

LIANXUJIEZHI

LIXUEJICHU

力学基础  
连续介质

封振华 编著

陕西师范大学出版社

# 连续介质力学基础

封振华 编著

陕西师范大学出版社

867800

**连续介质力学基础**

封振华 编著

陕西师范大学出版社出版

(西安市陕西师大120信箱)

陕西省新华书店经销 西安电子科技大学印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 11.125 字数 231千

1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷

印数：1-4000

ISBN7-5613-0095-6

G·102 定价：1.85元

## 内 容 简 介

《连续介质力学基础》一书是根据编者的《连续介质力学讲义》改编而成的。全书共分五章：弹性力学、流体运动学、理想流体动力学，流体静力学、粘滞性流体力学。根据少而精的原则，编者将最基本的理论作简明扼要的阐述。本书的特点是叙述通俗易懂，概念清晰明确，逻辑性强、公式推导步骤详细，引证注有出处，只要有一定场论、偏微分方程知识的读者，均可看懂。

本书可供物理、数学专业高年级学生选修课或研究生教材，也可作为土建、机械、水利、水文，气象、海洋、地球物理、航空、地质、石油等专业的教材或自学者的参考。

本书是在原来使用的《连续介质力学讲义》的基础上加以改编和扩充。全书共分五章：弹性力学、流体运动学、理想流体动力学、流体静力学、粘滞性流体力学。考虑到各学校各专业的要求不同，编者依照少而精的原则，将最基本的理论作简明扼要的论述。重要公式均用方框括起来，对于独立性较大的内容都标以“※”号，以示教师，读者自酌。

《连续介质力学基础》作为一门完整理论已经建立数十年，但适用于理工科通用的教材，在国内尚无出现。在50—60年代，我国曾将这门理论的一部分内容编进物理专业《理论力学》教材中作简单介绍，而工科院校有的专业则只是根据其专业特点选择取舍这门理论的一部分内容给学生介绍，有的专业则根据所需，就其中某一部分另开专门课程，故使学生对这门理论缺乏一个完整、系统、全面的认识 and 了解。近几年来，科学有了新的发展，各类边缘学科相继诞生。数学、物理学、化学、生物学、天文学、地质学、气象学、工程等学科相互渗透。这就给缺乏全面认识、了解这门理论的学生在生产、科研工作中带来困难。鉴于这种情况，编者编写了《连续介质力学基础》这本书，其目的就是要系统、扼要的这门学科的主要理论进行论述，可供理科的数学、物理专业的高年级学生和研究生作选修课教材，同时也可为工科院校的土建、机械、航空、水文、气象、海洋、地质、地球物理、石油等专业的学生参考。

本书是编者在原来使用的《连续介质力学讲义》的基础上加以改编和扩充。全书共分五章：弹性力学、流体运动学、理想流体动力学、流体静力学、粘滞性流体力学。考虑到各学校各专业的要求不同，编者依照少而精的原则，将最基本的理论作简明扼要的论述。重要公式均用方框括起来，对于独立性较大的内容都标以“※”号，以示教师，读者自酌。

本书的特点是叙述通俗易懂，物理概念力求交待清楚，理论严谨，逻辑性强，公式推证步骤详细，只要读者具有场论，偏微分方程方面的**知识**，即可**看懂**。

本书写出初稿后经赵恒元、罗长薰二位教授审阅，提出许多宝贵意见，书中插图，全部由封慎同志绘制。在此一并表示**致谢**。本书承蒙陕西师范大学出版社大力协助出版，表示诚挚感谢！限于编者水平，书中难免出现**缺点和错误**，希望读者批评指正。

1987年3月于西安

# 目 录

绪论	1
§ 0-1 连续介质理论的物理基础	1
§ 0-2 连续介质理论的应用可能性的一般判 处	2
§ 0-3 过渡范围内的物理问题	4
§ 0-4 连续介质力学在工业上的应用与展望	4
第一章 弹性力学	9
§ 1-1 弹性体	9
§ 1-2 应变的分析	12
1. 连续介质内小位移的描述、位移张量	12
2. 形变的几何意义, 小位移分解为平动、转 动和形变	15
3. 应变二次曲面、应变主轴	23
4. 体胀系数	27
§ 1-3 应力的分析	28
1. 体力和面力	28
2. 应力张量及分量的意义; 应力张量的对 称性	30
3. 应力二次曲面、应力主轴、主应力	32
§ 1-4 弹性体的平衡方程	36
§ 1-5 应力与应变的关系——弹性系数	37
1. 广义虎克定律	37

