HZ BOOKS

畅销书《OpenGL游戏编程》姊妹篇
揭秘Direct3D游戏开发核心技术

游戏开发技术系列丛书

DirectX 游戏编程

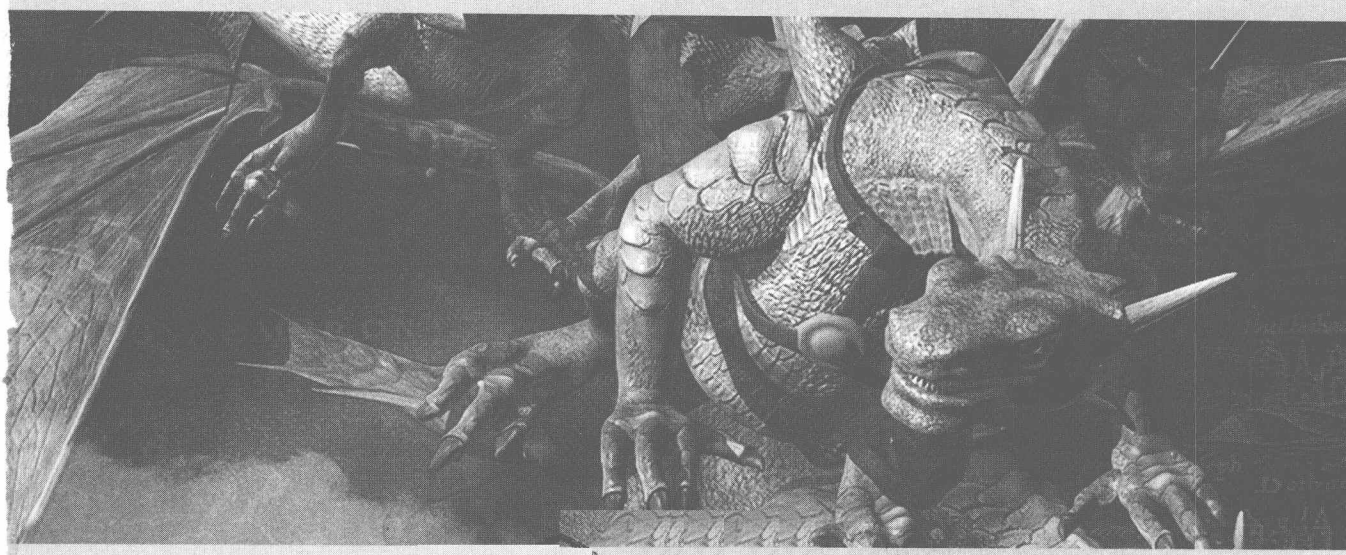
王鹏杰 李威 王聪 编著

附赠光盘

机械工业出版社
China Machine Press

游戏开发技术系列丛书

DirectX游戏编程



王鹏杰 李威 王聪 编著

机械工业出版社
China Machine Press

本书是 DirectX 游戏编程的入门教材，是作者近几年来在高校教授游戏程序设计课程和实验设计经验的浓缩，力求凸显“低门槛、重实践、精理论”的特色，其规划和设计融入了作者多年来对该课程教学的经验总结和思考。本书主要包括两部分内容：基础部分和高级部分。基础部分主要讲述了 DirectX 的基础知识，包括游戏开发的基本数学知识、DirectX 开发的基本配置、基本开发框架、基本图形的绘制、文本显示、变换、纹理映射。高级部分根据 DirectX 技术的发展趋势，选讲了一些有生命力的技术，主要包括深度测试和反走样、网格、混合、模板以及顶点着色器和像素着色器等知识。

本书适合有一定程序设计能力的 DirectX 初学者和游戏编程爱好者参考，也可作为高等院校相关专业、培训机构的游戏程序设计课程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

DirectX 游戏编程/王鹏杰，李威，王聪编著．—北京：机械工业出版社，2010.1
(游戏开发技术系列丛书)

