随机信号处理教程

SUIJI XINHAO CHULI JIAOCHENG

印 勇 编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容提要

本书从信号分析与处理的角度组织内容的编写，结合信号分析与处理的相关物理概念介绍概率论和随机过程的基本知识，在此基础上重点阐述随机信号通过线性系统和非线性系统的理论和分析方法。全书共七章，内容包括概率论基础知识，随机过程理论，随机信号通过线性系统和非线性系统的理论和分析方法，以及马尔可夫过程等。每章后安排有紧扣所述内容的习题，并给出了习题的参考答案。

本书着重强调随机信号的物理概念和分析方法的阐述，内容丰富，叙述清楚，深入浅出，便于教学和自学。

本书可作为各类信息学科，特别是电子、通信类专业高年级本科生和硕士研究生的教材使用，也可供相关专业领域的科研和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号处理教程/印勇编著.--北京:北京邮电大学出版社,2010.2

ISBN 978-7-5635-2241-5

Ⅰ.①随… Ⅱ.①印… Ⅲ.①随机信号—信号处理—高等学校—教材 Ⅳ.①TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 015914 号

书　　名:随机信号处理教程
作　　者:印　勇
责任编辑:艾莉莎
出版发行:北京邮电大学出版社
社　　址:北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)
发 行 部:电话:010-62282185　传真:010-62283578
E-mail:publish@bupt.edu.cn
经　　销:各地新华书店
印　　刷:北京源海印刷有限责任公司
开　　本:787 mm×960 mm　1/16
印　　张:14
字　　数:295 千字
印　　数:1—3 000 册
版　　次:2010 年 2 月第 1 版　2010 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2241-5　　定价:25.00 元

前　　言

随机信号分析与处理是电子信息类专业十分重要的专业基础课程，在通信、雷达、图像处理、自动控制、生物医学、地球物理等领域有着广泛的应用。

本教材是编者在积累了多年教学实践经验的基础上编写而成的。针对电子信息类本科学生的实际水平，按照电子信息学科的基本要求，在保持数学本身系统性和逻辑性的前提下，选材简明扼要，强化信号分析与处理的物理概念，突出重点要求。它系统地介绍了随机过程的基本理论以及随机信号通过线性系统和非线性系统的理论和分析方法。本书最主要的特点是尽量避免抽象烦琐的数学问题，将数学概念与信号分析与处理结合，重点阐述物理概念和分析方法，注意加强应用，淡化数学技巧，阐述力求物理概念清晰，深入浅出，富有启发，力求让读者易学易懂。本书可作为电子信息类专业大学本科生的教材使用，也可以作为相关专业硕士研究生的参考教材。

全教材共分七章，第 1 章介绍概率论的基础知识；第 2 章叙述了随机过程的基本概念，重点讨论了平稳随机过程和各态历经过程；第 3 章为随机过程的功率谱密度分析；第 4 章讨论随机信号通过线性系统的基本理论和分析方法；第 5 章介绍窄带系统和窄带随机过程；第 6 章讨论随机信号通过非线性系统的分析方法；第 7 章介绍马尔可夫过程。各章后都附有习题。建议教学学时 32～60 学时。

本教材得到重庆大学教材建设基金资助。在教材的编写过程中，作者所在单位重庆大学通信工程学院的领导和同事给予了大力支持和热情鼓励，研究生张晶同学绘制了部分函数图形，在此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，教材中难免存在不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

编著者

目　　录

第 1 章　概率论基础 …… 1

1.1　随机事件及其概率 …… 1
1.1.1　随机现象和随机试验 …… 1
1.1.2　随机事件和样本空间 …… 2
1.1.3　事件之间的关系与运算 …… 3
1.1.4　随机事件的频率与概率 …… 6
1.2　条件概率与统计独立 …… 8
1.2.1　条件概率 …… 8
1.2.2　乘法定理 …… 9
1.2.3　全概率公式 …… 9
1.2.4　贝叶斯公式 …… 11
1.2.5　事件的独立性 …… 12
1.3　随机变量及其概率分布 …… 13
1.3.1　随机变量的概念 …… 13
1.3.2　离散型随机变量及其分布 …… 14
1.3.3　连续型随机变量及其分布 …… 15
1.3.4　多维随机变量及其分布 …… 20
1.3.5　随机变量函数的分布 …… 25
1.4　随机变量的数字特征 …… 29
1.4.1　数学期望 …… 30
1.4.2　方差 …… 34
1.4.3　协方差与矩 …… 38
1.5　随机变量的特征函数 …… 40
1.5.1　特征函数的定义 …… 40
1.5.2　特征函数的性质 …… 41
1.5.3　特征函数与矩的关系 …… 42
1.6　极限定理 …… 43