2. 各向同性体的虎克定律 .....	40
3. 推广的虎克定律 .....	51
4. 弹性体的边界条件、拉密定理 .....	56
§ 1-6 柱体的挠曲 .....	60
1. 梁的挠曲公式 .....	60
2. 梁的挠度 .....	68
3. 两端固定中点荷载的梁的挠度 .....	70
§ 1-7 柱体的扭转 .....	70
1. 柱体的位移分量 .....	70
2. 柱体的应变分量与应力分量 .....	72
3. 柱体扭转的平衡 .....	73
* § 1-8 固体中弹性波的传播 .....	76
1. 在无限介质中的纵波 .....	77
2. 在无限介质中的横波 .....	83
<b>第二章 流体运动学</b> .....	<b>85</b>
§ 2-1 流体力学的研究方法 .....	85
1. 拉格伦日法 .....	85
2. 欧拉法 .....	87
3. 定常运动与均匀运动 .....	92
§ 2-2 流线、轨道与流管 .....	92
1. 流线 .....	92
2. 轨道 .....	93
3. 流管 .....	94
§ 2-3 拉格伦日变数与欧拉变数之间的关系 .....	94
§ 2-4 连续性方程 .....	95
1. 欧拉型的连续性方程 .....	95



§ 2-2	连续性方程的柱面坐标、球面坐标表示	101
§ 2-5	流体运动的分析	103
1.	运动流体中各点的速度	103
2.	形变二次曲面	110
3.	形变主轴	112
§ 2-6	体胀速度	112
§ 2-7	无旋运动的运动特性	115
1.	速度势	115
2.	无旋运动的连续性方程	118
3.	三维不可压缩流体流动的流函数	119
4.	流函数与速度势的关系	120
5.	复速度与复势	121
6.	加速度势	123
§ 2-8	质量流和它的性质	124
§ 2-9	速度的环流	129
§ 2-10	不可压缩流体旋涡运动的矢量势	130
§ 2-11	连通空间的无旋运动	132
<b>第三章 理想流体动力学</b>		<b>135</b>
§ 2-1	理想流体中的动压力	135
1.	质量力与表面力	135
2.	理想流体中的动压力	137
§ 3-2	理想流体的普遍运动方程	139
§ 3-3	欧拉动力学方程的矢量表示式	141
§ 3-4	欧拉型流体力学方程的各种坐标表示形式	142
1.	笛卡尔坐标表示法	142

*2.	柱面坐标表示法	143
*3.	曲线坐标表示法	146
4.	球面坐标表示法	151
§ 3-5	流体动力学要解决的问题	153
§ 3-6	不可压缩流体情况	154
§ 3-7	可压缩流体情况与热力学关系	155
1.	正压性流体情形	155
2.	斜压性流体情形	157
§ 3-8	起始条件与边界条件	160
1.	起始条件	160
2.	边界条件	161
(1)	运动边界条件	161
(2)	动力边界条件	162
§ 3-9	欧拉方程沿流线的积分——伯努利积分	163
§ 3-10	理想流体的无旋运动——欧拉方程的积分(拉格朗日积分或势函数积分)	167
§ 3-11	稳定的无旋运动	170
§ 3-12	对速度的限制	171
* § 3-13	动量定理与动量矩定理的应用	172
§ 3-14	能量方程式、能量通量、动量通量	178
1.	能量方程式	178
2.	能量通量	181
*3.	动量通量	184
§ 3-15	理想流体的旋涡运动、速度环流定理	187
1.	理想流体的旋涡运动	187
2.	速度环流定理	189

