納氏平面幾何學

蔡研深譯

納氏平面幾何學

蔡研深譯

開明書店印行

納氏平面幾何學

三十六年四月初版　　三十七年五月再版

每冊定價國幣二元六角

著作者　N. Altshiller-Court

翻譯者　蔡研深

發行者　上海福州路　開明書店　代表人范洗人

印刷者　開明書店

(130 P.) H　　納

內政部著作權註冊執照內審字第一〇九五八號

譯述大意

1. 本書原命 College geometry，係美國 Nathan Altshiller-Court, D. SC. 所著，其內容極適合吾國高中教員及學生參考之用.

1. 本書優點，擇要列舉於此：

(1) 吾國高中幾何教本，以限於邏輯次序，各定理不能作分類之敍述. 本書認讀者對幾何學已有相當根基，所有定理，以分類敍述爲主，可補吾國教本之不足.

(2) 幾何作圖題解法，較證定理尤難. 本書對此點特爲注重，往往用設題以導出具體方法，使讀者易於遵循.

(3) 第七、第八兩篇材料，在普通教本中或語焉不詳，或全付缺如，讀者對此必能引起無限興趣.

(4) 本書習題之較難者，輒加提示，使讀者不致雖加窮思冥搜而不得其解，以阻止其上進之心.

1. 本書譯名，以依照部頒名詞爲準.

1. 本書譯文，力求信達. 如有疏忽不周之處，請讀者隨時指教，以便修正.

目　　錄

納氏平面幾何學

第一編　作圖題

第一章　作圖題之一般解法

1. 記法 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等表一三角形,或一多角形之頂點及頂角.

$a, b, c, \cdots\cdots$ 等表一三角形,或一多角形之各邊.在一三角形中,用此等小寫字母所表者,各爲與其相當之大寫字母所表之角之對邊.

h_a 表 a 邊上之高.

m_a 表 a 邊上之中線.

t_a 表 A 角之平分線.

$2p$ 表三角形之周.

S 表三角形之面積.

R 表三角形外接圓之半徑.

r 表三角形內接圓之半徑.

習　題　一

1. 從一直線上一定點,作此直線之垂線.

2. 從直線外一點,作此直線之垂線。

3. 以定直線上一點爲頂點,定直線爲一邊,作一角,令與一已知角相等。

4. 平分一已知線段。

5. 平分一已知角。

6. 過一定點,作一直線,令與一已知直線平行。

7. 作一直線,令與一定直線有一定距離。

8. 分一已知線段,成一定等份數。

9. 內分及外分一已知線段,成定比。

10. 分 $90°$, $45°$ 及 $135°$ 之角,各成三等分。

已知下列各件,求作一三角形:

11. a, b, c. 12. a, b, C. 13. a, B, C.

14. a, h_a, B. 15. a, b, m_a. 16. a, B, t_b.

17. A, h_a, t_a.

已知直角 A 及下列各件,求作一直角三角形:

18. a, B. 19. b, C. 20. a, b. 21. b, c.

已知下列各件,求作一四邊形 $ABCD$:

22. A, B, C, AB, AD. 23. AB, BC, CD, B, C.

24. A, B, C, AD, CD.

25. 用已知半徑作一圓,令與下列圖形在一定點相切:

(a) 一定直線。 (b) 一定圓。

26. 作一定圓之切線,令與一定直線成平行。

27. 自圓外一定點,作此圓之兩切線。

28. 過兩定點作一圓,令其半徑有定長。

29. 已知圓心在一定直線上,求作一過兩定點之圓。

已知下列各件,求作一平行四邊形:

30. AB, BC, AC. 31. AB, BC, B.

32. AB, BD 及 $\angle ABD$.

33. 已知對角線之長,求作一正方形。

34. 求作兩定圓之公切線。

2. 上列問題,其作法甚爲易易.然尙有其他問題,則在求得解法以前,實有詳加考慮之必要者.其考慮之法如次:

(a) 先認其題爲已解,作一草圖,使與問題中之條件約略相合.然後詳細研究其已知部分與未知部分之關係.此法常稱爲解析法.

