范进军　编著

常微分方程续论

Changweifenfangcheng Xulun

山东大学出版社

常微分方程续论

范进军　编著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程续论/范进军编著.
—济南:山东大学出版社,2009.7
ISBN 978-7-5607-3889-5

Ⅰ.常…
Ⅱ.范…
Ⅲ.常微分方程
Ⅳ.0175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 117332 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码:250100)
山　东　省　新　华　书　店　经　销
莱芜市圣龙印务有限责任公司印刷
850×1168 毫米　1/32　7 印张　200 千字
2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷
定价:18.00 元

内 容 简 介

本书主要介绍常微分方程基本理论、几何理论和稳定性理论等．重点阐述解的局部存在性、唯一性，解对初值与参数的连续性、可微性，解的整体存在性；阐述动力系统的基本概念，奇点、极限环及其附近轨线的拓扑结构；介绍稳定性理论的基本概念及李雅普诺夫第二方法；最后给出常微分方程的应用实例．本书内容始终致力概念实质的介绍，注重定理思路的阐述，突出思想方法的揭示，并紧密联系常微分方程在现代科技领域的应用．

本书可作为高等院校数学、物理、自动控制及其他有关专业的研究生教材和高年级本科生选修课教材，也可作为这些专业及化学、生物、信息、金融、经济等有关专业的教师及科学工作者的参考书．

前 言

随着科学技术的发展和社会的进步，常微分方程的应用不断扩大与深入，在自然科学和社会科学的诸多领域都有广泛的应用，自动控制理论、无线电技术、火箭的飞行、导弹的发射、机器的运转、电子管振荡器的振荡、化学反应稳定性的研究、神经网络、生物技术、图像处理、军备竞赛、人口问题、传染病问题和金融问题等的数学模型往往可化为常微分方程. 因而常微分方程的研究具有实际意义. 微分方程这一学科自身的发展也充满生机与活力，其理论研究促进了数学其他分支理论的发展，因此也具有重要的理论意义.

在现有数学专业本科基础课《常微分方程》教材中，一般主要阐述线性微分方程，而对非线性微分方程的理论的阐述较少. 因此，目前高校中大学生与研究生迫切需要适应时代要求的以阐述非线性微分方程理论为重点的《常微分方程续论》教材.

多年来，我们为基础数学与应用数学专业的研究生及高年级本科生开设常微分方程续论这门课程. 本书是在多年讲授而形成的讲义的基础上编写的，是新形势下研究生培养及高年级本科生所急需的常微分方程基础教材. 本书的价值在于既能使学生掌握微分方程的基础理论，又能了解现代微分方程研究的概貌，为学生进一步深入研究微分方程理论与应用打下良好的基础.

在本书的策划、写作过程中，傅希林教授曾给予大力指导与帮助，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢！

本书能在较短时间内出版，得力于山东大学出版社的积极支持，在此深表谢意. 由于时间仓促、水平有限，书中错漏在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2009 年 4 月

目　录

第0章

预备知识

本章介绍常微分方程所涉及的几种空间:度量空间、赋范线性空间、Banach空间;证明方程有解存在的不动点定理:Banach压缩映像原理、Schauder不动点定理及Krasnoselskii不动点定理;证明函数序列有一致收敛子列的著名而又经典的Ascoli-Arzela定理.有些知识已在其他课程中学习过,这里我们首先再作一番复习,以保持学习的连续性.

我们在本书中经常使用以下符号:

$\forall$:对所有的 …

$\exists$:存在

$\exists!$:存在且唯一

$\overline{\Omega}$:集合 Ω 的闭包

$\mathring{\Omega}$:Ω 的所有内点组成的集合

$\partial\Omega$:表示 $\overline{\Omega}-\mathring{\Omega}$ 即 Ω 的边界

$U(a;\delta)$:点 a 的 δ 邻域

$A\Rightarrow B$:由 A 可推出 B

$\Leftrightarrow$:当且仅当

N_+:表示集合$\{1,2,3,\cdots\}$

0.1 度量空间

0.1.1 度量空间定义

设 X 是一个非空集合. 如果按照某一法则,对于 X 中任意二元素 x,y 都有唯一一个非负实数 $\rho(x,y)$ 与之对应,且满足下列条件:

① 正定性:$\rho(x,y)\geqslant 0$;$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

② 对称性:$\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

③ 三角不等式:$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$,$\forall z\in X$.

