高职院校规划教材

经济数学

JINGJI SHUXUE

赵　辉 ⊙ 主　编
鲍倚敏
辛　颖 ⊙ 副主编
孙祖康 ⊙ 主　审

合肥工业大学出版社

经济数学

赵 辉 主 编

鲍倚敏
辛 颖 副主编

孙祖康 主 审

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/赵辉主编．—合肥：合肥工业大学出版社，2009.8

ISBN 978-7-5650-0058-4

Ⅰ．经…　Ⅱ．赵…　Ⅲ．经济数学　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 150452 号

经 济 数 学

主编　赵　辉　　　　责任编辑　郑　洁

出　版	合肥工业大学出版社	版　次	2009 年 8 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号	印　次	2009 年 8 月第 1 次印刷
邮　编	230009	开　本	787 毫米×1092 毫米　1/16
电　话	总编室：0551—2903038	印　张	13.5
	发行部：0551—2903198	字　数	328 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	印　刷	合肥学苑印务有限公司
E-mail	press@hfutpress.com.cn	发　行	全国新华书店

ISBN 978-7-5650-0058-4　　　　定价：28.00 元

前 言

随着我国经济建设的发展，社会对高素质技能型应用人才的需求日趋紧迫，这也促进了我国高等职业技术教育的迅猛发展. 为了适应社会对技能型应用人才的需求和高等职业教育的发展，根据教育部颁布的高等职业教育专业设置目录、高等数学课程教学基本要求和技能型紧缺人才培养方案，并依据经济类、管理类等专业对高等数学的要求，我们组织编写了本教材.

本书在编写过程中，按照循序渐进的原则，深入浅出，由易到难. 从典型的自然科学与经济分析中的问题出发，从实际到抽象，再从抽象到具体，将经济分析和微积分的相关内容有机结合起来. 遵循“突出实际应用，强化能力培养，坚持必需够用”的原则. 力求做到：降低理论、突出重点、删繁就简、注重应用.

本书在内容的安排上，适当淡化了运算技巧，降低了一元函数的极限与连续的理论要求，对公式的推导和定理的证明一般不追求其严密性，只进行必要的解释. 突出数学思想的介绍及数学方法的应用，以保证高职学生应有的数学素养，从而为后续课程的学习打下良好的基础. 为方便学生的学习，书中例题的配置尽量由浅入深，课后的习题附有参考答案.

全书共分 7 章，各章编写分工如下：第 1 章极限与连续，由葛广俊编写；第 2 章导数与微分，由孙祖康编写；第 3 章导数的应用，由赵辉编写；第 4 章不定积分，由鲍倚敏编写；第 5 章定积分，由陈燕峰编写；第 6 章线性代数，由辛颖编写；第 7 章运筹学简介，由孟涛编写.

本书由赵辉担任主编，鲍倚敏、辛颖担任副主编，孙祖康主审.

本书在编写过程中，得到了安徽电子信息职业技术学院领导和许多老师的大力支持和帮助，尤其是基础部的王传庆老师和经管系的闻学老师为本书的成稿做了大量的工作，在此一并表示感谢.

由于水平有限，书中疏漏与错误在所难免，敬请读者斧正.

编者

2009 年 5 月

目　录

第 1 章　极限与连续

极限是数学中一个重要的基本概念，它是学习微积分学的理论基础. 本章将在复习和深入学习函数有关知识的基础上，讨论函数的极限与函数的连续性等问题.

1.1　函数的概念与特性

1.1.1　函数

我们在中学里已经学过有关函数的基本知识，但为了以后更好地学习高等数学，我们把有关的内容系统地复习一下.

一、函数

定义 1.1　设有 x 和 y 两个变量，D 是一个给定的数集，若对于 D 中每一个数 x，变量 y 按照一定的对应法则 f 总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作：$y=f(x)$. 数集 D 称为这个函数的定义域，数集 $M=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 被称为函数的值域. x 被称为自变量，y 被称为因变量.

