高职高专教材

应用微积分

YINGYONG WEIJIFEN
YINGYONG WEIJIFEN

主　编 王新华
主　审 王文智
副主编 雷田礼

湖北科学技术出版社

高职高专教材

应用微积分

主　编　王新华
主　审　王文智
副主编　雷田礼
参　编　王文智　宫永辉　齐松茹　黄炜

湖北科学技术出版社

《应用微积分》编委会

主　编：王新华

主　审：王文智

副主编：雷田礼

编　委：王文智、宫永辉、齐松茹、黄炜

前　　言

近年来，年轻的中国高等职业教育以其鲜明的特色，在适应现代社会人才多样化需求，实施高等教育大众化等方面，都做出了重大的贡献. 由于其鲜明的职业特征，因此，其课程体系及教学内容与传统大学教育相比有着许多的不同. 为了适应高职学生的特点，根据具体实际的需要，深圳职业技术学院公共课教材编纂委员会组织我们完成了这本《应用微积分》的编写.

本书充分遵循“基础理论与专业课相结合，够用为度”之原则，以实际问题和几何图形为背景，试图建立起高职数学的理论体系，主要特色如下：

1. 弱化传统数学严密的逻辑推导，以应用或几何解释为背景导出主要定理、性质和公式；

2. 简化内容结构层次，以适应高职学生的特点；

3. 突出《微积分》核心内容，简化了极限、复杂的积分计算等知识，着重于导数和积分基本计算方法的训练，以加强高职学生基本数学素质的培养；

4. 加强了概念的应用背景介绍及其在专业课中的应用.

本书由王新华任主编，雷田礼任副主编，王文智任主审. 其中第一、二、三章由王新华负责编写，第四章由黄炜负责编写，第五章由齐松茹负责编写，第六、七两章由王文智、雷田礼负责编写，第八章由宫永辉负责编写；习题及其答案由王新华负责完成，黄炜、齐松茹、宫永辉也参加了相应章节的选题工作；积分表由黄炜选录；书中插图由王新华、王文智共同完成. 全书由王新华统稿，由王文智、雷田礼主审.

深圳职业技术学院党委书记、院长俞仲文教授对本书的编写提出了重要的指导意见；公共教学部主任唐晓鸣副教授对本书的文字表述也进行过审定.

由于我们水平有限，经验不足，加上编写时间仓促，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正，我们将在再版时加以更正.

编　者

2001 年 6 月

目　　录

第一章　预备知识

人类在认识和改造客观世界的实践中，首先了解的是事物的相对静止状态，同这种认识相适应的数学是常量数学. 16 世纪，笛卡尔（Descartes）用运动的观点，把曲线看成点的运动的轨迹，不仅建立了点与实数对的对应关系，而且把“形”（包括点、线、面）和“数”两个对立的对象统一起来，建立了曲线和方程的对应关系. 这种对应关系的建立，不仅标志着函数概念的萌芽，而且也标明变数进入了数学. 正是笛卡尔的变量数学思想为牛顿（Newton）—莱布尼兹（Leibniz）创立微积分提供了必要的前提.

微积分的出现为数学的发展带来了光辉的前景，它从物理模型和几何模型中抽象出来，又广泛地应用于科学技术之中，深刻地影响着生产技术和自然科学的发展，是现代数学乃至整个自然科学的基石.

《微积分》研究的对象是函数. 在中学数学里，我们已经了解过函数的概念，所谓函数，就是这样的一种对应关系：

$$\text{数}x \longmapsto^{\text{经关系 } f \text{ 对应}} (\text{唯一})\text{数}y$$

记为 $y=f(x)$. 其中 x 的取值范围叫做函数的定义域，y 的取值范围叫做函数的值域.

在这一章里我们仅简单介绍学习《微积分》所必须掌握的初等数学知识，它包括区间、复合函数、反函数、初等函数、有界变量和邻域等基本概念以及一些常用的关系式和图形.

§1 基本概念

我们将下面五类函数，称为基本初等函数：

（1）幂 函 数：$y=x^{\alpha}$ （α 为实数）.