1.6.1 大数定律 …… 44
1.6.2 中心极限定理 …… 45
1.7 多维正态分布 …… 46
1.7.1 二维正态随机变量及其分布 …… 46
1.7.2 n 维正态随机变量及其分布 …… 47
习题 …… 48

第 2 章 随机过程 …… 52

2.1 随机过程的概念 …… 52
2.1.1 随机过程的定义 …… 52
2.1.2 随机过程的分类 …… 54
2.2 随机过程的统计描述 …… 56
2.2.1 随机过程的概率分布 …… 56
2.2.2 随机过程的数字特征 …… 59
2.2.3 随机过程的特征函数 …… 62
2.3 平稳随机过程 …… 64
2.3.1 严平稳随机过程 …… 64
2.3.2 宽平稳随机过程 …… 65
2.4 随机过程的各态历经性 …… 67
2.4.1 严各态历经性 …… 67
2.4.2 宽各态历经性 …… 68
2.5 平稳随机过程自相关函数的性质 …… 70
2.6 随机过程的联合概率分布和互相关函数 …… 73
2.6.1 两个随机过程的联合概率分布 …… 73
2.6.2 互相关函数及其性质 …… 74
2.7 正态随机过程 …… 77
2.7.1 正态随机过程的定义 …… 77
2.7.2 平稳正态随机过程 …… 78
习题 …… 79

第 3 章 随机过程的功率谱密度 …… 82

3.1 功率谱密度函数 …… 82
3.1.1 确知信号的频谱和能量谱密度 …… 82
3.1.2 随机过程的功率谱密度 …… 83
3.2 平稳随机过程功率谱密度的性质 …… 84

3.3 维纳-辛钦定理 …… 85
3.4 平稳随机过程的自相关时间和等效功率谱带宽 …… 90
3.4.1 自相关时间 …… 90
3.4.2 等效功率谱带宽 …… 91
3.5 联合平稳随机过程的互功率谱密度 …… 94
3.5.1 互功率谱密度 …… 94
3.5.2 互功率谱密度和互相关函数的关系 …… 95
3.5.3 互功率谱密度的性质 …… 96
3.6 白噪声与色噪声 …… 97
3.6.1 理想白噪声 …… 97
3.6.2 低通型带限白噪声 …… 98
3.6.3 带通型带限白噪声 …… 99
3.6.4 色噪声 …… 100
习题 …… 101

第4章 随机信号通过线性系统 …… 103

4.1 线性系统的基本理论 …… 103
4.2 随机信号通过线性时不变系统的分析 …… 104
4.2.1 系统的输出 …… 104
4.2.2 时域分析法 …… 106
4.2.3 频域分析法 …… 110
4.3 白噪声通过低频线性系统 …… 112
4.3.1 白噪声通过理想低通滤波器 …… 112
4.3.2 白噪声通过 *RC* 低通滤波器 …… 113
4.3.3 低通网络的等效噪声带宽 …… 115
4.4 独立随机过程之和的自相关函数 …… 117
4.5 坎贝尔定理 …… 119
4.5.1 随机脉冲的自相关积分 …… 119
4.5.2 坎贝尔定理 …… 120
4.6 散弹效应噪声 …… 124
4.7 热噪声 …… 127
4.7.1 热噪声的奈奎斯特定理 …… 127
4.7.2 广义奈奎斯特定理 …… 133
习题 …… 135

第 5 章　窄带系统和窄带随机信号 …… 138

5.1　窄带系统及其特点 …… 138
5.1.1　窄带系统及其包络线特性 …… 138
5.1.2　窄带对称系统的包络线定理 …… 141
5.2　窄带随机信号的基本概念 …… 143
5.2.1　窄带随机信号的定义 …… 143
5.2.2　窄带随机信号的准正弦振荡表示 …… 144
5.3　窄带高斯随机信号分析 …… 147
5.3.1　窄带高斯随机信号包络和相位的概率分布 …… 147
5.3.2　窄带高斯随机信号包络平方的概率分布 …… 149
5.4　窄带随机信号包络的自相关特性 …… 150
5.5　正弦信号叠加窄带高斯噪声的包络和相位的分布 …… 155
习题 …… 160