如果对于自变量 x 的某个确定的值 x_0，因变量 y 能够得到一个确定的值，那么就称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义，其因变量的值或函数 $y=f(x)$ 的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y\mid_{x=x_0}$.

$G=\{(x,y) \mid y=f(x), x \in D\}$ 被称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

对于在同一问题中的不同函数关系，为了区别清楚起见，要用不同的函数记号来表示这些函数，如 $F(x)$，$G(x)$，$g(x)$…… 等.

有时会遇到给定 x 值，对应的 y 值有多个的情形，为了叙述方便称之为多值函数. 若 y 值唯一，称之为单值函数. 对于多值的情形，我们可以限制 y 的值域使之成为单值再进行研究.

例 1　设 $f(x)=2x^2-3$，求 $f(0)$；$f(2)$；$f(-1)$；$f(x_0)$；$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

解　$f(0)=2\times 0^2-3=-3$；　$f(2)=5$；　$f(-1)=-1$；

$f(x_0)=2x_0^2-3$；　$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{2}{a^2}-3$.

例 2　设 $f(x+3)=\dfrac{x+1}{x+2}$，求 $f(x)$.

解　令 $x+3=t$，则 $x=t-3$，$f(t)=\dfrac{t-3+1}{t-3+2}=\dfrac{t-2}{t-1}$，

所以 $$f(x)=\frac{x-2}{x-1}.$$

应当指出，在实际应用上有些函数在定义域的不同的范围内用不同的解析式表示，例如：函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

这样的函数被称为分段函数.对分段函数求函数值时，应把自变量的值代入相应范围的表达式中去计算.

例 3 分段函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\leqslant x<1\\ x, & 1\leqslant x<2\\ x^2-6x+\frac{19}{2}, & 2\leqslant x<4\end{cases}$，求 $f(\frac{1}{2})$；$f(1)$；$f(3)$.

解 因为 $\frac{1}{2}\in[0,1)$，故应把 $\frac{1}{2}$ 代入 $\frac{1}{2}x$ 中计算，

得 $$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

同理可得 $$f(1)=1;f(3)=3^2-6\times 3+\frac{19}{2}=\frac{1}{2}.$$

例 4 A、B 两地间的汽车运输，旅客携带行李按下列标准支付运费：不超过 10 千克的不收行李费；超过 10 千克而不超过 25 千克的，超过 10 千克的每千克收运费 0.50 元；超过 25 千克而不超过 100 千克的，越过 25 千克的每千克收运费 0.80 元.试列出运输行李的运费与行李的重量之间的函数关系式，写出定义域，并求出所带行李分别为 16 千克和 65 千克的甲乙两旅客各应支付多少运费？

解 设行李重量为 x(千克)，其运费为 y(元).根据题意有

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 10\\ 0.5x-5, & 10<x\leqslant 25\\ 0.8x-12.5, & 25<x\leqslant 100\end{cases}.$$

其定义域为 $[0,100]$，又 $f(16)=0.5\times 16-5=3$，$f(65)=0.8\times 65-12.5=39.5$.即甲和乙两旅客应分别支付运费 3.00 元和 39.50 元.

二、函数的两个要素

由函数的定义可以知道，当函数的定义域和函数的对应关系确定以后，这个函数就完全确定了.因此，常把函数的定义域和函数的对应关系叫做确定函数的两个要素.两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才被认为是完全相同的.

例 5 函数 $f(x)=x$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是否相同，为什么？

解　$f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域都是实数集 R.

因为　$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$,

显然,只有在 $x\geqslant 0$ 时,它们的对应关系才相同,所以这两个函数在实数集上是不同的.

三、函数定义域的求法

函数的定义域是确定函数的要素之一,在研究函数时,只有在函数定义域内进行研究才是有意义的.

