

大代數學講義

上 冊

著 野 清
譯 家 菴
上 王 華
張 廷

商務印書館發行

大代數學講義

上册

上野清著

王家荻張廷華譯

駱師曾趙秉良校

王積沂壽孝天

商務印書館發行

序

俯仰宇宙。自自然界。人爲界。形而上者。形而下者。系而爲學。釐而爲科。繁然錯列。莫殫莫究。卽就一科而言之。有委有原。有約有博。作者創始。述者增高。屢屢乎日進而未有極限。學者之習科學也。當其始患不得入其門。既入其門。則欲罷不能。恆以一探究竟博觀變化爲愉快。遊山者思登五嶽之高。觀水者思極九瀛之闊。人情大抵然乎。憶曩時初習代數。所循誦者爲製造局之譯本。深喜代數立術。能探究數之公性情。足與中土天元術相頡頏。以視舊有各術之枝枝節節而爲之者。難易蓋迥判矣。然嘗因其術而觸類引伸。覺意象之表。尙有種種繁賾之理。足供研究者在。惜所誦之本。尙語焉而不詳。偶見某雜誌。載級數求和之解法。批卻導竅。得未曾有。聞友人述。謂是固譯自東文大代數者耳。於是知海外著述。不乏淵博精深先得我心者。深自恨未諳東文。無由窺此鴻祕也。近年以來。代數學教科書。出版日多。初學入門。可無困難之感。默計此時明習代數之人。當倍蓰於十年以前。苟非遂譯程度較高之書。引入於深造之域。殆不足壓其拾級而登之願望。館中同人。不辭勞瘁。取日本上野清之大代數講義而譯之。期年而譯始成。又期年而印始成。某以與於校勘之役。藉得稍稍瀏覽。一償夙願。既深自幸。且以此忖度並世學子之心。知其對於是書之出版。亦必有以先覩爲快者焉。吁。來者不可知。由今日言之。則是書者。固代數學中之五嶽九瀛也矣。

己酉年夏五月紹興壽孝天識於商務印書館編譯所

例 言

一是書爲日本上野清氏所編纂。取英國斯密斯氏霍爾氏乃托氏三家之大代數學。譯述解證。演爲講義。其立義之嶄新。體例之完備。久爲彼國教育家所歡迎。今重譯之。以供吾國習代數者參考之用。

一斯密斯氏書。自開端始。霍爾氏乃托氏書。自比例始。本書以斯密斯氏本爲主。以霍爾氏乃托氏之說補其缺。皆依據一千八百九十三年間最新之版而蒐採。上野氏此書。實可謂集三家之大成。

一是書共分八卷。都三十二編。自第一編至第十九編專論數之運算及性質。可稱爲初等之部。自第二十編至第三十二編。於數之運算及性質外。詳論數之變化及配合。可稱爲高等之部。學者明此界限。循序漸進。自無難通之處。苟能反覆熟習。代數學之奧蘊畢宣矣。

一是書例題之解答。專爲查對而設。學者習至例題。宜先以己意解演之。後視其與是書合否。合則考其孰繁孰簡。不合則考其誤在何處。庶易得益。若第按文循誦。而曰是易解是易解。則非編纂者之本意也。

一是書材料豐富。凡代數學之理法。包括殆盡。即向之稱爲難題者。依此書之理法解之。自覺游刃有餘。

一是書各種名詞。悉照現今所通行者而用之。仍附載英文原名。以資考證。譯文之中。間有爲譯者所添註而非上野清氏原書之所有者。則標譯註二字以爲區別。

一是書文字不尙高深。解說不厭煩瑣。務以達意爲主。惟卷帙浩繁。譯述讐校。前後易數人之手。始克竣事。未當之處。訛誤之處。均恐不免。還望海內大雅。匡其不逮。則幸甚矣。

目 錄

第 壹 卷

第 壹 編

定義	1
例題及解	7

第 貳 編

根原之法則, 名數量, 正負 數量, 絕對量	9
加法	10
減法	11
例題及解	13
乘法	14
指數之法則	18
例題及解	18
除法	19
例題及解	21
根原之公式	22
多項式配分法則	22

