

軍訓部陸軍軍官預備學校籌備總處定印

平面解析幾何

軍訓部審定陸軍軍官預備學校專用課本

國民政府軍事委員會軍訓部訓令

訓預字第一號

令

查陸軍軍官預備學校學科課本業經分別審定關於平面解析幾何一科課本爲期適合預校需要特將原書內容略爲增減除補充教材另案頒發外合將該課本審定頒發仰卽遵照該科教授說明參酌配合補充教材實施教授

此令

中華民國三十三年十月 日

部長 白崇禧

何先生序

近年出版界，對於理科書籍，無論中等高等，皆較前數年為多，且有進步，實為可喜現象。數學亦然。至著者，則以余君介石為最努力之一人。彼之學問經驗，既足以副之，故其所譯著，皆透澈豐富。讀其所譯 Bocher 之高等代數通論，可為明證。余君在重慶大學教課之餘，又成三角、解析幾何各書，經余詳加參訂，其內容具如編輯要旨，茲不贅述。余之所以樂為介紹者，知其必大有裨益於讀者也。今再略貢其愚於讀者，以為自修之助。即在三角，宜注意於用助角變和為乘積法，對數不適用於加法故。又宜注意三角方程式之通解，三角函數皆有週期性故。在解析幾何，則宜與幾何平行探討，幾何定理，可以解析幾何證之；解析幾何問題，須先用幾何眼光觀察之，後再用解析方法，二者可互相發明。故於是錐線（包含圓、橢圓、雙曲線、拋物線，及一組之二直線）性質，務須從純粹幾何方面研究之，此吾國高中學生之所需也。是為序。

編輯要旨

(一)本書完全遵照教育部最近頒布的修正高中課程標準編輯，適於高中三年級之用。

(二)按教育部最新標準，高三分甲乙兩組，本書均能適用。但乙組採用本書時，可略去第十二章，此外理論方面，也可斟酌情形省去一部份（參看第七條）。又解析幾何教材大綱中的立體部份，係甲組所專用，故另編立體解析幾何一冊，專供甲組之用。

(三)美國人 Smith, Gale, Neelley 三氏合編的新解析幾何學一書，在我國流行極廣，江蘇省教育廳所頒布的進度表，大體也依照其次序，本書即採用此書為藍本。

(四)Smith 等原書優點如下：

(1)教材取捨斟酌至當，支配亦極勻稱；對理論實用二方面，無偏重與忽略的弊病。

(2)以函數概念為中心，對形數相互為用處指示詳盡；適合最新算學教學趨勢。

(3)教材排列,條理明晰;推理多用歸納法,引人入勝;對論理次第,心理程序,皆能顧及。

(4)重用分析方法,能促進學生自動作業,增加其理解能力。

(5)說理詳明顯豁,易學易教。

(6)習題極為豐富。

本書對這些優點,皆儘量保存。

(五)Smith等原書,亦不無缺點。

(1)對於解析幾何學的定義,坐標法的目標,變易在幾何學上作用等基本觀念,未能揭示,致使初學即讀畢這書,對解析幾何學,也不易得一概括的見解。

(2)射影定理為初等解析幾何學的基本法則,原書竟未提及,不足為初學建立良好基礎,且亦與部頒標準和教廳進度表不合。

(3)解析幾何與綜合幾何互有出入的地方,部頒標準所附教法要點中,曾特為指明,原書對這點,實未能注意。

(4)理論方面每多疏忽,如推求橢圓,雙曲線的方程式時,並未證實經二次平方的結果,仍與原式,同解。

(5)極坐標的對稱條件,圓錐曲線二種定義的一

致性等教材皆有相當重要，不列入正文，殊不便於初學。

(6)直線的參數式，和所用參數的意義，頗多應用，又參數式應如何設立，以求達某種目標，也為初學所應知，因這類問題的研究最能培養學生的思考力，原書皆付闕如，未免美中不足。