在实际问题中,函数的定义域是根据所研究的问题的实际意义来确定的.对于用数学式表示的函数,若不考虑问题的实际意义,则函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数的集合.

例 6　求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$;　(2) $f(x)=\lg(1-x)+\sqrt{x+2}$.

解　(1) 要使函数有意义,必须 $\begin{cases} 4-x^2\geqslant 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$,　解得 $\begin{cases} -2\leqslant x\leqslant 2 \\ x\neq 1 \end{cases}$,

用区间表示其定义域为 $[-2,1)\cup(1,2]$.

(2) 要使函数有意义,必须 $\begin{cases} 1-x>0 \\ x+2\geqslant 0 \end{cases}$,解得 $-2\leqslant x<1$,

用区间表示其定义域为 $[-2,1)$.

四、反函数

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$,其定义域为 D,值域为 M.如果对于 M 中的每一个 $y(y\in M)$ 值,都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 $x(x\in D)$ 值与之对应,这样就确定了一个以 y 为自变量的函数,记为 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$,这个函数就叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数,它的定义域为 M,值域为 D.习惯上用 x 表示自变量,y 表示因变量.因此函数 $y=f(x)$ 的反函数可表示为 $y=f^{-1}(x)$.函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1.1).

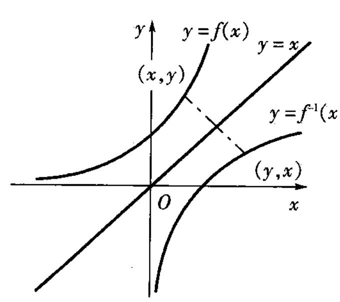


图 1.1

求反函数的一般步骤是:从 $y=f(x)$ 中解出 x,得到 $x=f^{-1}(y)$,再将 x,y 互换,则 $y=f^{-1}(x)$ 就是 $y=f(x)$ 的反函数.

例 7　求 $y=\sqrt{1-x^2}$,$x\in[-1,0]$ 的反函数.

解　从 $y=\sqrt{1-x^2}$ 中解出 $x=\pm\sqrt{1-y^2}$,因为 $x\in[-1,0]$,所以把 $x=\sqrt{1-y^2}$ 舍去,得到 $x=-\sqrt{1-y^2}$.然后将 x,y 互换,即 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

1.1.2 函数的特性

一、函数的单调性

如果对于区间(a,b)内的任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在(a,b)内单调增加(图1.2)；当$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在(a,b)内单调减少(图1.3)．区间(a,b)称为单调区间．

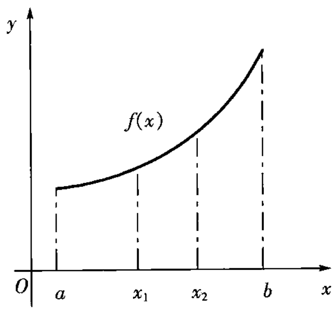


图1.2

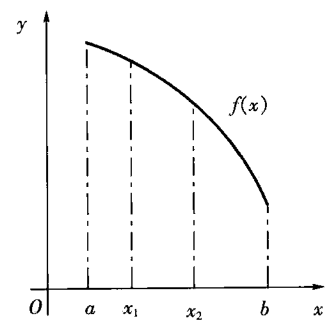


图1.3

上述定义也适用于其他有限区间和无限区间的情形．

二、函数的奇偶性

设函数$y=f(x)$的定义域D关于原点对称，如果对于任何$x\in D$有$f(x)=f(-x)$，则称函数$f(x)$在D上是偶函数；如果有$f(x)=-f(-x)$，则称函数$f(x)$在D上是奇函数．