第 參 編

加法	25
減法	26
括弧用法	26
例題一及解	27

第 肆 編

乘法	31
-----------	----

要用之公式	41
例題二及解	41

第 伍 編

除法	52
除法之別定義	55
恒同式	56
例題三及解	56

第 陸 編

因子分割法, 公式用法 ...	62
例題四及解	64
普通二次式之因子	66
係數之關係	68
項之整列及集合	69
例題五及解	73
整除式之定理	78
輪換次序	83
等勢式	84
例題六及解	87

第 陸 編 (補)

等勢式(霍爾及乃托氏第 三十四編摘要)	95
例題(三十四 a)及解	95
例題(三十四 b)及解	97

第 貳 卷

第 柒 編

	頁
最高公因子	98
例題及解	99
兩多項式之最高公因子	99
例題七及解	106
最低公倍數	109
例題及解	109
兩多項式之最低公倍數	110
例題八及解	110

第 捌 編

分數	114
分數之定理	114
通分母	115
分數之加法	116
分數之乘法	118
分數之除法	118
例題九及解	122

第 玖 編

方程式, 壹未知數量	185
一次方程式	136
例題及解	188
因子分割法之應用	139

	頁
二次方程式	140
例題及解	142
二根之詳論	143
特別之例	144
不整方程式	146
無理方程式	149
定理	151
根及係數之關係	152
二次三項式之值	156
例題十及解	160
高次方程式	175
反商方程式	177
二項方程式	179
一之立方根	180
例題十一及解	181

第 玖 編 (補)

二次三項式(霍爾及乃托 氏第九編摘要)	191
例題(九b)及解	192
雜方程式(霍爾及乃托氏 第十編摘要)	192
例題(十a)及解	193
分指數及負指數之注意	194

第 三 卷

第 拾 編

	頁
通同方程式	195
十文字之法	197
論一次通同方程式之解 法, 例解	199
例題十二及解	204
二次通同方程式, 例解	210
例題十三及解	214
解諸未知數量之通同方 程式, 例解	220
例題十四及解	225

◆ 第 拾 壹 編

問題, 例解	236
例題十五及解	239

第 拾 貳 編

雜定理及雜例題	250
消去法, 例解	250
普通二次式之定理	253

	頁
例題及解	253
文字值之限制	253
例題及解	254
三次恆同式, 例解	255
定義	257
雜例	257
例題十六及解	259

第 拾 貳 編 (補)

消去法(霍爾及乃托氏第 三十四編摘要)	281
------------------------------	-----

第 拾 叁 編

方乘	282
方根	284
分指數及負指數	285
例題及解	288
有理補因子	288
例題十七及解	289

第 肆 卷

第 拾 肆 編

	頁
不盡根	295
例題及解	296
不盡根之定理	297
相屬不盡根	297
例題十八及解	300
虛數及複虛數	304
相屬複虛數, 模數	306

第 拾 伍 編

平方根	303
立方根	312
例題十九及解	315

第 拾 陸 編

比	320
比例	321
例題及解	324
變數	325
例題及解	327
不定式	328
例題及解	329
例題二十及解	329

第 拾 柒 編

等差級數	336
例題及解	338

頁

等比級數	342
例題及解	345
調和級數	347
三級數之中項	347
例題二十一及解	349

第 拾 捌 編

記數法	359
例題及解	360
分底數	361
例題及解	362
定理	363
例題及解	364
例題二十二及解	366

第 拾 玖 編

排列	372
例題及解	374
組合法	375
例題及解	377
組合之最大值	380
定理	380
等次積	382
例題及解	383
雜例	383
例題二十三及解	387

第 伍 卷

第 貳 拾 編

	頁
二項式之定理... ..	395
二項式展開之最大項, 最大係數... ..	398
例題二十四及解... ..	399
二項展開式係數之性質... ..	402
例題及解... ..	403
文覃蒙 (Vandermonde) 氏定理之證... ..	406
多項式之定理... ..	407
例題及解... ..	408
多項式公項之係數... ..	408
例題及解... ..	408
例題二十五及解... ..	410