第 6 章　随机信号通过非线性系统 …… 162

6.1　引言 …… 162
6.2　直接分析法 …… 163
6.3　特征函数法 …… 170
6.3.1　转移函数 …… 170
6.3.2　非线性系统输出的自相关函数 …… 174
6.4　级数展开法 …… 177
习题 …… 178

第 7 章　马尔可夫过程 …… 180

7.1　马尔可夫链 …… 180
7.1.1　马尔可夫链的定义 …… 180
7.1.2　马尔可夫链的转移概率矩阵 …… 181
7.1.3　切普曼-柯尔莫哥洛夫方程 …… 182
7.1.4　马尔可夫链中状态分类 …… 185
7.1.5　遍历性和平稳分布 …… 193
7.2　马尔可夫序列 …… 195
7.2.1　马尔可夫序列的定义 …… 195
7.2.2　马尔可夫序列的性质 …… 195
7.3　马尔可夫过程 …… 196

7.3.1　马尔可夫过程的定义 ······ 196
7.3.2　切普曼-柯尔莫哥洛夫方程 ······ 198
7.3.3　马尔可夫过程的统计特性 ······ 198
习题 ······ 199
附录 1　标准正态分布表 ······ 202
附录 2　傅里叶变换的性质 ······ 204
附录 3　常用傅里叶变换对 ······ 205
部分习题参考答案 ······ 207
参考文献 ······ 213

第 1 章

概率论基础

1.1 随机事件及其概率

1.1.1 随机现象和随机试验

在研究自然界和人类社会时，人们可观察到的各种现象可粗略地将它们划分为两类：一类是必然现象，或称为确定性现象；另一类是随机现象，或称为不确定性现象。

必然现象是指在相同条件下重复试验，所得结果总是确定的现象。只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预言的，即必然现象是在一定条件下必然会发生的现象。这类现象在一定条件下进行多次重复试验，必然产生同一结果。例如，用手向空中抛出的石子，必然会下落；在一个标准大气压下，将水加热到 100 ℃，水就会沸腾；在带电体之间，总是同性相斥异性相吸等。这些现象都是必然现象。

随机现象是指在相同条件下重复试验，所得结果不一定相同的现象，即试验结果是不确定的现象。对这种现象来说，在每次试验之前无法预知会出现什么结果。例如，掷一枚质地均匀的硬币时，它可能出现正面向上，也可能出现反面向上，但在试验前不能预言究竟出现会是哪一面；向一目标进行射击，可能命中目标，也可能不命中目标；从一批产品中，随机抽检一件产品，结果可能是合格品，也可能是次品等。这些现象都是随机现象。可以看出，这类现象具有一个共同的特点：在相同条件下进行多次重复试验，每次试验会得到不完全相同的结果，有多种可能的结果，在每次试验之前哪一个结果会发生，是无法预言的。

表面看来，随机现象似乎是没有规律的，其实它还是有规律的，不过，这种规律体现在大量重复试验时的集体现象之中。人们经过长期的反复实践，发现这类现象在相同条件下，对同一随机现象进行大量的重复试验，所得结果就会呈现出某种规律性，我们称这种规律性为统计规律性。概率论就是研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科。

为了掌握随机现象的统计规律，就必须对随机现象进行大量观测，对于随机现象的一次观察，可以看作是一次试验。例如：

例 1.1 抛硬币试验 E_1：抛一枚硬币，观察其正面 H 和反面 T 出现的情况。

例 1.2 掷骰子试验 E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数。

例 1.3 产品抽样测试试验 E_3：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

例 1.4 电话通话次数试验 E_4：某电信局记录上午 9:00—10:00 间电话通话的次数。

例 1.5 摸球试验 E_5：在一个盒子里 5 个红球、5 个黄球、5 个绿球，它们大小、重量完全相同，从中任摸取一球，观察球的颜色。

这些试验均具有以下 3 个特点：

(1) 试验有多种可能结果，并且事先明确知道该试验的所有可能的结果；

(2) 每次试验出现哪个结果，事先是不可预测的；

(3) 试验可以在相同条件下重复进行。

在概率论中，将具有以上 3 个特点的试验称为随机试验，简称试验，常用字母 E 来表示。由以上例子可以看出，随机试验是产生随机现象的过程，随机试验和随机现象是并存的，随机试验是研究随机现象统计规律性的重要手段。