（2）指数函数：$y=a^{x}$ （$a>0, a\neq 1$）;

特别，$y=\mathrm{e}^{x}$.

（3）对数函数：$y=\log_{a}x$ （$a>0, a\neq 1$）;

特别，$y=\ln x$.

（4）三角函数：$y=\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\cot x$，

$\sec x$，$\csc x$.

（5）反三角函数：$y=\arcsin x$，$\arccos x$，

$\arctan x$，$\operatorname{arccot} x$.

与中学数学不一样的是，高等数学中的函数可能是分段函数. 例如：

符号函数：$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$

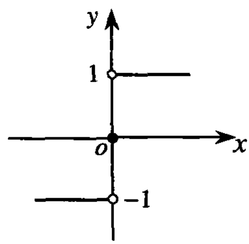


图 1-1

如图1-1所示，定义域为全体实数，值域为$\{-1,0,1\}$；函数取值如：$\operatorname{sgn} 2=1$，$\operatorname{sgn}(-2)=-1$.

此外，为了叙述的方便，高等数学中对于变量的取值范围也常将不等式改用区间来表示. 例如：

$$a<x<b \Leftrightarrow x\in(a,b),\quad a\leqslant x\leqslant b \Leftrightarrow x\in[a,b];$$

$$a<x\leqslant b \Leftrightarrow x\in(a,b],\quad a\leqslant x<b \Leftrightarrow x\in[a,b).$$

具体改变规则如下：

（1）区间中的数字 a、b 左小右大，中间用“,”分开；

（2）与不等式相对应，带等号的一边用方括号，不带等号的一边用圆括号；

（3）只有一边的不等式，应以 $+\infty$（正无穷大）或 $-\infty$（负无穷大）进行补充，且 $\pm\infty$ 处只能用圆括号．如

$$x>1 \Leftrightarrow x \in (1,+\infty),$$

$$x \leqslant -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1].$$

其中 (a,b) 叫做开区间，$[a,b]$ 叫做闭区间.

例 1 写出下列集合的区间表示：

（1）$-1<x\leqslant 1$；（2）$x\geqslant -2$；

（3）$x<0$；（4）$|x|<1$；

（5）全体实数；（6）全体非负实数.

解（1）$(-1,1]$；（2）$[-2,+\infty)$；

（3）$(-\infty,0)$；（4）$(-1,1)$；

（5）$(-\infty,+\infty)$；（6）$[0,+\infty)$.

§2 复合函数和反函数

2.1 复合函数

定义 1 设有函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，若

$$g(x) \text{ 的值域} \subseteq f(u) \text{ 的定义域}.$$

则称 $y=f[g(x)]$ 为复合函数.

例 2 已知 $f(x+1)=\ln x$，求 $f(x)$，并指出 $f(x)$ 的定义域.

解 令 $u=x+1$，则

$$f(u)=\ln(u-1),$$

视 u 为 x，得

$$f(x)=\ln(x-1).$$

其定义域为 $x>1$.

例 3 若 $f(x)=\operatorname{sgn} x$， $g(x)=2^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=f(2^x)=1$ （因 $2^x>0$ ）.

$$g[f(x)]=2^{\operatorname{sgn} x}=\begin{cases}\frac{1}{2} & x<0\\ 1 & x=0\\ 2 & x>0\end{cases}$$

*2.2 反函数

定义 2 设有函数 $y=f(x)$，若

值域中任一值 $y\xrightarrow{\text{经 } f \text{ 返回对应}}$ 定义域中唯一的 x，

则该对应关系所确定的新函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

由于习惯，我们将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$ 表示.

由定义 2 不难看出：若由 $y=f(x)$ 能解出唯一的 $x=\phi(y)$，则其反函数存在，且反函数为 $y=\phi(x)$. 一般我们有

反函数存在定理 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上严格单增(或严格单减)，则其反函数存在，且反函数与函数 $y=f(x)$ 具有相同的严格单调性.

证明从略.

§3 其他知识

3.1 初等函数

我们把由基本初等函数，经过有限次四则运算及复合所构成的，并能用一个式子表示的函数叫做初等函数.

根据上述定义，中学数学里的函数大都是初等函数，而函数

$$y=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$$

不是初等到函数，因为它不能用一个式子表示.

