# 學ABC

楊雋時 著







世界書局印行

# 數學ABC

(定價銀五角)

(外埠酌加郵費匯費)

著作者　楊雋時

出版者　ABC叢書社

印刷者　世界書局

發行者　世界書局

發行所　上海暨各省世界書局

中華民國二十一年十一月印刷
中華民國二十一年十一月出版

# ABC叢書發刊旨趣

西文ＡＢＣ一語的解釋，就是各種學術的階梯和綱領．西洋一種學術都有一種ＡＢＣ：例如相對論便有英國當代大哲學家羅素出來編輯一本相對論ＡＢＣ；進化論便有進化論ＡＢＣ；心理學便有心理學ＡＢＣ．我們現在發刊這部ＡＢＣ叢書有兩種目的：

第一　正如西洋ＡＢＣ書籍一樣，就是我們要把各種學術通俗起來，普遍起來，使人人都有獲得各種學術的機會，使人人都能找到各種學術的門徑．我們要把各種學術從智識階級的掌握中解放出來，散遍給全體民衆．ＡＢＣ叢書是通俗的大學敎育，是新智識的泉源．

第二　我們要使中學生大學生得到一部有系統的優良的敎科書或參考書．

周達人

我們知道近年來青年們對於一切學術都想去下一番工夫，可是沒有適宜的書籍來啟發他們的興趣，以致他們求智的勇氣都消失了。這部ABC叢書，每册都寫得非常淺顯而且有味，青年們看時，絕不會感到一點疲倦，所以不特可以啟發他們的智識慾，并且可以使他們於極經濟的時間內收到很大的效果。ABC叢書是講堂裏實用的教本，是學生必辦的參考書。

我們為要達到上述的兩重目的，特約海內當代聞名的科學家，文學家，藝術家以及力學的專門研究者來編這部叢書。

現在這部ABC叢書一本一本的出版了，我們就把發刊這部叢書的旨趣寫出來，海內明達之士幸進而教之！

徐蔚南，一九二八，六，二九。

# 目次

# 數學ABC

## 第一章　數學史

數學的範圍是很廣的，我們欲在這一本數學ABC中特設一章來敍述數學史，當然是爲篇幅所限制，不能盡量的暢所欲言。不過是將數學史的大綱，來向讀者報告一下。

1 整數論　最注意整數論者，爲十六世紀時代的希臘人，後來經過了古代大數學家費台 Viéte ，及費爾麥 Fermah 等的研究，整數論的原理，更有許多新鮮的闡發。到了十八世紀，研究整數論者，仍不乏其人，如侯特及萊谷，均爲其中最著名者。十八世紀之末。得高士等的研究，整數論始成爲數學中的一種重要的學說。高氏所著的算術論 Disquisitiones Arith-

metieax一書，對於整數論，即有很多的貢獻。此外，在 1886 年，英人馬爾台氏所著的數理論 Theory cf Numbers 一書，對整數的貢獻亦很大。

2. 無理數　無理數，在代數學中的負數中常見之。十六世紀時，始承認負數；十七世紀始發見小數。十六世紀以後的百年間，侯特氏乃用虛數證明無理數，於是無理數的根基始告穩固。後來經過了很多的數學家反復證明，詳細研究，於是無理數乃佔代數學中的重要地位了。

3. 複虛數　複虛數，自十八世紀，由意大利的數學狄斯加得 Descartes 的證明與虛數不同之後，始告成立。後經各國的數學家精心探討，在數學中始與虛數及無理數佔同等的重要。

4. 四原術　四原術的發展，是根據複虛數而來。在十八世紀時，研究四原術者已很多，自 1853 年，漢密爾敦 Hamilton 的四原演講集 Lectures on Quaternions 出版以後，始引起數學界的注意；到了 18?6

年，漢氏所著的四原概論 Elements of Quaternions 出版，於是四原術乃為各國數學家所公認為在數學上有極大的價值。

**5. 方程式論**　方程式的目的，是在求根的確數或與根相似的數值，此為最平常的辦法。但在十九世紀時代，才發明由方程式以求根的確數。至於根的相似值(一稱近似值)，經過許多的考慮，始知是由大物理學家，大數學家牛頓所發明。自此以後，方程式的理論漸多，而解多次方程式的方法，亦漸漸的完備了。