(b) 旣得圖形之特性,卽易於作圖,乃作一較爲正確之圖.

(c) 證明所作之圖與問題中之各種條件相合.

(d) 討論作法之可能問題,及其解答之個數等.

法詳下列各例題中:

3. **設題1.** 在一角之一邊上有一定點,求一第二點,介與定點之距離等於至他一邊之距離.

〔解析〕 如圖1,設 A, C 各爲定點及所求點.作 AB, CD 兩垂線,則由假設,$AC=CD$,故得:$\angle CDA=\angle CAD$.但 $AB \parallel CD$,故 $\angle CDA=\angle DAB$.於是 $\angle CAD=\angle DAB$.故知 AD 爲 $\angle CAB$ 之平分線.

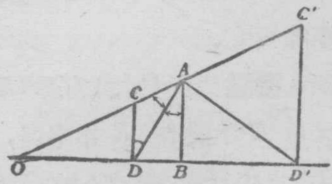

圖 1.

作圖 從定點 A 作垂線 AB,平分 $\angle OAB$,得其平分線與 OB 之交點 D.自 D 作 OB 之垂線,交 OA 於 C,則 C 卽爲所求之點.

證　由作圖，知：$\angle CAD=\angle BAD$，$AB \parallel CD$，

$\therefore$　$\angle BAD=\angle ADC$．於是 $\angle ADC=\angle DAC$．

即 $\triangle ADC$ 爲等腰，故 $CA=CD$．　　　　Q. E. D.

〔討論〕　因 A 角有二平分線，故本題有二解．

4．**設題 2．** 已知圓心在定角之一邊上，試以定長爲半徑作圓，令在定角他邊上所截取之弦有定長．

〔解析〕　如圖 2，設 C 爲所求圓之圓心，則 $CA=R$，$AB=l$，R 與 l 均爲定長；而 CD 在 AB 上之垂足 D，必爲 AB 之中點，故在直角三角形 ACD 中：知其斜邊 $AC=R$，其一股 $AD=\frac{1}{2}l$．因而 CD 易作，即 C 點與定直線 OA 之距離可定．

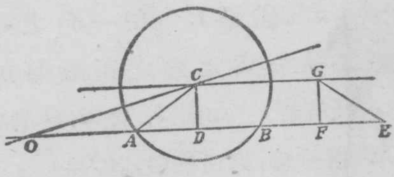

圖　2.

作圖　在 OA 上任取 $EF=\frac{1}{2}l$，在 F 點作 OA 之垂線，又以 E 作圓心，R 作半徑，作弧，交此垂線於 G．過 G 作 OA 之平行線，交 OC 於 C，則以 C 爲心，R 爲半徑之圓，即爲所求之圓．

證　由作圖，易知此圓之圓心在已知角之一邊上，其半徑等於已知長，所須證明者，僅爲在他邊上所截取之弦 AB，是否等於已知長 l 耳．

兩直角三角形 ACD 與 EFG 爲全等，因由作圖，$AC=EG$, $CD=FG$ 也．故 $AD=EF$．但由作圖，知 $EF=\frac{1}{2}l$，因而 $AD=\frac{1}{2}l$，卽 $2AD=l$，$\therefore AB=l$．

〔討論〕 定長 l 必須小於直徑 $2R$，則本題可作．凡合於此條件時，則 $\triangle EFG$ 必可作，而過 G 作 OA 之平行線，與已知角之一邊祇有一交點，故本題祇有一解．

5. 設題3. 過直徑上已知點 B，求作一弦 DBE，使 $\overset{\frown}{CE}=3\overset{\frown}{AD}$．

〔解析〕 如圖 3，設 DBE 爲所求之弦，作直徑 DOF，則 $\angle COF=\angle AOD$．$\therefore \overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{AD}$，因而 $\overset{\frown}{EF}=2\overset{\frown}{AD}$．然 $\angle FDE$ 爲圓周角，$\angle AOD$ 爲圓心角，今圓周角所乘之弧，適爲一圓心角所乘之弧之兩倍，則此兩角必等，故 $\triangle ODB$ 爲等腰．卽 $BD=BO$．但 BO 爲已知，故 D 點可定．

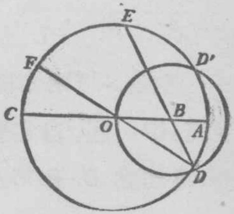

圖 3.