需要说明的是，有些分段函数表面上看起来是由两个式子所表示，它也可能是初等函数. 如

$$f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$$

表面上看起来是由两个式子所表示，由于

$$f(x)=|x|=\sqrt{x^2},$$

因此它是初等函数.

3.2 有界变量与邻域

若存在常数 M，使得

$$|y| \leqslant M,$$

则称 y 为有界变量. 如

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1 \ (x \neq 0),$$

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi \ (|x| \leqslant 1).$$

因此，$\sin\frac{1}{x}$ 和 $\arccos x$ 在其定义域内都是有界变量.

我们称 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$（$\delta>0$）为点 x_0 的 $\delta-$邻域.

为了方便起见，我们记

$$x\text{在 } x_0 \text{ 附近} \Longleftrightarrow 0<|x-x_0|<\delta,$$

其中 $\delta>0$ 充分小.

3.3 常用关系式

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

   $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$,

   $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$;

   $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$,

3. $\ln(xy)=\ln x+\ln y$ ， $\ln\dfrac{x}{y}=\ln x-\ln y$ ；

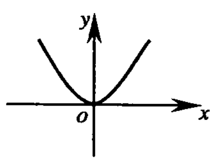
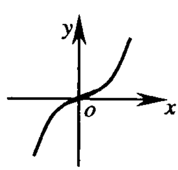
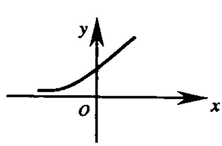
$\ln x^{\alpha}=\alpha\ln x$ ， $x^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}$.

4. $|x+y|\leqslant|x|+|y|$；

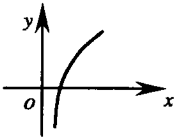
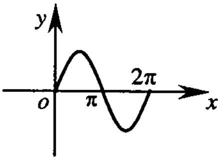
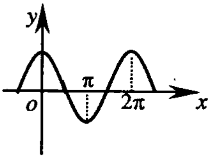
5. $|\sin x|\leqslant 1$ ， $|\cos x|\leqslant 1$.

3.4 常用函数图形

表 1-1

函　数	图　形	知识要点
$y=x^2$		偶函数，关于 y 轴对称.
$y=x^3$		奇函数，关于原点对称.
$y=\mathrm{e}^x$		单增，过 $(0,1)$ 点.

续表

$y=\ln x$		单增，过 (1,0) 点.
$y=\sin x$		2π 周期，奇函数； $\sin n\pi=0$ （ n 为整数 ）.
$y=\cos x$		2π 周期，偶函数； $\cos n\pi=(-1)^n$ （ n 为整数 ）.

习　　题　　1

1. 指出下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$；　　　（2）$y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$.

2. 若 $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 2^x & 1\le x\le 4 \end{cases}$，求 $f(0)$、$f(1)$ 和 $f(2)$.

3. 判断下列函数是否相同，并说明为什么？

（1）$\sqrt{x^2}$ 与 x；　　　（2）$\ln x^2$ 与 $2\ln x$；

（3）$\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 1.

4. 若 $f(x)=2^x$，$g(x)=x^2$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

*5. 求 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数.

第二章　极限与连续

微积分最初的探讨大多都是建立在“近似”的意义之上的，只是在有了极限的思想，特别是引入了“无穷小”概念的精确描述之后，才逐渐形成了完整的数学理论.

在这一章里，我们旨在介绍函数极限与连续的描述性定义及其性质，重点则是导出两个重要的极限.

§1　基本概念

1.1　引例

例 1　若汽车运行的路程 s 与时间 t 的关系为

$$s = s(t) = t^2\ ,$$

试求汽车在 $t = 1$ 时刻的速度.

解　中学物理知识告诉我们：对于匀速直线运动来说，

$$速度=\frac{路程}{时间}.$$

我们知道，汽车的运行通常都是变速的，下面我们来考察如何利用匀速运动去刻画变速的汽车运动.

考虑时间段 $[1,1+t]$，汽车在该时间段内运行的路程为

$$\Delta s = s(1+t) - s(1) = 2t + t^2 .$$