ISBN 978-7-111-29331-6

Ⅰ.D…　Ⅱ.①王…　②李…　③王…　Ⅲ.①多媒体－软件工具，DirectX－教材　②游戏－应用程序－程序设计－教材　Ⅳ.TP331.56　G899

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 233510 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037)
责任编辑：李俊竹
北京市荣盛彩色印刷有限公司印刷
2010 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
186mm×240mm · 17.75 印张
标准书号：ISBN 978-7-111-29331-6
　　ISBN 978-7-89451-349-6(光盘)
定价：49.00 元(附光盘)

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：(010)88378991；88361066
购书热线：(010)68326294；88379649；68995259
投稿热线：(010)88379604
读者信箱：hzjsj@hzbook.com

前　言

作为《OpenGL 游戏编程》的姊妹篇，本书也是游戏编程的入门书籍，不同的是选用了另一个非常流行（甚至已经成为主流技术）的游戏软件开发包 DirectX 进行游戏编程。本书是作者近几年来在高校教授游戏程序设计课程的经验凝结，力求凸显“低门槛、重实践、精理论”的特色，其规划和设计融入了作者多年来对该课程教学的经验总结和思考。全书共有 16 章，包括两部分内容：基础部分和高级部分。基础部分包括第 1 章～第 8 章，主要讲述了 DirectX 的基础知识，包括游戏开发的基本数学知识、DirectX 开发的基本配置、基本开发框架、基本图形的绘制、文本显示、变换、纹理映射。高级部分包括第 9 章～第 16 章，根据 DirectX 技术的发展趋势，介绍了一些有生命力的技术，主要包括深度测试和反走样、网格、混合、模板以及顶点着色器和像素着色器等知识。本书面向的读者是有一定程序设计能力的 DirectX 初学者或爱好者。

各章主要内容分别为：第 1 章介绍游戏开发相关的一些数学基础知识；第 2 章对 DirectX 的历史、功能及基本配置做了介绍；第 3 章介绍了本书所涉及的 Direct3D 程序设计框架，并通过实例详细讲解了基本的 Win32 框架和 DXUT 框架；第 4 章介绍了文本显示程序的编写，为后续章节实例中的文本显示做准备；第 5 章介绍了基本图形的绘制过程，主要讲解了基本图元的类型，以及使用顶点缓存和索引缓存绘制基本图形的方法；第 6 章介绍了 3 种基本变换并辅以实例对其进行详细说明；第 7 章介绍了材质和光照的使用，给出了不同光照和不同材质下的实例效果对比；第 8 章介绍了纹理的载入和绘制方式；第 9 章介绍了深度测试和反走样的基本原理，并分别给出了实例；第 10 章和第 11 章介绍了网格的定义，包括网格中顶点缓存和索引缓存的填充，X 文件导入生成网格的过程，渐进网格的生成和控制；第 12 章介绍了混合和模板，并分别给出了实例；第 13 章～第 15 章介绍了着色器部分的内容，主要对顶点着色器和像素着色器的功能、使用、语义等进行了详细阐述，并给出了实例解析；第 16 章给出了一个完整的用 DirectX 开发的 RPG 游戏实例，主要介绍了游戏开发的一个简单但完整的过程。

对于初学者来说，按照本书的章节顺序进行阅读是很好的选择，书中所有的实例都是按照章节的内容有序安排的；而对于有经验的读者，可以按需要有选择地阅读。本书的特点是每章都有详细的实例程序，并且对程序代码进行了清晰的编号和详细的解释。可以作为高等院校游戏专业的教材，也可供游戏开发及研究人员参考。