作圖 以 B 爲心，OB 爲半徑作圓，交定圓周於 D．聯 DB，卽得所求之弦．

證 在 $\triangle OBD$ 中：$BO=BD$, $\angle BOD=\angle BDO$,

$\therefore\ \angle AOD=\angle EDF,\qquad \therefore\ \overset{\frown}{EF}=2\overset{\frown}{AD}$

但 $\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{AD},\qquad \therefore\ \overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{FE}=\overset{\frown}{AD}+2\overset{\frown}{AD}$．

〔討論〕 若 $BO>BA$，則以 B 爲心，BO 爲半徑所作之圓，交定圓於 D, D' 兩點，故有二解．其兩弦對已知圓之

直徑成對稱.若 $BO \gtreqless BA$, 則本題無解.

6. 設題4 以一定點爲心,求作一圓,使與二已知同心圓之兩交點,與其圓心同在一直線上.

〔解析〕 如圖 4, 設 B, C 爲所求圓 (A) 在兩定圓上決定之兩點.自定點 A 至 OBC 所作垂線之垂足爲 D, 則 D 爲弦 BC 之中點, 故 $OD=\frac{1}{2}(OB+OC)$. 亦卽 D 點必在與兩定圓爲同心而介於兩定圓之間之一圓上,且 AD 爲此圓之切線,以 AD 與 OD 相垂直也.由是可知 D 爲自定點 A 至一已知圓所作切線之切點, 故 D 點可求. D 點旣定, 則自定點 A 至 OD 與兩定圓交點 B, C 之距離, 卽爲所求圓之半徑.

作圖 以兩定圓之圓心 O 爲心, 兩定圓半徑之半和爲半徑,作一圓.自定點 A 作此圓之切線,得切點 D. 作 OD 交兩定圓於 B, C. 以 A 爲心, 以 AB 或 AC 爲半徑作圓,卽得所求之圓.

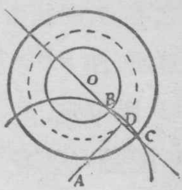

圖 4.

證 由學者自行證明.

〔討論〕 在解析中, B, C 兩點係作爲在 O 點之同側者,若在 O 點之異側,則與求 D 點時相似,可求得一 D' 點.此點在以 O 爲心, 以兩定圓半徑之半差爲半徑之圓上, 故得本題解法之個數如次:

若 $OA>\frac{1}{2}(OC+OB)$, 有二解.

若 $\frac{1}{2}(OC+OB)>OA>\frac{1}{2}(OC-OB)$, 有一解.

若 $\frac{1}{2}(OC-OB)>OA$, 無解.

若 $OA=\frac{1}{2}(OC+OB)$, 問有幾解?

若 $OA=\frac{1}{2}(OC-OB)$, 問有幾解?

7. 設題5. 以一定點爲圓心, 求作一圓, 使在兩已知平行線上所截取兩弦之和有定長.

〔解析〕 如圖 5, 設 O 爲定點, AA' 及 BB' 爲兩已知平行線, 如所求之圓 $ABB'A'$ 爲已作. 自 O 作 AA' 及 BB' 之垂線, 其交點各爲 M, N, 則 $AM+BN=\frac{1}{2}AA'+\frac{1}{2}BB'=\frac{1}{2}(AA'+BB')=\frac{1}{2}\cdot 2l=l$. 此處 $2l$ 爲二弦和之定長. 又過 MN 之中點 P, 作 AM 之平行線, 交 $A'B'$ 於 Q, 則在梯形 $A'B'NM$ 中: $FQ=\frac{1}{2}(A'M+B'N)=\frac{1}{2}l$. 若聯 OQ, 則因 Q 爲 $A'B'$ 之中點, 故 $OQ\perp A'B'$.