第 貳 拾 壹 編

斂級數及發級數... ..	421
斂級數之關係... ..	422
項之符號... ..	429
最要三級數... ..	430
無限數因子之積, 兩級數之積... ..	432
例題二十六及解... ..	434

第 貳 拾 貳 編

二項式之任意指數, 二項式之斂級數... ..	442
-------------------------	-----

	頁
尤拉 (Euler) 氏之證明... ..	444
例題及解... ..	445
項之符號... ..	446
最大項... ..	447
例題及解... ..	449
例題二十七及解... ..	450
係數之和... ..	453
例題及解... ..	454
二項級數... ..	455
例題及解... ..	456
相等係數... ..	457
多項式之展開式... ..	459
多項式之雜例... ..	460
同物之組合... ..	461
例題及解... ..	462
等次積, 雜例... ..	463
例題二十八及解... ..	466

第 貳 拾 叁 編

分項分數及不定係數, 一次因子之分母... ..	484
例題及解... ..	485
同因子之分母... ..	487
分項分數之應用... ..	488
不定係數... ..	489
例題二十九及解... ..	491

第 陸、卷

第 貳 拾 肆 編

	頁
指數之定理..	498
例題三十及解...	502
對數, 對數之性質...	505
對數級數.	506
對數之計算..	508
訥白爾(Napier)氏之對數.	508
例題三十一及解...	509
常用對數.	518
對數表之用法...	519
複利及年金...	520
例題三十二及解...	522

第 貳 拾 伍 編

級數之和.	525
例題及解.	525
問題...	527
例題及解.	528
問題...	529
例題及解.	530
分項...	531
問題...	532
積彈...	533
例題及解.	534

	頁
形數, 多角數.	535
例題三十三及解...	536
問題...	542
例題及解.	544
問題...	544
例題及解.	545
級數諸項成立之規率.	546
逐差法...	546
循環級數, 問題, 定理...	548
欽級數及發級數...	553
二項式之級數...	555
可西(Cauchy)氏之定理...	556
例題三十四及解...	559

第 貳 拾 陸 編

不等式...	576
例題及解, 定理..	579
雜例...	583
例題三十五及解...	585

第 貳 拾 柒 編 (上)

連分數, 漸近分數...	594
例題及解.	597
連分數之作法...	598

第 柒 卷

第 貳 拾 柒 編 (續)

	頁
連分數續,漸近分數之性質	601
例題三十六及解	605
一般之漸近分數	611
循環連分數	614
連分數之歛級數	616
連分數之二次不盡根	622
二次不盡根作連分數	623
連分數之級數	626
例題三十七及解	630

第 貳 拾 捌 編

數之法則	645
耶列多蘇 (<i>Eratosthenes</i>) 氏 之選法	645
例題及解	651
勿而馬 (<i>Fermat</i>) 氏之定理	652
例題及解	652
問題	653
例題及解	654
問題	655
例題及解	657

	頁
平方數之形	658
例題三十八及解	661
恒同餘數	666
等餘之性質	667
勿而馬 (<i>Fermat</i>) 氏之定理	668
維而孫 (<i>Wilson</i>) 氏之定理	669
勿而馬 (<i>Fermat</i>) 氏定理之 擴張	672
拉果闡諸 (<i>Lagrange</i>) 氏之 定理	672
循環小數之分數變化	673
雜例	674
例題三十九及解	676

第 貳 拾 玖 編

不定方程式	682
例題四十及解	689

第 貳 拾 玖 編 (補)

二次不定方程式 (霍爾及 乃托氏第二十八編摘要)	698
例題 (二十八) 及解	701

第 捌 卷

第 叁 拾 編

	頁
適遇法	704
例題及解	707
多次試驗之適遇	712
例題及解	713
豫期, 例題及解	718
反適遇, 例題及解	721
證據之適遇, 例題及解	723
雜例	725
例題四十一及解	728