经过对本书的学习，你可以掌握 DirectX 游戏开发的基础知识。通过这些基础知识的学习，你甚至可以编写一个自己的游戏。祝学习愉快！

本书附带的光盘中为书中主要实例的源程序，经测试可以在 VC 2003 及以上版本环境下运行。

本书第 4、7 章及第 12 章的模板部分由王鹏杰编写，第 1、2、11 章和其余章节的实例部分由李威编写，其余内容由王聪和贾彦磊编写。在编写过程中本书参考和引用了很多现有的 DirectX 书籍和网络资源(见书后的参考文献列表)，在此向原作者表示深深的谢意。最后，本书要特别感谢机械工业出版社华章分社的陈冀康编辑所给予的指导、帮助和鼓励。同时感谢关旭成、方郁、王江，他们为本书的编写做了大量的工作，没有他们的努力，本书是不可能顺利完成的。

王鹏杰

2009 年 10 月 25 日于浙大紫金港

目　录

第 1 章　3D 游戏开发的数学基础

作为一名游戏开发人员，需要具备一些基本的、与 3D 图形学相关的数学知识。如果读者对这部分知识比较了解，可以跳过这些章节；读者也可以在后面的章节需要相应数学知识时再参考本章内容。

1.1　点和向量

1.1.1　点

点是图形中最基本的几何对象。一般地，利用直角坐标系来确定物体在屏幕上的位置，直角坐标系包含一个 x 轴和一个 y 轴，一个点就可以用它在两个轴上的坐标表示，如（x，y）。其中原点的坐标为（0，0），位于两个坐标轴相交的地方。从原点出发，向右是 x 轴的正方向，向左是 x 轴的反方向；同样地，向上是 y 轴的正方向，向下是 y 轴的反方向，如图 1-1 所示。

有了点，我们就可以通过坐标来确定物体的位置。同样，如果我们知道了两个点的坐标，就可以计算它们之间的距离，下面给出平面上两点距离公式。

假设在 2D 空间中有两个点 P_1 和 P_2，其坐标分别为（X_1，Y_1）和（X_2，Y_2），那么它们之间的距离为：

$$P_1P_2 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

同样，我们可以建立 3D 空间内的坐标系，方法很简单，只需在原来 x 轴和 y 轴的基础上添加一个 z 轴即可。需要注意的是，在这里有两种法则：左手法则和右手法则，从而建立起来的坐标系称为左手坐标系和右手坐标系。在这两种坐标系中，正 x 轴指向右面，正 y 轴指向上面。通过沿正 x 轴方向到正 y 轴方向握拳，或通过沿正 y 轴方向到正 x 轴方向握拳，大拇指的指向就是相应坐标系的正 z 轴的指向，如图 1-2 所示。

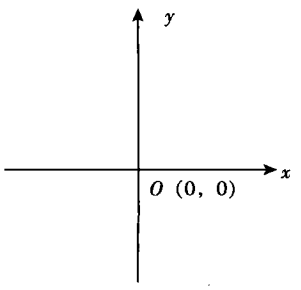
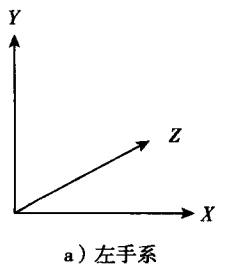
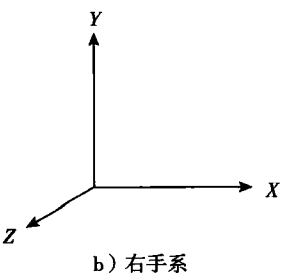


图 1-1　直角坐标系



a）左手系



b）右手系

图 1-2　左手系和右手系

从上图我们可以看出来，左手系和右手系的主要区别就是 z 轴正向的朝向不同，一个朝向屏幕里面、一个朝向屏幕外面。因此，左、右手坐标系可以相互转换，最简单的方法是只翻转一个轴的符号，注意，如果同时翻转两个轴的符号，结果和不翻转是一样的。