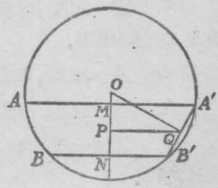

圖 5.

作圖 自定點 O 作兩已知平行直線之垂線, 其交點各爲 M 與 N. 過 MN 之中點 P, 作 AM 之平行線, 於其上取 $PQ=\frac{1}{2}l=\frac{1}{4}\cdot 2l$. 聯 OQ, 自 Q 點作 OQ 之垂線, 交兩已知平行線於 A', B'; 則 $OA'=OB'$, 各爲所求圓之半徑.

證 由學者自行證明.

〔討論〕 依作法, 知 Q 點祇限於一點, 因而垂線 $A'QB'$ 與 A' 點亦均限於一線與一點, 故本題當 A', B' 在 OMN 垂

線之同側或 B' 點與 N 點相重時,僅有一解.若 B' 點重於 N 點,則 $\overline{PQ}^2=OP\cdot PN$, 故當 l 大於或等於 OP 與 PN 兩線段之比例中項時,有一解.又若 A', B' 在 OMN 垂線之異側時,則本題雖可解而其情形略異,即此時 $2l$ 所表者,不爲二弦之和,乃爲二弦之差.

習　題　二

1. 以兩定點爲心,求作二等圓,使其一公切線通過另一定點.

2. 以兩定點爲心,求作二等圓,使其一公切線與一定圓相切.

3. 過一定點,求作一直線,使此定點與自另二定點所作此線之垂線兩垂足之距離相等.

4. 過一定點,求作一圓,使與一定直線在一定點相切.

5. 過一定點,求作一直線,使與一定角之兩邊成等角.

6. 已知一三角形之高,及爲此高所分成兩三角形之外接圓半徑,求作此三角形.

7. 已知一平行四邊形一組相對頂點,求作此形,使其餘一組相對頂點在一定圓上.

8. 過一定點,求作一直線,使爲兩相等定圓在其上所截取之弦相等.

9. 過 A, B 兩定點,求作一圓,使與平行於 AB 之一定直線相切.

10. 已知一等邊三角形之內切圓半徑,求作此形.

11. 已知一等邊三角形頂垂線,與其外接圓半徑之和,求作此形.

12. 已知一直角等腰三角形斜邊與高之和,求作此形.

13. 試以一等邊三角形一邊上一定點爲一頂點,作此三角形之內接等邊三角形.

14. 試以一正方形(或正六邊形)一邊上一定點爲一頂點,作此正方形之內接正方形(或正六邊形).

15. 過圓內一定點,求作一弦,使此弦爲此定點所分成之兩部分有定差,有定比.

16. 過定圓上兩定點,求作兩相等且平行之弦.