(7)初等解析幾何學，雖以圓錐曲線為主，但對各著名的他種曲線，亦應稍作較有系統的敘述，原書所論，微嫌散亂。

(8)雙曲線函數，反三角函數，皆為極重要的超性函數，僅列習題中，毫無說明，似欠允當。

以上各點，編輯時均已一一訂正，故本書對於我國情形，自信較原書尤為適用。

(六)本書對極重要關鍵，每特為提出；對於初學易忽略處，則多列註與注意，以作說明。又書中前後關聯處，亦時時揭示，如此頗可增進初學的理解力，而為進修較高深算學的幫助。這些地方似覺也較Smith氏等原書為勝。

(七)我國地方廣大，各校程度高下不甚一致，本書編制極富彈性，凡可省略者，均特別註明，以便教學時伸

縮。

(八)本書蒙重慶大學理學院長何師奎垣惠予校訂，多所指正又蒙胡術五、陳伯琴、李修陸三先生，就試用經驗，以意見多條相示，謹此附誌，以表謝忱。

(九)本書除以 Smith 氏等所著為藍本外，并曾參考下列各書：

(1) Osgood and Graustein: Plane and Solid Analytical Geometry.

(2) Smith-Gale: Elements of Analytical Geometry.

(3) Brink: Analytical Geometry.

(4) V. C. Poor: Analytical Geometry.

(4) Benny: Plane Geometry.

(6) Loney: Coördinate Geometry, Part I.

(7) Wentworth-Smith-Siceloff: Analytical Geometry.

(8) Breslich: Correlated Mathematics, Book IV.

(9) Love: Analytical Geometry.

(10) Papier: Precis de Géométrie Analytique.

(11) Hess: Analytisch Geometry.

(12) 余介石: 解析幾何學講義 (中央大學油印本)

(13) 匡文濤: 解析幾何學講義

(14) 倪德基:數學辭典.

合併附誌,以明所本.

(一〇)本書有附表數種,以便初學檢查,而減計算的麻煩.

(一一)本書所用算學名詞,皆依據國立編譯館所整理的算學名詞稿本;人名地名譯音,則照商務印書館出版的標準漢譯外國人名地名表一書.

(一二)本書雖係據流行的優良教本,參照我國部頒標準及實際情形,并蒙師友的指示,改訂而成;但疵謬終恐不免,尙望海內教師,多加指正,俾得隨時修改,不勝感幸.

(一三)本書習題,另編答案印行,惟只能售與教師,非經學校蓋章概不發售.

民國二十五年五月編者識於四川省立重慶大學.

目次

第一章 緒論

1. 解析幾何學的定義	1
2. 解析幾何學目的與應用	1
3. 向量	2
4. 軸	3
5. 沙爾定理	4
6. 由坐標定兩點距離法	5
習題一	6
7. 角	7
8. 射影	7
9. 射影第一定理	8
10. 射影第二定理	9
習題二	10

第二章

坐標幾何量的解析表示

11. 坐標	11
12. 笛氏坐標	12
13. 象限	14
習題三	14
14. 向量在坐標軸上的射影	16
15. 二點間的距離	16
16. 定比分點	18
17. 定比分點定理	19
習題四	21

18. 斜角與斜率	22
19. 斜率定理	23
20. 平行與垂直條件	23
21. 二直線交角的公式	24
習題五	26
22. 面積正負的規定	27
23. 三角形面積公式	28
24. 多角形面積求法	30
25. 解析證題法	30
習題六	31

第三章 軌跡和方程式

26. 方程式與軌跡	33
27. 解析幾何學中基本問題	33
28. 第一基本問題	34
29. 第二基本問題	35
習題七	36
30. 方程式的討論	38
31. 截距	39
32. 對稱	39
33. 代數曲線的對稱性	41
34. 曲線的範圍	41
35. 曲線在有限平面內的情形	43
習題八	44
36. 曲線在無窮遠處的情形,	