1.1.2 随机事件和样本空间

在随机试验的结果中，可能发生，也可能不发生，但在大量重复试验中，却具有某种规律性的事件，叫做此随机试验的随机事件，简称事件。一般常用大写字母 A、B、C、D…等表示，有时也用{…}或“…”表示。例如，在抛硬币试验 E_1 中，“出现正面 H”和“出现反面 T”都是 E_1 的某种结果，它们都是 E_1 的随机事件；在掷骰子试验 E_2 中，“出现点数为 2”、“出现点数小于 4”、“出现点数大于等于 2 小于 5”等，都是可能发生也可能不发生的结果，它们都是 E_2 的随机事件。

随机试验的每一种可能出现的结果都是一个随机事件，它们是该试验的最简单的随机事件，通常称这种简单的、不可再分割的随机事件为基本事件。例如，在抛硬币试验 E_1 中，“出现正面 H”和“出现反面 T”分别是其基本事件；在掷骰子试验 E_2 中，“出现 1 点”、“出现 2 点”、“出现 3 点”、“出现 4 点”、“出现 5 点”、“出现 6 点”也都分别是其基本事件。

在随机试验中，除基本事件外，还有其他的随机事件。如在 E_2 中，“出现偶数点”也是一随机事件，它是由“出现 2 点”、“出现 4 点”和“出现 6 点”这 3 个基本事件所组成的，当且仅当这 3 个基本事件之一发生时，它才发生。这种事件称为复合事件。

随机事件中有两个极端情况：一个是在随机试验 E 中必然会发生的事件，称为必然事件；另一个在每次试验中都不可能发生的事件，称为不可能事件。例如 E_2 中“出现点数不大于 6”是必然事件，“出现点数大于 6”是不可能事件。必然事件和不可能事件本来没有不确定性，也就是说它们不是随机事件，但为了讨论方便起见，我们把它们当作一种特殊的随机事件。

为了便于研究随机试验，我们将随机试验的所有基本事件所组成的集合称作随机试验 E 的样本空间，记为 S。S 中的元素就是随机试验的基本事件，有时也称作样本点，常用小写字母 s 表示。如抛硬币试验 E_1 的样本空间 $S_1=\{H, T\}$，掷骰子试验 E_2 的样本空间 $S_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，产品抽样测试试验 E_3 的样本空间 $S_3=\{t \mid t\geqslant 0\}$。

例 1.6 写出一次掷两颗骰子，观察每颗的点数的样本空间。

解：$S=\{(i,j)|i,j=1,2,3,4,5,6\}$
其中 (i,j) 表示第一颗掷出 i 点，第二颗掷出 j 点，显然，S 共有 36 个样本点。

要注意的是，样本空间中的元素是由试验内容所确定的，例如在试验 E_1 中，如果将硬币的正面编号为 1，反面编号为 2，那么 E_1 的样本空间不再是 $\{H, T\}$，而是 $\{1, 2\}$。

引入了样本空间 S 之后，我们看到随机试验 E 的随机事件是样本空间 S 中的子集，而且随机事件当且仅当子集中的一个样本点发生时发生。基本事件是样本空间的单点集，复合事件是由多个样本点组成的集合。例如，上面所说的随机事件 A:“出现偶数点”是由基本事件“2”、“4”、“6”所组成的。A 是 S_2 的子集，即 A:“2,4,6”。又如随机事件 B:“点数小于 3”是子集 $\{1, 2\}$，即 B:$\{1, 2\}$。

因为 S 是由所有基本事件所组成，因而在任意一次试验中，必然要出现 S 中的某一些基本事件 s，即 $s\in S$，也即在试验中，S 必然会发生。所以，用样本空间 S 来代表一个必然事件，即必然事件包含一切样本点，它就是样本空间。相应地，空集 $\varnothing$ 可以看作是 S 的子集，在任意一次试验中，不可能有 $s\in\varnothing$，即不可能事件不含任何样本点，$\varnothing$ 永远不可能发生，所以不可能事件就是空集 $\varnothing$。

1.1.3 事件之间的关系与运算

在一个随机试验中，可以观测到很多随机事件，它们各有其特点，彼此之间又有一定的联系，而且其中有些事件比较简单，有些事件比较复杂。因此，需要研究事件之间的关系和运算。我们可用集合论的观点研究事件和事件之间的关系和运算。