§ 3-16. 亥姆霍兹定理	192
1. 涡旋强度的守恒定理	192
2. 涡线的守恒定理	193
§ 3-17. 形成涡旋的实例	194
1. 贸易风和反贸易风	194
2. 季风、微风和旋风	195
3. 海流	196
§ 3-18. 飞机翼的举力	197
§ 3-19. 重力波	200
1. 重力波的基本方程	201
2. 群波与重力波的传播速度	207
3. 重力波的应用举例	212
§ 3-20. 重力长波	218
1. 基本方程式	219
2. 等深度渠道中的长波	223
<b>第四章 流体静力学</b>	<b>225</b>
§ 4-1. 平衡方程式	225
§ 4-2. 大气压力公式	228
§ 4-3. 固体表面上压力的一般公式	232
§ 4-4. 阿基米德定律	233
§ 4-5. 浮体平衡的条件	236
§ 4-6. 平衡的稳定性	237
<b>第五章 粘滞性流体动力学</b>	<b>239</b>
§ 5-1. 粘滞系数	239
§ 5-2. 粘滞性流体的运动方程	243
1. 粘滞性流体的应力与形变速度的关系	244

2. 粘滞性流体的运动方程.....245

§ 5-3 动力相似、雷诺数.....249

1. 动力相似.....249

2. 雷诺数.....252

§ 5-4 管道中的流动——泊肃叶定律.....254

1. 二平行板间的稳定流动.....254

2. 管道中的流动——泊肃叶定律.....257

§ 5-5 层流、附面层与湍流.....261

1. 层流.....261

2. 附面层.....262

(1) 边界层内流体的运动方程.....262

(2) 平板的阻力.....268

3. 湍流.....274

§ 5-6 物体在流体中运动所受到的阻力(斯托克斯定律).....276

1. 运动方程.....276

2. 小圆球在不可压缩的粘滞性流体中运  
的速度分布.....277

3. 小圆球所受到压力的计算.....291

4. 球体所受的阻力.....292

5. 斯托克斯定律的应用.....297

§ 5-7 涡旋的形成.....298

§ 5-8 绕流线型物体的运动.....302

1. 湍流区域和分离现象.....302

2. 分离线附近的流动.....304

3. 绕流线型物体的运动.....308

- \* § 5-9 流体的传输过程.....310
  - 1. 热量传输的基本方程.....311
  - 2. 扩散——混合流体的流体动力学方程.....319
  - 3. 传质系数与热扩散系数.....328
- \* § 5-10 表面现象——表面压力的拉普拉斯公式 ...336

## 绪 论

### § 0-1 连续介质理论的物理基础

如果形成质点组的质点连续地充满了整个体系所占有的空间，则这个质点组称为连续介质。在研究连续介质的运动或平衡时，我们并不考虑它的各分子之间的相互作用以及各分子的运动，这样就可以把连续介质力学的问题简化为“宏观力学”的一部分，只须研究其宏观的力学性质而不必考虑其微细的结构问题，也就是说不必考虑构成连续介质质点的内部分子运动问题，因此质点组力学的一般理论是研究连续介质力学的必要基础。

连续介质和刚体不同，刚体只是一种理想化的物体，通常我们认为它具有一定的形状和体积的固体，当受到外力作用后，质点间的相对位置，严格来说不能认为保持不变，只是这种变化比较微小，在研究整个物体运动或平衡时，略去不计。而连续介质在受到外力作用时，要发生形状和体积的变化，如果外力不超过某一限度，则当外力除去后，仍能恢复原有的形状和体积，这种连续介质称为弹性物体，而把物体的这种性质叫做弹性，研究弹性物体的平衡和振动问题叫做弹性力学。

另一种连续介质是液体和气体，它们有一个主要共同特点，就是都不能保持有一定的形状，所以通常称为流体。当流体受到外力作用，无论此外力多么小都能迫使它们的内部

各部分间发生相对的位移，流体就发生流动，当外力除去以后，并不回到原有的位置。研究流体的运动问题，属于流体力学范畴。

顺便指出一点，不要以为只有固体才有弹性，液体和气体也有弹性，不过通常只具有体积方面弹性，而不具有改变形状方面的弹性，即没有切形变弹性的恢复（固体受力后有时体积改变显著，如棒的伸长，有时形状改变显著如轴的扭转），如充气的皮球或充水的水袋，用手一压就下去一个坑，手一拿开，又可复原。

