_1=x''-x'.$$

§7. 向角與向面 設平面上有一直線 d, 以其上之一定點 O 爲心,則此線在面上繞 O 點而旋轉之方向有二;任取其一爲正向,則其他爲負向. 凡正向取定之平面曰向面 (Oriented plane). 在向面上恆以弧矢表方向, 即矢所指者爲正向.



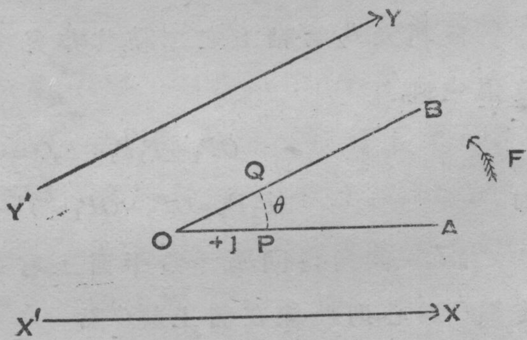
(圖 5)

註一. 此爲量坐標 (Metric coördinates) 中之德卡兒坐標 Cartesian coördinates. 見第二章.

直線一端有限,而他端可以無限延長者曰半直線(Semi-line). 設向面上有二軸 $X'X$ 及 $Y'Y$, 其交角爲等於在平面上任一點引二與之平行之半射線 OA 與 OB 之交角.

命 $(X'X, Y'Y)$ 爲二軸之交角,則此交角爲一代數值. OB 可視爲 OA 取向面之方向繞 O 點旋轉以平行於 $Y'Y$. 在 OA 上取與 O 距離爲 $+1$ 之 P 點,當 OA 依任何方向繞 O 點而旋轉, P 點描一半徑爲 $+1$ 之弧 θ. 因弧之半徑爲 $+1$, 故 $(OA, OB)=\theta$.

欲 OA 與 OB 相合,可由 OA 繞 O 點旋轉任何周,故弧之值爲無定. 設 OA 常依正向旋轉,當其第一次合於 OB 時,在 P 點描 PQ 弧,即 θ; 此弧小於一圓周. OA 繼續旋轉,其第二次相合,在 P 點描一周又 θ 弧,弧長爲 $\theta+2\pi$. 以後每增描一周,皆相合一次,弧亦每加 2π; 故至 $n+1$ 次重合時,弧長爲 $\theta+2n\pi$, n 爲正整數.



(圖 6)

設 OA 依負向繞 O 點旋轉,其第一次與 OB 相合,弧長爲 $-(2\pi-\theta)$; 第二次相合,弧長爲 $-(4\pi-\theta)$; 以後 P 點每增描一周,必相合一次,弧亦每加 -2π, 故至第 n 次相合時,弧長爲 $-(2n\pi-\theta)$. 亦即 $\theta-2n\pi$, n 爲正整數.

由以上二結果之合併,得