1. 子事件

如果在一次试验中，事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 是事件 B 的子事件，或称事件 B 包含事件 A（或事件 A 包含于事件 B 中），记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

子事件可用图 1.1 来说明，图中正方形表示随机试验的样本空间 S，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 和事件 B，事件 B 包含事件 A。

2. 两事件相等

如果事件 B 包含事件 A，事件 A 也包含事件 B，即 $A\subset B$，同时 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，或事件 A 与事件 B 等价，记为 $A=B$。如图 1.2 所示。

3. 和事件

事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这样的一个事件称作事件 A 与事件 B 的和，或称

做事件 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$。如图 1.3 所示，图中阴影部分即表示事件 A 与事件 B 的和。

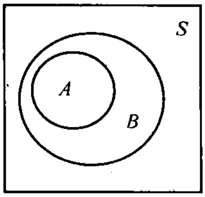

图 1.1　子事件

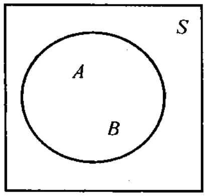

图 1.2　两事件相等

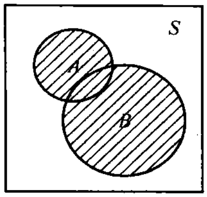

图 1.3　和事件

和事件可推广到有限个或可列个事件的情形。称 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 A_1、A_2、…、A_n 的和事件，表示 A_1、A_2、…、A_n 中至少一个发生；称 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事件 A_1、A_2、…、A_∞ 的和事件，表示 A_1、A_2、…、A_∞ 中至少一个发生。

4. 积事件

事件 A 与事件 B 同时发生，这样的事件称为事件 A 与事件 B 的积，或称为事件 A 与事件 B 的交。记为 $A\cap B$(或 AB)。如图 1.4 所示，图中阴影部分即表示事件 A 与事件 B 的积。

积事件可推广到有限个或可列个事件的情形，称 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 A_1、A_2、…、A_n 的积事件，表示 n 个事件同时发生；称 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事件 A_1、A_2、…、A_∞ 的积事件，表示可列个事件同时发生。

5. 差事件

事件 A 发生而事件 B 不发生，这样的事件称为事件 A 与 B 的差，记为 $A-B$。如图 1.5 所示，图中阴影部分即表示事件 A 与 B 的差。

6. 互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，也即 AB 是一个不可能事件，称 A 与 B 为互不相容事件，记为 $A\cap B=\varnothing$。图 1.6 直观地表示了事件 A 与事件 B 是互不相容的。显然，基本事件是互不相容的。

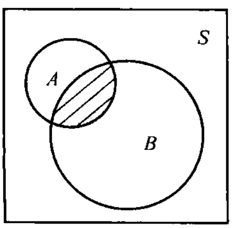

图 1.4　积事件

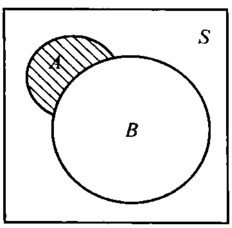

图 1.5　差事件

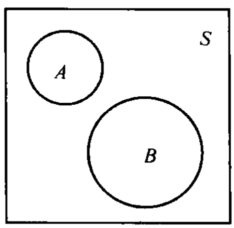

图 1.6　互不相容事件

7. 逆事件

如果事件 A 与事件 B 中必然有一个发生，且仅有一个发生，即事件 A 和 B 满足条件：

$$\begin{cases} A+B=S \\ AB=\varnothing \end{cases}$$

则称 B 为 A 的逆事件或对立事件，或称 A 与 B 互逆。记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$。图 1.7 直观地表示了事件 A 与 B 互逆。

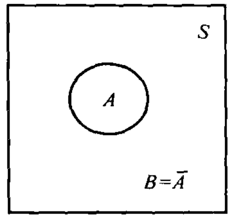

图 1.7　逆事件

显然，对于任意事件 A 和 B，都有

$$A-B=A\overline{B}$$

例 1.7　设 A、B、C 是 S 中的随机事件，则

事件"A 发生，B、C 都不发生"，可表示为 $A\overline{B}\overline{C}$；

事件"A、B 都发生，C 不发生"，可表示为 $AB\overline{C}$；

事件"A、B、C 中至少有一个发生"，可表示为 $A\cup B\cup C$；

事件"A、B、C 中不多于一个事件发生"，可表示为 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

事件"A、B、C 中至少有两个事件发生"，可表示为 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$。