同理，3D 空间中的点用 x、y、z 这 3 个坐标值来表示，如（0，2，3）。

同样，3D 空间内两点 P_1（X_1，Y_1，Z_1）和 P_2（X_2，Y_2，Z_2）的距离公式为：

$$P_1P_2 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

1.1.2 向量

向量在 3D 图形学中应用广泛，比如描述一个物体在 3D 空间中的位置，以及一个人物在 3D 空间中的运行速度，3D 表面的法线等。

向量 $\boldsymbol{v}$ 也叫矢量，它是一个同时具有数量大小和方向的量，或者说向量等于标量加上一个方向。比如飞机飞行的速度就是一个向量，它具有一个数值表示大小（叫做速率），同时它还有一个方向用于表示飞行的方向。向量的表示如下：

$$\boldsymbol{v} = (x, y, z)$$

以上表示形式如果用 3D 空间中点的坐标来表示，如图 1-3 所示。该向量的方向是从原点到 $\boldsymbol{v}$ 点，大小是从原点到 $\boldsymbol{v}$ 点的长度。

通常向量还有另外一种表示形式，如图 1-4 所示。$\boldsymbol{M}_1$（x_1，y_1，z_1），$\boldsymbol{M}_2$（x_2，y_2，z_2），那么向量的另外一种表示形式为：

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

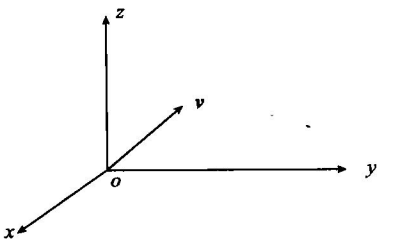


图 1-3 作为空间中一个位置的向量 $\boldsymbol{v}$

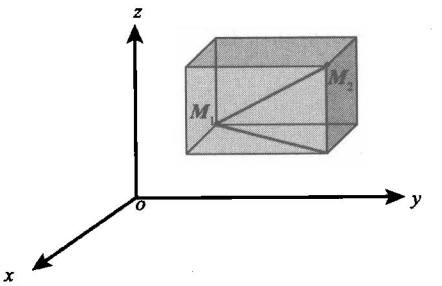


图 1-4 向量的另一种表示形式

向量 $\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}$ 的方向从 $\boldsymbol{M}_1$ 指向 $\boldsymbol{M}_2$，大小为 $\boldsymbol{M}_1$ 到 $\boldsymbol{M}_2$ 的长度。这种向量的表示方法其实是向量的加减运算，请参考本节的后半部分。

长度大小为 1 的向量称为单位向量，这里记为 $\boldsymbol{u}$。长度为 0 的向量叫做零向量，记为 $\boldsymbol{0}$，零向量没有确定方向，也就是说它的方向是任意的。

下面就介绍一下常用的向量性质和运算。

（1）向量的长度

向量长度也叫向量的模。我们可以把以上向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度记作：$|\boldsymbol{v}|$。

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

其中，x、y、z是向量$\boldsymbol{v}$的x、y和z分量。

（2）单位向量

向量的方向描述了向量在空间中的指向。对于许多向量，我们只关心它的方向而不关心其大小，如3D图形学中的一个平面的法线方向，在这样的情况下，使用单位向量非常方便。单位向量就是长度为1的向量，单位向量也经常被称做标准化向量。

对于一个非零向量$\boldsymbol{V}$，可以用该向量除以它的大小（或模）即可得到该向量的归一化向量，如下所示：

$$v = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$$

（3）向量加减运算

可以像对标量一样对向量进行数学运算，其中最基本的两个运算是向量加法和减法。需要注意的是参加运算的两个向量必须具有相同的维数，即两个向量必须都是二维、三维或四维等。向量的加法运算规则非常简单，只需将对应分量相加即可。在以下的运算中，均假设参加运算的两个向量是$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$。两个向量的加减得到向量$\boldsymbol{c}$：

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z\}$$

向量的加法和减法运算可以根据三角形法则进行实现，如图1-5所示。向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$等于使$\boldsymbol{b}$的始点与$\boldsymbol{a}$的终点重合时，以$\boldsymbol{a}$的起点为始点，以$\boldsymbol{b}$的终点为终点的向量；向量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$等于使$\boldsymbol{b}$的始点与$\boldsymbol{a}$的始点重合时，以$\boldsymbol{b}$的终点为始点，以$\boldsymbol{a}$的终点为终点的向量。