漸近線	46
37. 水平與垂直漸近線求法	46
38. 聯立方程式圖解交點	49
習題九	50

第四章 直線

39. 直線方程式的次數, 斜截式	53
40. 一次方程式的軌跡, 普通式	54
41. 直線的作圖, 截距式	55
42. 高次方程式表數條直線的情形	56
習題十	57
43. 點斜式	59
44. 兩點式	60
45. 法線式	61
習題十一	62
46. 化普通式爲法線式法	64
47. 自直線至一點的距離	65
48. 分角線	68
習題十二	69
49. 三直線共點條件	70
50. 直線族	72
51. 過兩直線交點的直線族	73
52. 二條件定一直線	75
習題十三	75

第五章 圓

53. 圓的普通方程式	79
54. 二次方程式與圓	80

55. 三條件定一圓	81
習題十四	85
56. 圓的切線長	87
57. 等幂軸	83
58. 等幂心	90
習題十五	91
59. 圓族	92
60. 共軸圓族	93
習題十六	94

第六章 圓錐曲線

61. 本章目的	96
62. 拋物線定義和最簡式	96
63. 拋物線性質	98
64. 拋物線作圖法	99
習題十七	101
65. 橢圓定義和最簡式	102
66. 橢圓的特性	104
67. 方程式 $Ax^2 + By^2 = C$ (A 與 B 同號) 與橢圓	103
68. 橢圓的作圖	107
習題十八	109
69. 雙曲線的定義和最簡式	110
70. 雙曲線特性	114
71. 雙曲線的作圖	114
72. 雙曲線的斜漸近線	115
73. 配雙曲線, 等軸雙曲線	118
習題十九	119
74. 圓錐曲線族	121
75. 共焦點的圓錐曲線族	121

76. 圓錐曲線的意義	122
77. 圓錐曲線的又一定義...124	
習題二十	125
第七章 移軸術	
78. 移軸術	127
79. 平移	127
80. 平移的應用	129
習題二十一	132
81. 不含 xy 項的二次方程式	133
82. 圓錐曲線簡式的推廣...134	
83. 拋物線與拋落體軌道...136	
84. 圓錐曲線二種定義的一 敵性	137
習題二十二	138
85. 旋轉	140
86. 旋轉角的決定	141
87. 移軸通式	142
88. 反移軸術	143
習題二十三	145
89. 方程式的次數的不變性	146
90. 普通二次方程式的討論	146
91. 圓錐曲線的判別式	148
92. 二次式的作圖	149
習題二十四	153
93. 五條件定一圓錐曲線...154	
94. 不變式	155
95. 變易積, 變易導	156

習題二十五	157
-------------	-----

第八章 切線與法線

96. 切線的定義	159
97. 切線的方程式	160
98. 圓錐曲線上已知切點的 切線	163
習題二十六	165
99. 法線	166
100. 求已知斜率的切線	166
101. 次切距與次法距	167
習題二十七	169
102. 自曲線外一點所作的切 線	170
103. 求切線別法	171
習題二十八	172
104. 圓錐曲線的光學特性...173	
105. 共焦點族中曲線的直交 性	176
習題二十九	177

第九章 極坐標

106. 極坐標	179
107. 極坐標中的對稱性	181
108. 極方程式的作圖	183
習題三十	184
109. 極方程式的討論, 雙紐線	185
110. 贈線	187
111. 玫瑰線	189
習題三十一	189

112. 直坐標與極坐標的互換式	190
113. 直線和圓的極方程式	193
114. 圓錐曲線的極方程式	193
習題三十二	195
115. 極坐標曲線的交點	196
116. 以極坐標求軌跡, 蚌線	197
習題三十三	198
117. 蔓葉線與環索線	199
118. 螺線	201
習題三十四	201