**6. 代替法**　代替法，亦根據方程式論而來。此法在十六世紀的初年，卽有人注意。卽至 1762 與1782 年間，經過了雷秀爾 Lé Soeur 等研究以後，始告成功。此法在二元一次方程式中常用之。

**7. 行列法**　首先創造行列法的理論者，為 1692 年間的雷本氏Leibeng。後來經過了頑得蒙氏 Vandermonde，高恩氏 Ganss 等相繼研究，始具端倪。高恩更提出Determinant一字，為行列法的專名詞，於是行

列法的規模始備。

8. 有理函數　此處所說的有理函數，是指牠的次數是齊整的而言。即如 $ax^2+bxy+cy^2$ 是。此在十七世紀已有人注意，研究此種函數之最力者，即為1773年間的雷格蘭其氏 Lagrange。雷氏根據此數的原理，用 $b^2-4ac$ 之數以證明此理之不謬。到了十八世紀，德國的大數學家愛因士坦氏（請參看ＡＢＣ叢書中的相對論ＡＢＣ）用最簡便的方法，證明三次和四次式的性質。愛氏在數學界貢獻的偉大可知。

9. 函數論　函數論的發展，是在牛頓發明方程式論以後。原來這函數，就是根據 Theory of Equations 而來。函數為圖解法的 Graphical Solution 的根基。故函數理論中，又有橢圓函數。橢圓函數，即以兩橢圓弧代表一條雙曲綫。換言之，亦即圖解方程式的一種。橢圓函數，是 1761 年間，雷格蘭其氏用最淺顯的數學理論證明的。及至 1873 年，凱來 Cayley 氏的專書出版以後，於是函數的理論，便開始傳佈於英倫

三島了。

10. 幾何學　幾何學大致可分三部份：一部份是畫法幾何學，一部份是投影幾何學，一部份是綜合幾何學。這三部份是有連帶的關係的。1800 年間，蒙基氏 Monge 的畫法幾何學書出版以後，始成爲幾何學中的一種專科。至於投影幾何學的創始，則較畫法幾何學稍遲，1822年，始有專書出世。書中所解釋者爲投影中心的理論，綜合幾何學，則較投影幾何學爲稍遲。到 1847 年間，經卜留開氏 Plueker 及司坦利爾氏 Steiner 反對證明以後，始成爲綜合幾何學。

以上數端，爲數學史中的犖犖大者，故特將其成立學說的經過簡史，約歷的介紹一下，使讀者對於數學史的探索，亦不無稍稍的貢獻。以後當先以綫Line與角 angle 爲本書立論的出發點，漸次及於面積 Area，容量 Volume，綫與平面 Lines and Planes，正負數 Positive and Negative Numbers，比與比例 Ratio and Proportion，因數與方程式 Factors and Equations，無

理數 Irrational Numbers，虛數 Imaginary Numbers，以及函數 Functions 等等，逐一述之。

## 第二章　直綫

**1. 直綫**　我們將我們所用的尺，放在一張紙上，或者放在我們的筆記簿子上，將尺放平穩，用我們左手按着尺，使其與紙或簿子的紙相貼合，右手持削尖的鉛筆，沿着尺的邊緣，使鉛筆頭著紙畫之，必可得一條不彎不曲的綫，這一條不彎不曲的綫，便叫作直綫。

以此類推，則電綫，地板的直縫，以及書桌的縫綫等等，都是綫，而且都是直綫。再推而至於光綫，火綫等等，也都是直綫。直綫在數學上，頗占了一席重要的地位。現在我們姑且將這直綫來約略的說一說。在代數學的直綫，我們是用方程式（一次方程式和一元一次方程式）去代表牠；在幾何學上，則用幾何學上的公理去證明牠；在三角術上，我們用三角函數

去證明牠；在解析幾何上，我們用解析幾何學的原理去推究牠；在微積分學上，我們用微積分學上的原理去研究牠。直綫的位置，在數學上旣已如此的重要，那麽我們在此地對於這在數學上佔重要地位的直綫，當首先說明一下。

在幾何學上，有幾何直綫 Geometric Lines ，我們試想一想，用什麽方法，可以分別這一條綫是直綫或不是直綫？然後才可以明白直綫的意義。我們祇要首先這樣想；直綫有幾端？直綫在兩點（卽兩端）間的地位占得極長或者是占得極短？明白了這兩點，那麽就可以知道直綫了。

直綫，是經過兩點所造成功的綫。這便是幾何學上的："Two points can be determine a straight line." 了。

直綫，是兩點間極短的綫。這便是幾何學上的："A straight line is the shortest path between two points" 了。

我們旣已明白什麼樣子是直綫了，那麼直綫有沒有重量或容量呢？這是誰都知道的，直綫是絕對沒有重量和容量的。爲什麼？有厚薄的物件，然後才可以說有重量；有底，有高，有闊，有週圍的東西，然後才可以說有容量。直綫旣沒有厚薄，又沒有高，底，闊和週圍，那裏還有重量和容量呢？直綫，實在不過是僅僅乎一條直綫，一條有長短量度的直綫而已。所以幾何學上關於直綫的解釋是：