偶函数的图形关于y轴对称(图1.4)；奇函数的图形关于原点对称(图1.5)．

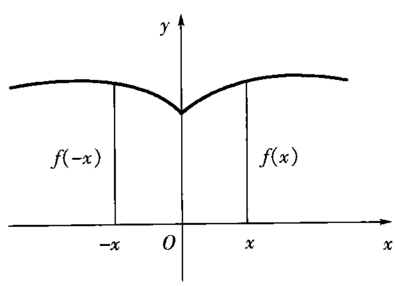


图1.4

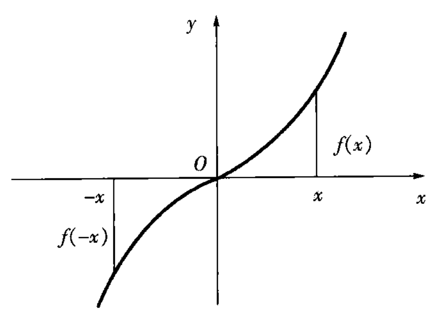


图1.5

例8 判断$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\in(-1,1)$的奇偶性．

解 因为$(-1,1)$关于原点对称，而

$$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 是奇函数.

三、函数的有界性

如果对属于某一区间 I 的任何 x 的值总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,其中 M 是一个与 x 无关的常数,那么我们称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界;否则称为无界.

一个函数,如果在它的定义域内有界,就称之为有界函数;否则称之为无界函数.有界函数的图形必位于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

例如,函数 $y=\sin x$ 是有界函数,在它的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\sin x|\leqslant 1$.

注意,有可能出现以下的情况:函数在其定义域上的某一部分是有界的,而在另一部分是无界的,因此,讲一个函数是有界的或无界的时,必须指出其相应的范围.

四、函数的周期性

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义,若存在一正数 T,对于任何 $x\in D$ 且 $x+T\in D$ 都有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数,称 T 为周期.若周期函数存在最小正周期,则称此最小正周期为基本周期,简称周期.

例如,$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期是 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$,$y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的周期就是 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$.

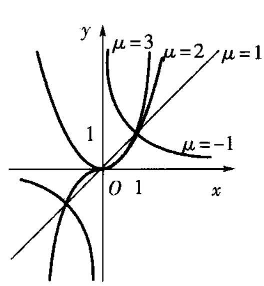
1.1.3　复合函数

一、基本初等函数

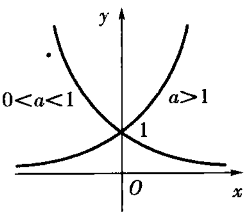
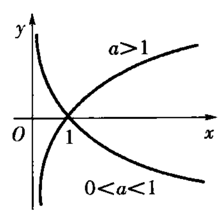
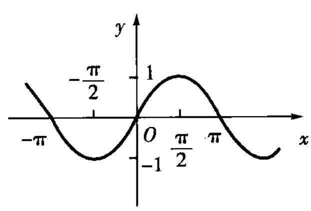
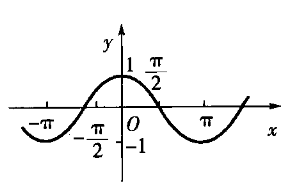
我们学过的幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为实数);指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$;对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$;三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$;反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数.

现把一些常用的基本初等函数的性质及图形见表 1.1:

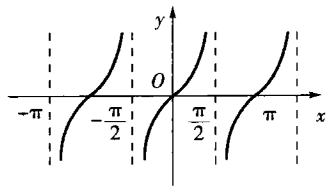
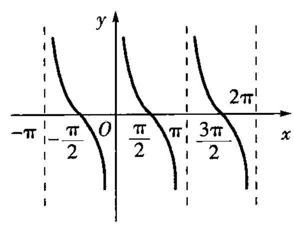
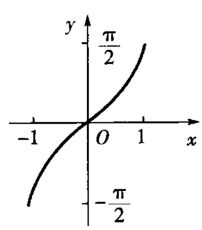
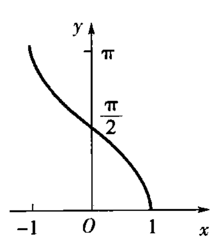
表 1.1