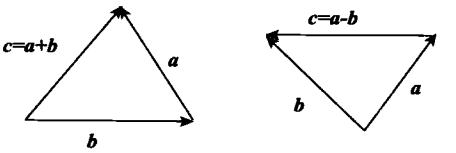


图1-5 向量加法和减法

（4）数乘运算

虽然标量和向量不能相加，但它们能相乘，结果将得到一个向量，它与原向量平行，但长度不同或方向相反。

$$k\boldsymbol{a}=\{ka_x, ka_y, ka_z\}$$

（5）点乘运算

向量和向量相乘可以有两种不同的类型，在这里我们首先介绍点乘（也称做内积）。

术语“点乘”来自于记法$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$中的点号，与标量与向量的乘法一样，向量点乘的优先级高于加法和减法。标量乘法和标量与向量的乘法经常可以省略乘号，但在向量点乘中不能省略点乘号。点乘得到的结果称为数量积：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

一般来说，点乘的结果描述了两个向量的“相似”程度，结果越大两个向量越相近。

进而由上面公式即可计算两个向量之间的夹角：

$$\cos(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

根据此时的点乘结果可以得出一些有用的性质，如下：

- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则说明$a$和$b$之间的夹角$\theta$等于90°；
- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，则说明$a$和$b$之间的夹角$\theta$小于90°；
- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则说明$a$和$b$之间的夹角$\theta$大于90°。

（6）叉乘运算

另一个向量乘法称作叉乘或叉积，仅可应用于3D场景，与点乘不一样的是，向量叉乘得到的是一个向量。叉乘运算在3D图形学中应用于许多领域，如碰撞检测、光照和物理计算等。给定两个3D向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，其叉积向量的大小为

$|\boldsymbol{a}| \ |\boldsymbol{b}| \sin\theta$，其方向垂直于向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$，如图1-6所示。

你可以用右手定则来判断一下叉乘得到的值是哪个方向。把你的手放在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的交点处，食指指向 $\boldsymbol{a}$，弯曲其他手指指向 $\boldsymbol{b}$，这时拇指所指的方向即为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$。

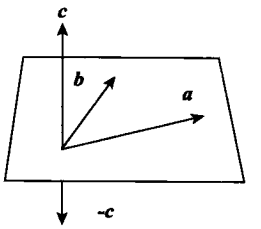


图1-6 向量叉乘 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

需要注意的是叉乘不满足交换率。由于叉乘可以计算出垂直于两个原向量的一个向量，所以经常用来计算面的法向量，这是因为任意两个3D向量都可以确定一个平面。

其实在实际运用中，我们经常会使用到矩阵运算（这将在后面介绍），所以我们会使用两个向量叉乘的另一个公式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-a_yb_x)$$

1.2 直线与平面

在游戏开发中，物体之间碰撞检测以及移动物体的寻径等都需要用到几何中的直线和平面的基本知识，在本节中，我们介绍这两个基本几何结构的基本方程以及它们之间的关系。需要强调的是，在游戏开发中，直线方程用得最多的形式是点法式方程，平面方程用得最多的也是点法式方程。读者可以对这些方程给予重点的关注。