密度是连续介质中一个重要特性物理量，用它表明连续介质在空间的分布。如果在连续介质中取一个足够小的体积  $\Delta r$ ，并以  $\Delta m$  表示在恒体积中所包含的质量，则比值  $\frac{\Delta m}{\Delta r}$  称为连续介质在体积  $\Delta r$  中的平均密度。令  $\Delta r$  逐渐缩小趋近于零，并设  $\Delta m$  与  $\Delta r$  同阶大小，就得到

$$\rho = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta r} = \frac{dm}{dr}$$

$\rho$  称为连续介质在该点的密度。在一般情形下，连续介质中各点的密度并不相同，它随位置的改变而改变，而位置改变又与时间变化紧密相连，所以密度  $\rho$  是时间  $t$  和坐标  $x, y, z$  的函数，即：

$$\rho = f(x, y, z, t)$$

## § 0-2 连续介质理论的应用可能性的一般判处

一切物体都是由许多分子所组成，分子又是由原子所组

成；它们之间有相互作用力。这和质点组间有内力相互作用一样。但是在研究连续介质的平衡或运动时却不能把分子或原子这种微粒当作力学中的质点，列出它们的平衡方程或运动方程来研究它们的平衡或运动问题。因为微粒间的相互作用力非常复杂（必须利用量子力学才能完全了解），微粒的数目又非常的多（如空气，在标准状态下，一立方厘米中含有 $2.7 \times 10^{19}$ 个分子，如取各边长为 $10^{-4}$ 厘米的立方体，它里边仍含有 $2.7 \times 10^{15}$ 个分子），显然一一列出每个分子的微分方程既不可能也难以一一解算出来。那么研究连续介质力学的平衡或运动问题怎么办呢？

我们知道一切物体按它们的状态可以区分为固体、液体和气体。但不管在哪一种状态下，都只是由于它们组成的分子的结构不同而已。所以从分子的观点来看，分子与分子间有相当大小的空隙，物质是不连续的，但是我们所要研究的是整个物体的平衡或运动情况，并不需要研究每一个质点的分子的运动。所以我們所说的连续介质质点和数学上的点有区别，它是一个具有质量的“物理点”，也就是说，我们把固体或流体当作一块很大的物体，然后在它里面割出一块很微小的体元，当作一个“物理点”，我们称它为“体素”。每个体素内含有非常多的分子，它的线度比分子自由运动的距离（叫自由程）来说又大得多，以致与介质“连续性”概念有关的统计平均法可以应用。但这些体素本身对于运动范围来说却又极为微小，使我们可以把它们当作经典力学（宏观上）中的“物质点”，而这些点一个挨着一个，彼此间没有任何空隙（不像分子与分子间有相当大的空隙）的连续布满于体系的整个空间。也就是说我们把固体或流体当作连续介质来看待，然后



我们在里面取出一个任意的或微小的体元(体元)当作一个物质点,作为研究对象,不考虑体元内每一个分子的情况怎样,故在连续介质力学中,我们还是采用宏观的观点来处理问题。

### §0-3 过渡范围内的物理问题

从宏观上来看,所取的微小体元已经是非常微小,可以当作一个质点来看待,而从微观上来看,它里面又包含有大量的分子。固体的情况要比气体好得多,固体的密度远比气体为大,单位体积中所含的分子数远比气体为多,所以把物体看做连续介质的假设,是有一定的限度,在稀疏的介质中,例如在低压下的气体,分子间的距离相当大,而分子又继续不断地作剧烈地热运动,那么在所取体元 $\Delta V$ 内包含的分子数目不是一个不变数,因而由于分子运动所引起的质量变化对于前边所述的密度的定义有极大的影响,而连续介质的概念将失掉意义,因此研究稀疏的气体流体力学,必须考虑分子运动的影响,不能用连续介质力学方法(连续介质的概念,必须在和分子运动没有直接关系的情况下才能用)来处理,又如气体的扩散,热传导等问题的研究,要用统计方法,它就不属于流体力学范围。

### §0-4 连续介质力学在工业上的应用与展望

弹性力学是研究力在具有弹性物体上的作用,侧重点是物体在平衡状态或运动状态时内部所产生的应力和应变,以及在不同的受力情况和温度下的机械性质。因此,在工程上