函数	表达式	定义域与值域	图形	特性
幂函数	$y=x^{\mu}$ $\mu\neq 0$	定义域与值域随 μ 的不同而不同,但不论 μ 取什么值,函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义		若 $\mu>0$,x^{μ} 在 $[0,+\infty)$ 单调增加;若 $\mu<0$,x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少

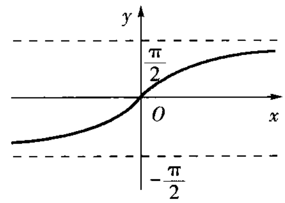
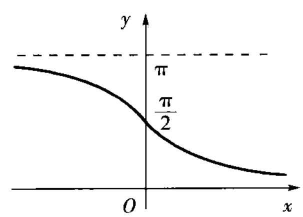
（续表）

函数	表达式	定义域与值域	图形	特性
指数函数	$y=a^x$ $a>0,a\neq 1$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		若 $a>1$，a^x 单调增加； 若 $0<a<1$，a^x 单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $a>0,a\neq 1$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		若 $a>1$，$\log_a x$ 单调增加； 若 $0<a<1$，$\log_a x$ 单调减少
正弦函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,+1]$		奇函数，周期为 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少，$k\in Z$
余弦函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,+1]$		偶函数，周期为 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加，$k\in Z$

（续表）

函数	表达式	定义域与值域	图形	特性
正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，$k\in Z$
余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\ (k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少，$k\in Z$
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,+1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
反余弦函数	$y=\arccos x$	$x\in[-1,+1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界

（续表）

函数	表达式	定义域与值域	图形	特性
反正切函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

二、复合函数

定义 1.4 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D，值域为 M，且 $M\subset D_1$. 若对于 D 内任意一点 x，有确定的值 $u=\varphi(x)$ 与之对应，由于 $u=\varphi(x)\in M\subset D_1$，又有确定的值 y 与之对应，这样就确定了一个新函数，此函数称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$.

例如，设函数 $y=\sin^2 u, u=x^2$，则复合而成的函数 $y=\sin^2 x^2$ 的定义区间为 $(-\infty,+\infty)$. 由函数 $y=\sqrt{u}, u=1-x^2$ 复合而成的函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义区间为 $[-1,1]$. 而函数 $y=\sqrt{1-u^2}, u=x^2+2$ 是无法复合的，因为对应于任何 x 的值，u 的值都在函数 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义区间以外.

为了研究的方便，往往把一个比较复杂的函数分解成几个比较简单的函数的复合. 要把复合函数分解好，就必须牢记基本初等函数的形式.

例 9 指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=5^{(2x-1)^3}$；　　(2) $y=\sqrt{\log_a\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.

解 (1) 函数 $y=5^{(2x-1)^3}$ 是由 $y=5^u, u=v^3, v=2x-1$ 复合而成，其中 u 和 v 为中间变量.

(2) 函数 $y=\sqrt{\log_a\left(\frac{1}{x^2}\right)}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=\log_a v, v=\frac{1}{x^2}$ 复合而成，其中 u 和 v 为中间变量.

1.1.4　初等函数

定义 1.5　由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算及有限次的复合而构成的并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如:函数 $y=\sin(3x+1)$,$y=\sqrt{x^3}$,$y=\dfrac{\lg x+2\tan x}{10^x-1}$ 都是初等函数.

应当注意,函数 $y=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$ 初看虽由两个式子表示,但是它也可用一个解析式 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 表示,所以它也是初等函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域:

(1)$y=\cos\sqrt{x^2-1}$;　　(2)$y=\arctan\dfrac{1}{x}+\sqrt{2-x}$;

(3)$y=\arcsin(x-1)$;　　(4)$y=\ln(\ln x)$.

2. 下列函数是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$;　　(2)$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>0\\ 1, & x=0\\ x^2, & x<0\end{cases}$,求 $f(0)$,$f(-\dfrac{1}{2})$ 及 $f(\dfrac{1}{2})$.