8. 事件的运算规律

事件运算满足如下规则：

(1)交换律

$$A\cup B=B\cup A \tag{1.1.1}$$

$$A\cap B=B\cap A \tag{1.1.2}$$

(2)结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \tag{1.1.3}$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \tag{1.1.4}$$

(3)分配律

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \tag{1.1.5}$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \tag{1.1.6}$$

(4)对偶律(德摩根定理)

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \tag{1.1.7}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i} \tag{1.1.8}$$

(5)差化积

$$A-B=A\overline{B} \tag{1.1.9}$$

(6)差化积

如果 $A\subset B$，则　$A\cup B=B, AB=A$　(1.1.10)

1.1.4 随机事件的频率与概率

一个随机试验有许多可能结果，我们常常希望知道某些结果出现的可能性有多大。例如，知道了某电话总机在一天内出现呼唤次数的可能性的大小，就可以根据要求合理地配置一定的线路设施以及管理人员；要在某河上建筑一座防洪水坝，为了确定水坝的高度，就要知道该河流在造水坝地段每年最大洪水达到某高度的可能性的大小等。在生产实际中，了解和掌握事件发生的可能性大小是有重要意义的。为了研究事件发生的可能性，我们希望能将一个随机事件发生的可能性大小用一个数值来表达，这种刻画随机事件发生可能性大小的数值就是事件的概率。

1. 随机事件的频率

一般地，在同样条件下，大量进行重复试验来观察事件 A 发生或不发生（如抛硬币，出现正面 H 的事件为 A）。若在 n 次独立试验中，随机事件 A 出现 n_A 次，比值

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1.1.11}$$

称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率。

当 n 不大时，$f_n(A)$ 具有显著的随机性；当 n 逐渐增大，$f_n(A)$ 的随机性将逐渐减小，并以微小的摆动逐渐接近一个常数 $P(A)$。

用频率来描述事件发生的可能性的大小有缺点，因为它有随机波动性，不过当 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数 $P(A)$，即当 n 很大时，就有 $f_n(A)\approx P(A)$。这个数 $P(A)$ 是客观存在的，即对于每一随机事件 A，总有这样一个数 $P(A)$ 与之相对应。因此，用稳定值 $P(A)$ 来描述事件 A 发生的可能性的大小是比较恰当的。

2. 概率的定义

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件赋予一实数，记为 $P(A)$，称之为事件 A 的概率，显然

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} \tag{1.1.12}$$

由于概率是频率的稳定值，因而对任何随机事件 A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \tag{1.1.13}$$

而对必然事件 S 和不可能事件 $\varnothing$，显然有 $P(S)=1$，$P(\varnothing)=0$。

前面所说的“抛硬币”、“掷骰子”的试验，它们具有两个共同的特点：

(1) 试验的样本空间的样本只有有限个；

(2) 试验中每个基本事件出现的可能性相同。

一般地，设试验 E 的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，如果每一个基本事件的概率相等，即 $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$，则称这类试验为等可能概型，又称为古典概型。对于等可能概型，由于

$$S=e_1+e_2+\cdots+e_n$$

则

$$P(S)=nP(e_i)=1$$

所以

$$P(e_i)=\frac{1}{n}$$

因此,在等可能概型中,若事件 A 包含 k 个基本事件,则有

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} \tag{1.1.14}$$

3. 概率的性质

概率具有下述性质:

(1) 非负性。对于任意给定的事件 A, $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性。$P(S)=1$;

(3) 可列可加性。对于任意给定的事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$,且任意事件两两互不相容,则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1.1.15}$$

由此可得到以下结论:

(1) $P(\varnothing)=0$,即不可能事件的概率为 0;

(2) 有限可加性,若事件 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 两两互不相容,则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1.1.16}$$

(3) 对任意事件 A,有 $\quad P(\overline{A})=1-P(A)$

(4) 对于任意事件 A、B,有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.1.17}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB) \tag{1.1.18}$$

$$P(A+B)\leqslant P(A)+P(B) \tag{1.1.19}$$

例 1.8 盒内有 5 个红球,3 个白球,从中任取 2 个,问 2 个都是红球的概率是多少?