第 叁 拾 壹 編

定準數	743
例題及解	746
定理, 例題及解	747
小定準數	750
定準數之展開式	750
例題及解	752
乘法之原則, 例題及解	757
複縱線式, 通同一次方 式, 例題及解	760
消去法	762
例題四十二及解	764

第 叁 拾 貳 編

論理方程式, 函數	775
根原之定理	775

	頁
根及係數之關係	776
根之等勢式	776
根之等勢函數	779
等勢函數之例	780
方程式之變化	781
應用	784
例題四十三及解	786
虛數	790
不盡根, 例題及解	791
兩方程式之公根, 根之關 係	792
可通度之根	793
例題四十四及解	794
變函數	799
有理整函數之變化	802
洛兒 (<i>Rolle</i>) 氏之定理	805
代加德 (<i>Descartes</i>) 氏之符 號規則	806
例題四十五及解	808
三次方程式	812
四次方程式	814
斯土莫 (<i>Sturm</i>) 氏之定理	815
綜合除法	820
拾之倍數	823
忽擊 (<i>Horner</i>) 氏之定理	823
例題四十六及解	827

查 理 斯 密 司 氏
霍 爾 氏， 乃 托 氏

大 代 數 學 講 義

第 壹 卷

第 壹 編

定 義

1. 代數學 (Algebra) 爲論數之學科。與算術 (Arithmetic) 同。

譯注。算術舊稱數學。今從本書原名。稱算術。

算術中以 5, 6, 等數字表數。其數字各有一定之值。代數學中以文字表數。其文字可代任何之數(即未定之數)。此代任何數之文字。謂之元字。但在一個題內所用同一之元字。所代爲同一之數。

代數學中所用之元字。可以代任何之數。故凡所論數之理法可推之於任何數而皆同。

例如 5 加 6 所得之數爲 11。此算術中所論之理法。不能類推之於他數。若代數中用元字代數。如 a 加 a 其所得之數常爲 a 之 2 倍。此 a 不論爲任何數皆合。

2. 數 (Numbers) 謂整數及分數也。

又有數量者。如價值, 長, 面積, 時間之類。各以其單位爲標準。而以數示其爲單位之若干倍或若干分。

例如記物之長爲 4。此必爲其單位所度得之數。其單位爲一尺, 或一步, 或一里, 或爲別定之長。則其物之長。即爲 4 尺, 或 4 步, 或 4 里, 或爲所定之長之 4 倍。

夫數者。本祇用以計算數量。故無論以元字或數字。爲數量之記號。其元字與數字。皆僅能表其數量之數。而數與數量。雖有分別。尋常亦屢有以數量二字爲數之代字者。

譯註 算術中全以數字與單位相連而言。如4尺或4步謂之名數。對名數而言。則凡不連舉單位之數。謂之不名數。名數所以表數量。而名數中所用之數字。仍以表數而已。

[注意] 此後各章。其關係尤要者。常加()爲記號。如下3章關係尤要。故作(3)。

3. 加號 + (Plus) 置此號於一數之前。以示此一數加於前一數也。

例 $6+3$ 。以示3加於6也。又 $6+3+2$ 。以示3加於6之後。又以2加之也。

$a+b$ 。以示 b 加於 a 也。又 $a+b+c$ 。以示 b 加於 a 之後。又以 c 加之也。

4. 減號 - (Minus) 置此號於一數之前。以示從前一數減去此一數也。

例 $6-3$ 。所以示自6減去3也。又 $6-3-2$ 。所以示自6減3之後又以2減之也。

$a-b$ 。所以示自 a 減去 b 也。又 $a-b-c$ 。所以示自 a 減 b 之後又以 c 減之也。此與加號之次序同。

加減兩號並用。如 $a+b-c$ 。爲 b 加於 a 之後而以 c 減之。

又 $a-b+c$ 。爲自 a 減去 b 而又以 c 加之也。

[法則] 加減之運算。必從左順次以及於右。

例 $9+3+2=12+2=14$ 。此從左及於右者也。

又 $9+3+2=9+5=14$ 。此從右及於左者也。

加法之演算。從右及於左。其結果尚無不合。然依此習慣。以行於減法。則有大誤。

例 $9-3-2=6-2=4$ 。此從左及於右者也。

若從右及左而運算之。則 $9-3-2=9-1=8$ 。卽爲大誤。何則以 $9-3-2$ 之意。謂從9減3餘6。又從6減2餘4。此4卽所得之結果。若從右運算。則與題意違背。學者宜慎之。