『直綫祇有長短，沒有寬闊和厚薄』。

2.點　關於直綫，在前面已經說明過了，現在我們來討論點。點，在算術上所常見的，便是指明不是整數的小數點，循環數點，以及混循環小數和純循環小數點而已。

我們尋常所常用的名詞上，關於『點』的，則有起點，終點，出發點，集中點，交點，以及焦點等等，這都是尋常所通用的名詞中所述的『點』字，從這許許多多的名詞上，我們可以知『點』，是占有『地

位』的。譬如我們行路，則有起點，亦有終點。起點，便是開始行走的地方；終點，便是停止行走的地方。賽跑或競走時，亦有起點和終點。於是我們可以斷定點是有位置的，但是牠沒有長度，寬度，以及厚薄耳。

但是我們將一點，使牠繼續不斷的在紙面上進行，就成功綫了。如果牠前進的方向是直的，便是直綫；是曲的，那便是曲綫了。

我們凡是對於點和綫這兩種東西，稍微有一點兒數學觀念的，便知道集點以成綫，集綫以成平面形，集平面形以成立體。從此千變萬化，層出而不窮，於是數學便一層一層的上昇，上至天文，下至地理，無往而不應用綫與點的原理，更無往而不用數學了。偉矣哉，數學也！大而天體的研究，小而人類生活的範圍，無處能不用數學。數學眞是最實用的科學了。

**3. 長度的量法**　有了綫與點，我們便要討論長度的量法了。長度的量法，又有什麼用途呢？說起來話

也是很長很長，不是三言兩語可以說得盡的。現在我們可以用最實用的事情來做我們行文的材料。假如我們要購買一塊地皮，但是如果不知道這一塊地皮的面積確數，那麼買進來的時候，不是要吃虧嗎？因此不得不設法先知道地皮面積的確數，應該爲幾畝幾分幾厘。要知地皮的確數，非將這地皮詳細的，準確的量一量，是不會知道的。

怎樣量法呢？我國從前的舊方法，是用弓來量，一弓爲五尺，兩弓便是一丈。譬如一塊地皮，長幾弓，闊幾弓，將長與闊相乘，便可算得這一塊地皮爲多少平方弓；再將弓化爲尺，便可以知道許多平方尺。再以一畝爲若干方平尺以除之，則得着最後的答數爲幾畝幾分幾厘了。

這種長闊的量法，是很切實用的。

現在的量法和從前舊方法不同的地方，就是在用的器具的不同，至於計算的方法是一樣的。從前用弓，現在則用尺（布帶或鋼尺）；從前的量法不精確，

現在的量法較爲精確。

這種量法，都是直綫的量法，這是直綫長度的量法。有了直綫長度的量法，就可計算平面的面積；有了直綫長度的量法，就可以計算立體的體積。所以這直綫長度的量法，是面積與體積量法的基本，我們不可以藐視牠的。如果我們藐視牠，那面積和體積的量法，恐怕也不會知道的呢。

在直綫長度的量法中，有兩種東西要附帶說明的：就是綫斷和長度的單位。在一條直綫中，可以分爲若干段，這每段，就稱之爲綫段。例如有一條很長的直隄，我們要量牠的長度，勢必一次不能够量得結果的，必須先將此長隄，分爲若干段，每段插紅旗爲標記，然後一段一段的量去，這每段，就是綫段了。

長度的單位，就是世界各國所通行的米突 Meter，一米突現在通稱之爲一公尺。（一米突合我國營造尺3.125）譬如一塊草地，長爲若干米突，寬爲若干米突，則其面積，以長與寬相乘，則得若干平方米突

（公尺）。

綫段，則又有兩種：卽等綫段與不等綫段。每段相等的綫段，稱爲等綫段；否則，稱爲不等綫段。

4. 圖示法　圖示法，就是通常所稱的圖解法。圖示法的目的，就是要將數字的統計，納入直綫或曲綫的圖表中，以便於檢查或計算。圖示法的功用很大，最足以表示圖示的威權的，便是統計表。統計表是根據統計學而來，故圖示法，在數學上的地位，亦極重要。

我們通常用圖示法以表示每週學生考試的成績，每年學校的開支，每日個人的用費，以及每月進出口的物貨和現金等等，都是要借重這圖示法 Graphical Representation 的。

圖示法中所用的紙，是有小方格的紙 Squared Paper。小方格代表幾何的數目，可以聽我們自己去斷定。現在我們特用一個實例來證明圖示法的用途。

在未曾作圖示法以先，須有統計上的數目爲根據