解:试验可能出现的结果共有 $C_8^2=28$ 种,其中取得 2 个为红球所包含的基本事件数为 $C_5^2=10$ 种,所以

$$P=\frac{10}{28}\approx 0.357$$

例 1.9 某班级有 n 个人($n\leqslant 365$),问至少有 2 个人的生日在同一天的概率为多大?

解:设 A 表示事件"n 个人至少有 2 个人的生日相同",则$\overline{A}$表示事件"n 个人的生日全不相同"。那么

$$P(\overline{A})=\frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{N!}{N^n(N-n)!}\quad (N=365)$$

例 1.10 一袋中有 10 个球,其中 4 个白球,6 个黑球。现按如下两种方式从袋中连续取 3 球。

(1) 一次取一球,观察其颜色后放回袋中,然后再取一球。求:① 取出的 3 球全为黑球的概率;② 取出的 3 球中 2 个为白球 1 个为黑球的概率。

(2) 一次取一球,取后不放回袋中,然后再取一球。求:① 取出的 3 球全为黑球的概率;② 取出的 3 球中 2 个为白球 1 个为黑球的概率。

解:设"取出的 3 球全为黑球"的事件为 A,"取出的 3 球中 2 个为白球 1 个为黑球"的事件为 B。

按(1)方式从袋中连续取 3 个球,其基本事件总数为 $n=10^3$,事件 A 中所包含的基本事件数为 $n_A=6^3$,事件 B 中所包含的基本事件数为 $n_B=C_3^2\times4^2\times6$。所以

$$P(A)=\frac{6^3}{10^3}=0.216$$

$$P(B)=\frac{C_3^2\times4^2\times6}{10^3}=0.288$$

按(2)方式从袋中连续取 3 个球,其基本事件总数为 $n=10\times9\times8$,事件 A 中所包含的基本事件数为 $n_A=6\times5\times4$,事件 B 中所包含的基本事件数为 $n_B=C_3^2\times4\times3\times6$。所以

$$P(A)=\frac{6\times5\times4}{10\times9\times8}=\frac{1}{6}$$

$$P(B)=\frac{C_3^2\times4\times3\times6}{10\times9\times8}=\frac{3}{10}$$

1.2 条件概率与统计独立

1.2.1 条件概率

在随机试验中,研究的主要对象是随机事件的发生情况。除研究事件自身的发生情况外,还特别需要研究事件在一定条件下发生的情况,即在一个事件发生的条件下另一事件发生的概率,这就是条件概率问题。

定义 设 A、B 为随机试验的两个事件,且 $P(B)>0$,则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\tag{1.2.1}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率。

条件概率仍具有概率的 3 个基本性质：

(1) 非负性。对于任意给定的事件 A，$0\leqslant P(A|B)\leqslant 1$；

(2) 规范性。$P(S|B)=1$；

(3) 可列可加性。对于任意给定的事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$，且任意事件两两互不相容，则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i \mid B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i \mid B) \tag{1.2.2}$$

类似地，事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率为($P(B)>0$)

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.2.3}$$

1.2.2 乘法定理

定理(乘法定理) 设任意事件 A、B，如果 $P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(A|B)\cdot P(B) \tag{1.2.4}$$

如果 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(B|A)\cdot P(A) \tag{1.2.5}$$

概率的乘法定理的意义是：两事件积的概率等于其中某一事件的概率乘另一事件在前一事件已发生的条件下的条件概率。

例 1.11 有编号为 1、2、3、4、5 的 5 张卡片，第一次任取一张，且不放回，第二次在剩下的 4 张中再取一张。试求：(1)第一次取到奇数号卡片的概率；(2)第二次取到奇数号卡片的概率；(3)两次都取到奇数号卡片的概率。

解：设 A 为事件"第一次取到奇数号卡片"，B 为事件"第二次取到奇数号卡片"。

(1) $P(A)=\dfrac{C_3^1}{C_5^1}=\dfrac{3}{5}$；

(2) $B=AB\cup\overline{A}B$ 且 $AB\cap\overline{A}B=\varnothing$，$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$；

(3) $P(AB)=P(B)P(B|A)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{10}$。

乘法定理可以推广到 n 个事件之积的情况，即设 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 为 n 个事件($n\geqslant 2$)，且 $P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

1.2.3 全概率公式

若事件 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 两两互不相容，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=S$，则称 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 构成一个完