17. 過定圓上一定點,求作一弦,使其長爲此弦與圓心距離之兩倍。

18. 以一定點爲圓心,求作一圓,使平分一定圓(即使兩圓之公共弦爲定圓之直徑)。

19. 在一定圓直徑之延長線上,試求一點,使自此點所作之定圓切線之長,等於定圓之半徑。

20. 過一定點,求作一直線,使兩已知平行直線在其上所截取之部分有定長。

21. 過二定點,求作一圓,使此圓與一定圓之公共弦與一定直線相平行。

22. 在一直角三角形之一定邊上求一點,使自此點至斜邊之距離,等於與直角頂點之距離。

23. 過一定點,求作一圓,使與二已知平行線相切。

24. 過一定點,求作一直線,使一定角之兩邊在其上所截取之線段,爲此定點分成定比。

25. 過定圓上一定點,求作一弦,使爲一定弦所分成之兩部分有定比。

26. 過定角內一定點,求作一直線,使定角之兩邊在其上所截取之線段,爲此定點所平分。

27. 已知兩底及兩對角線,求作一梯形。

28. 已知三邊之中點,求作一平行四邊形。

29. 過兩等圓之一交點,求作兩等弦,使成(每圓中一弦)已知角。

30. 過兩圓之一交點,求作一直線,使兩圓在其上所截取之弦相等。

31. 已知一三角形之一中線,及爲此中線所分成兩三角形之外接圓半徑,求作此三角形。

32. 過兩圓之一交點,求作一直線,使兩圓在其上所截取之弦,各對圓心張等角。

33. 過兩圓之一交點,求作一直線,使兩圓在其上所截取之弦成定比。

第二章　軌　跡

8. 在多數作圖題中,作圖時須先求一合於幾個條件

之點，例如求作過三定點之圓時，須先求與三定點有等距離之一點，即圓心是也.

又在自一定點作一定圓之切線之問題中，若能求得其切點，則問題迎刃而解矣．此切點實具二條件，即既在定圓上，又對於聯定點與定圓圓心之線段張直角是也.

若在上述所求之點應適合諸條件中，略去其一，則問題之解答可多至無窮．然此時之點，非爲漫無軌範之任意點，乃爲依照某種規律而運動之點，即常在此點之軌跡上是也．若變更所略去之條件，則又可得一軌跡．此兩軌跡之交點，即爲所求之點.

玆再以求作過三定點之圓爲例，說明如次：此處所求者，爲與三已知點 A, B, C 有等距離之一點．求時，可在三已知點中任意略去其一，如 C；先求與 A, B 兩點有等距離之點，則其解答可多至無窮，因凡在 AB 線段中垂線上之點，皆合於此條件故也．次若略去 A 而求與 B, C 兩點有等距離之點，則所求之點，又成一 BC 線段之中垂線．此兩中垂線之交點，即爲所求之點.

由略去一條件所得軌跡之性狀．在初等幾何學中所論之軌跡，不外直線與圓，而對一問題解法之簡便與巧妙，實與愼選此種軌跡有莫大關係，故對於軌跡能多加研究，則易於決定所求之點.

9. 玆將較爲重要而常須應用之軌跡，分列於次：

〔軌跡1〕 在平面上與一定點之距離有定長之點之軌跡,爲一圓,此圓以定點爲心,定長爲半徑.

〔軌跡2〕 至一定圓所作切線有定長之點之軌跡,爲一與定圓同心之圓.

〔軌跡3〕 與一定直線之距離爲一定之點之軌跡,爲與定直線平行之兩直線.

〔軌跡4〕 與兩定點之距離常相等之點之軌跡,爲聯兩定點線段之中垂線.

〔軌跡5〕 與兩相交無限直線之距離常相等之點之軌跡,爲由此兩相交線所夾角之兩平分線.

〔軌跡6〕 對於一定圓常張定角之點之軌跡,爲與定圓同心之圓(張定角云者,卽自此點至定圓所作兩切線間之角,爲一定也).

〔軌跡7〕 常在一線段之一側,而對此線段常張定角之點之軌跡,爲一圓上之弧.此圓過此線段之兩端點.

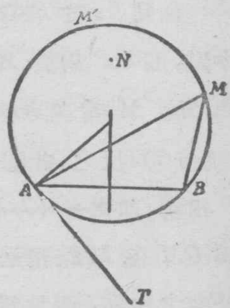

圖 6.

如圖6,設M爲軌跡上之一點,則$\angle AMB$等於定角.過M, A, B作一圓,在$\overset{\frown}{AMB}$上任取一點M',則M'對於AB所張之角,等於$\angle AMB$,故在$\overset{\frown}{AMB}$上無論何點,皆合於所求之軌跡.反之,若不在$\overset{\frown}{AMB}$上任