第十章 參數方程式

119. 參數方程式	204
120. 參數方程式的作圖	204
121. 化參數式爲直坐標式法	206
習題三十五	206
122. 化直坐標式爲參數式法	207
123. 笛氏葉形線	208
124. 直線的參數式	209
125. 圓錐曲線的參數式	210
習題三十六	211
126. 用參數式求軌跡	212
127. 旋輪線	213
128. 箕舌線	217
習題三十七	218
129. 以線族交點定軌跡法	221
130. 垂趾曲線	222
習題三十八	223

131. 圓錐曲線的直徑	225
132. 圓錐曲線的心	227
133. 有心圓錐曲線的配直徑	228
習題三十九	229

第十一章 超性曲線

134. 超性方程式	232
135. 指數與對數, 反函數	232
136. 指數曲線與對數曲線	234
137. 兩種重要含指數函數的曲線	237
習題四十	238
138. 正弦曲線	239
139. 週期函數	241
140. 正弦曲線的推廣	242
習題四十一	244
141. 各種三角曲線	244
142. 反三角函數	247
習題四十二	248
143. 函數相加法	249
144. 對圓錐曲線的應用	250
145. $A=C=0$ 的情形	253
習題四十三	255
146. 同週期正弦曲線的適合線	255
147. 函數相乘法	256
148. 超性方程式解法	258
習題四十四	259

第十二章 變形法

149. 變形法	261
----------------	-----

150. 反形術	261	166. 對極術的回應性	281
151. 反點	262	167. 包線,線坐標	281
152. 反形變易式	262	168. 近世幾何學的三大原則	
153. 直線與圓的反形	264	282
習題四十五	265	習題四十八	283
154. 圓錐曲線的反形	266		
155. 拋物線的反形	266		
156. 等軸雙曲線的反形	267		
157. 以焦點為反形心的情形			
.....	268		
158. 曲線的交角	269		
159. 曲線交角對反形變易的			
不變性	271		
習題四十六	272		
160. 關於圓的極和對極線	273		
161. 極與對極線的基本特性			
.....	274		
162. 對極線與直徑	276		
163. 極與對極線的作圖	276		
習題四十七	278		
164. 點變易,互變易	279		
165. 對極術,對極曲線	279		

附錄一

代數,幾何,三角公式摘要	286
--------------	-------	-----

附錄二

平面解析幾何學摘要	291
-----------	-------	-----

附 表

(一)希臘字母表	299
(二)三角函數本值表	299
(三)指數函數表	300
(四)自然對數表	300

索 引

一) 中文索引	305
(二) 西文索引	307

第一章

緒論

1. 解析幾何學的定義 就圖形以推論其性質，爲綜合幾何學*。如果用適宜的方法，以數和算式表幾何量，依式演算，以研究幾何圖形，則成解析幾何學*。用綜合法時，推論的步驟，處處皆以圖形爲據。但在解析幾何學，則開始時應化幾何的題意爲解析式，然後按式變化，達於某結果時，才再加以幾何的解釋。當算式變化時，我們不復考其幾何意義。

2. 解析幾何學目的與應用 解析幾何學目的，在研究圖形的性質，與綜合幾何完全相同。但因所用方法相異的緣由，故所及範圍，較綜合幾何爲廣，其應用亦較宏。解析幾何學，不特是高等算學的階梯，即在實用問題方面，藉其爲助的地方，也復不少。例如統計學研究中，常用圖線的方法，即本於解析幾何。又如物理，

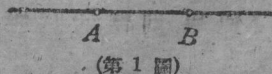
* 綜合幾何學 Synthetic geometry. 解析幾何學 Analytical geometry.