又 $9+8-2=12-2=10$ 。此從左及於右者也。

$9+3-2=9+1=10$ 。此從右及於左者也。其結果尙無不合。

$9-3+2=6+2=8$ 。此從左及於右者也。

$9-3+2=9-5=4$ 。此從右及於左者也。其結果不合。

5. 乘號 \times (into) 置此號於一數之前。以示此一數乘於前一數也。

例 $a \times b$ 。所以示以 b 乘 a 也。 $a \times b \times c$ 。所以示以 b 乘 a 。又以 c 乘之也。

文字與文字之間。或數字與文字之間。其乘號可省。例 $a \times b$ 記爲 ab 。 $a \times b \times c$ 記爲 abc 。

若夫數字與數字之間。其乘號斷不可省。否則大誤。例記 3×6 爲 36 。此 36 卽爲三十六之數。斷不可以代 3×6 者也。

有時以點(.)代乘號。然恐其與小數點相混。故記此點時。比小數點略低。例 6×3 則記如 6.3 。

〔餘論〕數字與數字之間。加號有時可省。

例 $60+3$ 卽 63 。又 $6+\frac{3}{10}$ 卽 $6\frac{3}{10}$ 。

然如 $8+3$ 則不得記爲 83 。

6. 除號 \div (Divided by) 置此號於一數之前。以示用此一數以除前一數也。

例 $a \div b$ 。卽 a 以 b 除也。 $a \div b \div c$ 。所以示 a 以 b 除。又以 c 除之也。

乘除兩號並用。如 $a \div b \times c$ 。爲 a 以 b 除。又以 c 乘之也。又 $a \times b \div c$ 。爲 a 以 b 乘。又以 c 除之也。

〔法則〕乘除之運算。亦從左順次以及於右。與加減之運算同。

若運用加減乘除之記號。如 $a-b \times c + c \div d$ 。其運算之次序若何。則於 16 章之末別爲說明之。

7. 積 (Product) 凡二數或二個以上之數相乘。其結果爲諸數之連乘積 (Continued product)。或單稱積。而其所乘之諸數。爲其積之因子 (Factor)。

將積之因子分而爲二。彼此互爲係數 (Coefficient)。

例將 $3abx$ 之因子分爲 3 與 abx 。則 3 爲 abx 之係數。而 abx 爲 3 之係數。

若分爲 $3ab$ 與 x 。則 $3ab$ 爲 x 之係數。而 x 爲 $3ab$ 之係數。

積中一因子以數字表之者。謂之數字係數 (numerical coefficient)。

例 $3abx$ 。其 3 爲 abx 之數字係數。

[注意] 係數用數字係數之處最多。

8. 方乘 (Power) 諸因子相同。其所成之積。爲其因子之方乘。例 a 與 a 二因子所成之積 aa 。爲 a 之二方乘。又 aaa 爲 a 之三方乘。 $aaaa$ 爲 a 之四方乘。以下類推。

有時祇有一個因子 a 。即以爲 a 之一方乘。

二方乘亦稱平方 (Square)。三方乘亦稱立方 (Cube)。例 aa 爲 a 之平方。 aaa 爲 a 之立方。

9. 指數 (Index) $aa, aaa, aaaa$ 等之方乘簡略記法。即以 a^2 代 aa 。以 a^3 代 aaa 。以 a^4 代 $aaaa$ 。故 a^n 可以代 $aaaa\cdots$ 乘至 n 次之方乘也 (n 爲整數)。