4. 设 $f(x+1)=x+3x+5$,求 $f(x)$,$f(x-1)$.

5. 判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$;　　(2)$f(x)=\tan|x|$.

6. 求下列函数的反函数:

(1)$y=1-\sqrt{1-x^2}(-1<x<0)$;　　(2)$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})(x>1)$.

7. 指出下列函数的复合过程:

(1)$y=\cos(1-2x)$;　　(2)$y=\lg(\arcsin x)$.

8. 一台机器的价值是 50 万元,如果每年的折旧率为 4.5%(即每年减少它的价值的 4.5%),经过 n 年后机器的价值是 Q 万元. 试写出 Q 与 n 的函数关系式.

1.2　经济学中常用的函数

1.2.1　需求函数

在经济学中,需求是指在一定价格条件下,消费者愿意并且有支付能力购买的商品数量. 消费者对某种商品的需求是由多种因素决定的,其中商品的价格是影响需求的一个主要因素. 假设其他条件不变(如消费者的收入、偏好以及其他替代商品的价格等),把商品的需求量 Q 仅看成是其价格 p 的函数,这个函数就称为需求函数. 记为

$$Q=f(p),\quad p\geqslant 0.$$

从需求的特征来看：需求函数一般是减函数，商品的价格低，则需求量大；商品的价格高，则需求量小. 需求函数的图形，称为需求曲线，需求曲线是单调下降的.

常见的需求函数有如下几种：

(1) 线性函数　$Q=a-bp\quad (a,b>0)$.

(2) 二次函数　$Q=a-bp-cp^2\quad (a>0,b\geqslant 0,c>0)$.

(3) 指数函数　$Q=Ae^{-bp}\quad (A>0,b>0)$.

(4) 幂函数　$Q=Ap^{-\alpha}\quad (A>0,\alpha>0)$.

对具体问题，可根据实际情况确定需求函数的类型及其中的参数.

在经济学中，需求函数常以反函数的形式 $p=f^{-1}(Q)$ 给出，需求函数的反函数也称为需求函数，有时也称为价格函数.

例 1　市场上售出的某种衬衫的件数 Q 是价格 p 的线性函数. 当价格 p 为 50 元一件时可售出 1500 件；当价格 p 为 60 元一件时，可售出 1200 件. 试确定需求函数和价格函数.

解　设需求线性函数为 $Q=a-bp\quad (a,b>0)$.

根据题意，有 $\begin{cases}1500=a-50b\\1200=a-60b\end{cases}$,

解之得 $a=3000$, $b=30$.

于是所求需求函数为　$Q=3000-30p$.

从而得其价格函数为　$p=100-\dfrac{Q}{30}$.

1.2.2　供给函数

在经济学中，供给是指在一定条件下，商品生产者或企业愿意并能够出售的商品数量. 供给也是由多种因素决定的，其中，最主要的也是商品的自身价格. 因此，在分析时，通常假定其他条件(如生产者的投入成本、技术状况、卖者对其他商品及未来的价格的预测等)保持不变，把供给量 Q 仅看做是价格 p 的函数，这个函数被称为供给函数. 记作：

$$Q=g(p),\quad p>0.$$

从供给的特征来看：商品的价格低，生产者不愿意生产(或者企业不愿意供给商品)，供给就少；商品的价格高，生产者愿意生产(或者企业愿意供给商品)，则供给多. 因此，供给函数一般为单调增函数. 供给函数的反函数 $p=g^{-1}(Q)$ 也称为供给函数. 供给函数的图形，称为供给曲线，供给曲线是单调上升的.

常用的供给函数有以下几种类型：

(1) 线性函数　$Q=-c+dp\quad (c>0,d>0)$.

(2) 二次函数　$Q=-a+bp+cp^2\quad (a>0,b\geqslant 0,c>0)$.