工程、彈道諸科，往往須知某種曲線的性質，也常藉解析幾何的理去求。

3. 向量 解析幾何學的入手方法，在用數和算式表幾何量，故首先必使數與量二者，能完全相應。但在普通幾何學中所習的幾何量，只有正值，而代數學中的數，則有正負的區別。今欲使二者相應，則幾何量有待於擴充甚明。是以解析幾何學中所論線段，須分別正負。

設 A, B 爲直線上二點（如第1圖），在綜合幾何學中，常論及二點間距離，而不計其

方向。如欲考自一點至他點的



距離，則含有方向的意義。今於記一線段時，以首一文字記始點，次一文字記終點；如 AB 記自 A 至 B 的距離， BA 記自 B 至 A 的距離，則這二線段長短同而方向異，猶之代數中同值異號的二數。此種區別正負的線段，叫向量*。又區別正負的直線，叫做有向線*。

如選取適宜的單位，則可以數表量，這數叫做量的值*。向量既爲有正負區別的量，故其值亦有正負的分別而爲代數值*。若只論絕對值而不計其號，就叫做

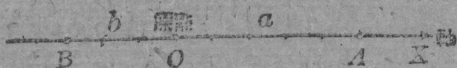
*向量 Vector. 有向線 Directed line. 值 Value. 代數值 Algebraic value.

數值*, 或叫絕對值*

[註] 有時為區別向量與普通不計方向的線段起見, 可記向量為 \overline{AB} 或 \vec{AB} , 而不記方向的絕對量, 則記為 $|AB|$, 這時 $|AB| = |BA|$.

[注意] 就廣義說來, 凡有正負分別的量, 都叫向量. 此處所說的有方向的線段, 不過是最習見的一種. 在解析幾何學中, 不特線段有正負的分別, 即角和面積, 也莫不如此. 正負角的規定, 見本局出版的新課程標準適用高級中學三角法第三章, §§30, 31, 本書下文也要論及. 面積正負的規定, 見本書第二章, §22.

4. 軸 在一橫直線上, 取一定點 O , 為原點*, 依通例, 常取自 O 向右



為正向, 以箭頭表

(第 2 圖)

明如第 2 圖, 而向左為負向. 今更取定適宜的單位則這線上任意一點 A 的位置, 皆可就向量 OA 決定. 這有向的直線叫做軸*, 向量 OA 的代數值, 就叫軸上點 A 的坐標*.

如第 2 圖, OX 為軸, $a = OA$ 為點 A 的坐標, $b = OB$ 為點 B 的坐標.

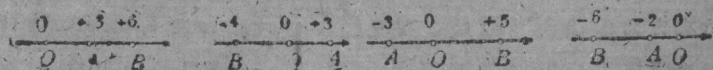
[注意] 坐標既為代數值, 故可正可負. 例如取定適當單位後, $a = 5$, $b = -3$. 初學每因文字數前無負號, 誤以為必委正數, 不知

*數值 Numerical value. 絕對值 Absolute value. 原點 Origin. 軸 Axis. 坐標 Coordinate.

文字數前的號，與其所表代數值的號，不一定要相同。譬如上例中 b 可表 -3 ，而 $-b$ 反表 $+3$ 。

5 沙爾*定理 由§3所述，顯有

$$AB = -BA, \text{ 即 } AB + BA = 0.$$



(第3圖)

今於一直線上，任取 O, A, B 三點（如第3圖中各圖），則不論其間距離與次序如何，皆有

$$OB = OA + AB.$$

但 $-OB = BO$ ，故得 $OA + AB + BO = 0$ 的關係，是為沙爾定理。

若在普通幾何學，就不計正負的絕對量去討論，則由第3圖內各款，所得關係，不能一致，如：

- I. $|OA| + |AB| = |OB|$ ，或 $|OA| + |AB| - |BO| = 0$ 。
- II. $|OB| + |OA| = |AB|$ ，或 $|OA| - |AB| + |BO| = 0$ 。

沙爾定理可依下理去解釋：

視向量 AB 為自 A 向 B 走去所經的路程，對於向量 OA, OB 也如此解釋，則 $OA + AB$ 為先自 O 走到 A ，再自 A

* 沙爾 Chales.