1.2.1 直线方程

1. 空间直线的一般方程（交面式）

我们知道两个相交平面确定一条直线，即它们的交线；反之任何一条直线也可以看做由经过这条直线的两个平面所确定。如图1-7所示，设有相交平面为

$$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ 与}$$

$$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

它们的交线为 L，那么 L 既在平面 Π_1 上，又在平面 Π_2 上，因此直线 L 上任一点的坐标均满足这两个平面的方程，即满足方程组：

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

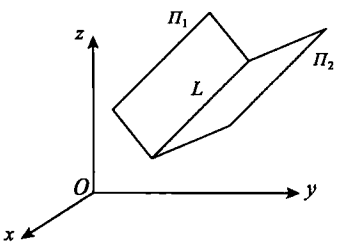


图1-7 两个平面的交线

反之，不在直线 L 上的点不能同时在平面 Π_1 和 Π_2 上，因此

不能满足以上方程组。所以以上方程组为直线 L 的方程，将它称为直线的一般方程。

2. 空间直线的点法式方程

如果一个非零向量平行于一条已知直线，这个向量叫做这条直线的方向向量。由此可知，直线上任一向量都平行于该直线的方向向量。

若直线 L 通过定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，且它的方向向量为 $s=(m, n, p)$，设点 $M(x, y, z)$ 是直线 L 上任意一点，则 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$，且 $\overrightarrow{MM_1}//s$，从而

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

以上方程就是直线 L 的方程，称为直线 L 的点法式方程。

3. 空间直线的参数方程

由直线方程的点法式，容易导出直线的参数方程。如设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

那么，

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

以上方程组就是直线的参数方程。

4. 空间直线的两点式方程

容易知道，两点可以确定直线。相应的直线方程就是

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

其中 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2) 是直线上两个已知的点。

$$\frac{x+2}{-3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{5}$$

5. 两直线的夹角

我们规定两直线的方向向量间的夹角 θ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 为两直线的夹角。

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量依次为 $s_1=(m_1, n_1, p_1)$，$s_2=(m_2, n_2, p_2)$，容易知道直线 L_1 和 L_2 的夹角余弦等于两直线方向向量夹角余弦的绝对值。

$$\cos\theta=\frac{|s_1\cdot s_2|}{|s_1||s_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

从两个向量垂直、平行的充分必要条件可得下列结论：

两条直线 L_1 和 L_2 平行的充分必要条件是 $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$；垂直的充分必要条件是 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$。

1.2.2 平面方程

1. 平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一平面，该向量就叫做该平面的法线向量。容易知道，平面上的任一向量均与该平面的法线向量垂直。当平面 Π 上一点 M_0（x_0，y_0，z_0）和它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$ 为已知时，平面 Π 的位置就完全确定了。设 M（x，y，z）是平面 Π 上的任一点，那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必与平面 Π 的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直（如图 1-8 所示），即它们的数量积等于零。

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$$

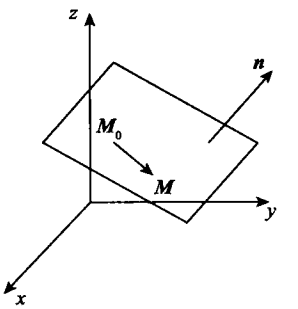


图 1-8 平面的点法式方程

由于

$$\boldsymbol{n}=(A, B, C),\ \overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$$

所以

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

这就是平面 Π 上任一点 M 的坐标 x，y，z 所满足的方程。

反过来，如果 M（x，y，z）不在平面 Π 上，那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与法线向量 $\boldsymbol{n}$ 不垂直，从而 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}\neq 0$，即不在平面 Π 上的点 M 的坐标 x，y，z 不满足此方程。

由于方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 是由平面 Π 上的一点 M_0（x_0，y_0，z_0）及它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$ 确定的，所以此方程叫做点法式方程。

2. 平面的一般方程

由平面的点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 可知，任一平面都可用 x，y，z 的一次方程来表示。反之，我们要问，x，y，z 的一次方程是否表示一个平面？答案是肯定的。

x，y，z 的三元一次方程的一般形式为：

$$Ax+By+Cz+D=0$$

由于平面的点法式方程是 x，y，z 的一次方程，而任一平面都可以用它上面的一点及它的法线向量来确定，所以任一平面都可以用三元一次方程来表示。

反过来，设有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

我们任取满足该方程的一组数 x_0，y_0，z_0，即

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

把上述两等式相减得到

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

这正是通过点 M_0（x_0，y_0，z_0）且以 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$ 为法线向量的平面方程。由于方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