其於 a 之右肩上所記之小數字 2, 3, 4 及文字 n 。所以示同因子之數。如 a^{3b^2} 即爲 $aaabb$ 。

如上所記之小數字及文字以示同因子之數者。稱爲指數。 a 之一方乘當記爲 a^1 。然可略之。僅記爲 a 。

10. 方根 (Root) 若一數之平方等於 a 。則其一數。爲 a 之平方根。例 4 之平方即 4^2 等於 16。則 4 爲 16 之平方根。

平方根 (Square Root) 之記號。記以 $\sqrt{\quad}$ 。或略記以 $\sqrt{\quad}$ 。故 \sqrt{a} 爲 a 之平方根。 $\sqrt{16}$ 爲 16 之平方根。即 $\sqrt{16} = 4$ 。

若一數之立方等於 a 。則其一數爲 a 之立方根。例 3 之立方即 3^3 等於 27。故 3 爲 27 之立方根。

立方根 (Cube Root) 之記號。記以 $\sqrt[3]{\quad}$ 。故 $\sqrt[3]{a}$ 爲 a 之立方根。又 $\sqrt[3]{27}$ 即 3 爲 27 之立方根。

四乘根記以 $\sqrt[4]{\quad}$ 。五乘根記以 $\sqrt[5]{\quad}$ 。又 n 乘根記以 $\sqrt[n]{\quad}$ 。故 $\sqrt[n]{a}$ 爲 a 之四乘根。 $\sqrt[n]{a}$ 爲 a 之 n 乘根。但 n 限於整數。

√之記號。蓋從根字即 Radix 之首字碼 r 變化而成。此種記號稱爲根號 (Radical Sign)。

11. 不盡根 (Surd) 所得之方根。其小數無盡者。稱爲不盡根或無理數 (Irrational Surd)。例 $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt[4]{4}$ 若精密求之。其小數無有窮盡。故稱 $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt[4]{4}$ 等爲不盡根。

依算術上求平方根之法。 $\sqrt{7}$ 之值僅能得其略近數 2.6457..... 若於代數學 7 之平方根。祇記爲 $\sqrt{7}$ 而已。

12. 代數式 (Algebraical expression) 以種種之文字, 數字, 符號集合而成者。

例如 $7a + b^2 - cd$ 或 $\sqrt{a+9}$ 等。皆爲代數式。

若如 $+ \times 6 - \div ab$ 爲任意集合毫無意義者。不得謂之代數式。

項 (Terms) 以 + 或 - 相連之各部爲項。

例 $2a - 3bx + 5cy^2$ 此代數式之各部。爲 $2a - 3bx, + 5cy^2$ 。即此代數式爲有三項者。

若以 \times 或 \div 相連之各部。不得曰項。例 $5 + 6 - 7$ 爲有 5, +6, -7 之三項。若 $5 \times 6 \div 7$ 。其全部分僅得爲一項。

例 $2a - 3bx + 5cy^2$ 爲 $2 \times a - 3 \times b \times x + 5 \times c \times y \times y$ 。其在 + 及 - 之間者得謂之項。其在 \times 與 + 或 - 之間者不得謂之項。

13. 同類項 (Like terms) 有二項。除數字係數之外。其餘悉相同者。謂之同類項。

例 a 與 $3a$ 爲同類項。 $5a^2b^2c$ 與 $3a^2b^2c$ 爲同類項。

至若 $5a^2b^2c$ 與 $3a^3b^2c$ 則爲異類而不同類項。何則。一數中 a 之因子有二。 b 之因子有三。而又一數中 a 之因子有三。 b 之因子有二。故相異也。又 $5a^2b$ 與 $5ax$ 亦爲異類項。

14. 壹項式 (Monomial expression) 代數式祇有一項者。例如 $3ab, 7 \div 6 \times 8$ 。皆爲壹項式。

多項式 (Multinomial expression) 代數式有二項或二以上之項者。

例如 $a + b, a - b \times c$ 爲二項式 (Binomial expression)。