(3) 指数函数　$Q=Ae^{kp}-B\quad (A>0,B>A,k>0)$.

供给函数的形式很多，它与市场组织、市场状况及成本函数有密切关系.

当市场上的需求量与供给量相等时，需求关系与供给关系之间达到某种均衡，这时的商品价格和需求量（或供给量）分别称为均衡价格和均衡数量. 假设需求曲线 $Q_d=f(p)$ 和供给曲线 $Q_s=g(p)$ 的交点为$(\bar{p},\bar{Q})$，则 $\bar{p}$，$\bar{Q}$ 分别是均衡价格和均衡数量. 该点$(\bar{p},\bar{Q})$ 称为均衡点.

例如，若取需求函数为 $Q_d=f(p)=a-bp$，供给函数为 $Q_s=g(p)=-c+dp$，则均衡价格 $\bar{p}$ 应使供给和需求相等，$Q_d=Q_s$，即 $a-b\bar{p}=-c+d\bar{p}$.

故得均衡价格为 $\bar{p}=\dfrac{a+c}{b+d}$，均衡数量为 $\bar{Q}=a-b\bar{p}=\dfrac{ad-bc}{b+d}$，如图 1.6 所示.

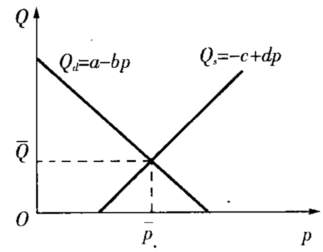


图 1.6

例 2　设某商品的需求函数为 $Q_d=53-2p^2$，供给函数为 $Q_s=p-2$. 试确定该商品的均衡价格和均衡数量.

解　由供需均衡条件 $Q_d=Q_s$，可得 $53-2p^2=p-2$

解得　　$p_1=-5.5$（舍去），$p_2=5$.

所以该商品的均衡价格为 $\bar{p}=5$，由此得均衡数量为 $\bar{Q}=3$. 该商品的均衡点是(5,3)，如图 1.7 所示，当价格低于 5 时，需求大于供给；当价格高于 5 时，供给大于需求.

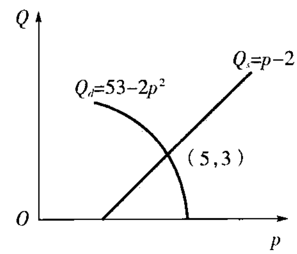


图 1.7

例 3　设某商品的需求函数与供给函数分别由方程 $6Q+8p=125$ 和 $2Q-5p=-12$ 确定：(1) 求该商品的均衡点；(2) 写出需求函数 $Q_d(p)$，供给函数 $Q_s(p)$.

解　(1) 解方程组 $\begin{cases}6Q+8p=125\\2Q-5p=-12\end{cases}$ 得 $p=7,Q=\dfrac{23}{2}$，

即该商品的均衡点为$(7,\dfrac{23}{2})$.

(2) 由 $6Q+8p=125$ 解得需求函数为 $Q=Q_d(p)=\dfrac{125-8p}{6}$；

由 $2Q-5p=-12$ 解得供给函数为 $Q=Q_s(p)=\dfrac{5p-12}{2}$.

1.2.3　收益函数

总收益是指生产者出售一定数量的产品所得到的全部收入，收入与产品的价格及销售数量有关. 当产品的单位售价为 p，销售量为 Q 时，总收益函数为：$R=p\cdot Q$.

假定产销平衡，其含义是供应量、需求量、销售量是相同的. 这时，若已知该商品的需求函数为 $Q=f(p)$，则知 $p=f^{-1}(Q)$，从而总收入函数可以表示为：

$$R=R(Q)=Q\cdot p=Q\cdot f^{-1}(Q).$$

例 4　某药厂生产某种药品，年产量为 Q 万瓶，每瓶售价 2 元. 该厂每年的自销售量稳定