与方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

同解，所以任一三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的图形总是一个平面。方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 称为平面的一般方程，其中 x，y，z 的系数就是该平面的一个法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标，即

$$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$$

1.2.3 直线与平面、平面与平面之间的关系

1. 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线与它在平面上的投影直线的夹角 θ（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$）称为直线与平面的夹角；当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为$\frac{\pi}{2}$。

设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，直线与平面的夹角为 θ，那么

$$\sin\theta=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

直线与平面垂直 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$ 的充分且必要条件是：$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$；直线与平面平行 $s/\!/n$ 的充分且必要条件是：$Am+Bn+Cp=0$。

2. 平面的夹角

两平面的位置关系不外是相交、垂直、平行与重合，这些关系可借助平面间的夹角来确定。两平面的法线向量的夹角（通常指锐角）称为两平面的夹角。

设平面 Π_1 和 Π_2 的法线向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，那么平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ 为：

$$\cos\theta=|\cos(\overset{\wedge}{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

3. 点到平面的距离

如图 1-9 所示，设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，设 $\boldsymbol{e}_n$ 是平面上的单位法线向量。在平面上任取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，则 P_0 到该平面的距离为

$$d=|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{e}_n|=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

其中 $\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$，$\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$

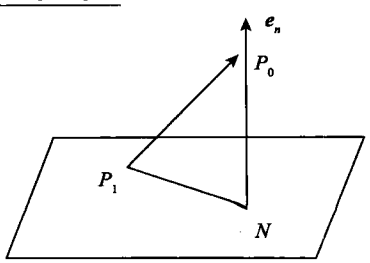


图 1-9 点到平面的距离

1.3 矩阵与坐标变换

在图形程序的开发过程中，我们经常要对物体进行一些几何变换操作。也就是说，将一个几何图形按照一定的规则或规律变换为另一个新的几何图形，实际上图形的几何变换是对物体顶点坐标进行变换的过程。其中最基本的3种变换是平移、旋转和缩放。下面我们首先介绍在2D空间内的这3种变换，然后将其推广到3D空间中。

1.3.1 矩阵

矩阵是3D数学的重要基础，坐标系的转换和模型变换都要用到矩阵，因此在这里有必要讨论一下矩阵的性质和运算。

在线性代数中，矩阵就是以行和列的形式组织的矩形数字块。我们可以使用 $m \times n$ 来定义矩阵的尺寸，它表示该矩阵 m 行和 n 列。我们可以根据行和列的值引用矩阵中指定位置的元素值，通常用第 i 行第 j 列来表示。对于下面的 3×3 矩阵 $\boldsymbol{M}$，就可以表示如下：

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

其中，m_{00} 为矩阵的第一行第一列元素值。

下面介绍几个特殊矩阵：

（1）方阵和对角矩阵

行数和列数相同的矩阵称作方阵，这个概念非常重要，方阵中的对角线元素就是方阵中行号和列号相同的元素。比如，上述矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的对角线元素为 m_{00}、m_{11} 和 m_{22}，而其他元素为非对角元素。如果非对角元素都为0，那么称这种矩阵为对角矩阵。例如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

（2）单位矩阵

单位矩阵是一种特殊的对角矩阵。n 维单位矩阵记作 $\boldsymbol{I}_n$，它是 $n \times n$ 的矩阵，其对角线元素为1，其他元素为0。例如，3×3 单位矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

单位矩阵非常特殊，如果用一个矩阵和一个相应的单位矩阵相乘，其结果还是原来的矩阵。稍后我们会讲解矩阵的乘法运算。

下面我们就介绍一下有关矩阵的运算。

（1）矩阵的加法和减法

矩阵的加法和减法运算非常简单，只需将对应位置上的元素进行相加或相减，其结果作为结果矩阵在该位置上的值。但是，首先要确定参加运算的矩阵具有相同的阶数，否则运算将无法进行。