则称 $\rho(x,y)$ 是 x,y 间的距离,并称 X 按照 ρ 成为一个度量空间,记作(X,ρ).

注 上述 ①②③ 称为距离三公理.

例 0.1 R^n(n 维实欧氏空间).

对 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$,定义

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则(R^n,ρ) 为一度量空间.

例 0.2 $C[a,b]$.

若对 $\forall x,y\in C[a,b]$,定义 $\rho(x,y)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$ 或 $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$,则$(C[a,b],\rho)$ 为一度量空间.

例 0.3 在 R^1 上定义 $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$,$\forall x,y\in R^1$,则$(R^1,\rho)$ 为一度量空间.

注 关于三角不等式的证明,利用函数 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$ 关于 $t\geqslant 0$ 单调递增性即可得证.

例 0.4 离散度量空间.

设 X 是一非空集合，在 X 上定义 $\rho(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\neq y \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=y \text{ 时},\end{cases}$ 则 (X,ρ) 为一度量空间. 这一度量空间称为离散度量空间.

0.1.2　度量空间中的一些基本概念

设 (X,ρ) 是一个度量空间.

(1) 点 a 的 δ 开邻域 $U(a;\delta)=\{x\mid x\in X,\rho(x,a)<\delta\}$.

(2) **点列极限**　设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,ρ) 中的点列，$a\in X$. 若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\ni n>N$ 时，$x_n\in U(a;\varepsilon)$，则称点列(或序列) $\{x_n\}$ 收敛于点 a，并称 a 为 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

注　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\rho(x_n,a)\to 0(n\to\infty)$.

0.1.3　完备的度量空间

Cauchy 列　如果度量空间 (X,ρ) 中的点列 $\{x_n\}$ 满足 Cauchy 准则：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\ni m,n>N$ 时，$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$，则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个基本列或 Cauchy 列.

注　收敛列必是基本列；X 中的基本列不一定都在 X 中收敛.

例 0.5　令 $X=R^1-\{0\}$，$\rho(x,y)=|x-y|$，则 (X,ρ) 为一度量空间. 取 $x_n=\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$ 显见 $\{x_n\}$ 为 X 中基本列，但它在 X 中无极限.

完备度量空间　如果在度量空间 (X,ρ) 中所有的基本列都各自收敛于 X 中的一点，则称此度量空间为完备的度量空间.

例 0.6　① 在 R^1 上定义 $\rho(x,y)=|x-y|$，则 (R^1,ρ) 是完备的度量空间.

② 在 $C[a,b]$ 上，定义 $\rho(x,y)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$，则 $(C[a,b],\rho)$ 是完备的度量空间.

0.1.4　紧致的度量空间

设 A 是度量空间 (X,ρ) 的子集. 若 A 中每一个序列都有一个收敛的子列,则称 A 是相对紧致的.

紧致度量空间　设 A 是度量空间 (X,ρ) 的相对紧致子集,并且 A 中所有收敛序列的极限都属于 A,则称 A 是紧致的. 若 X 本身是紧致的,则称 (X,ρ) 是紧致的度量空间.

有界集　设 (X,ρ) 是一个度量空间,$A\subset X$. 如果存在 $M>0$,使得 $\forall x,y\in A$ 有 $\rho(x,y)<M$,则称 A 是 X 的有界子集. 如果 X 本身是一个有界集,则称度量空间 (X,ρ) 是一个有界度量空间.

注　由定义易知:

① 紧致度量空间必是完备的.

② 紧致集合必是一个有界闭集.

0.2 赋范线性空间、Banach 空间

赋范线性空间　设 E 是一个实(或复)数域 K 上的线性空间. 如果在 E 上定义了一个实值函数 $\|\cdot\|$,它满足下面的"范数公理":

① $\|x\|\geqslant 0$ 且 $\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$;

② $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$;

③ $\|ax\|=|a|\,\|x\|,a\in K$.

则称 E 为实(或复)数域 K 上的赋范线性空间,并称 $\|x\|$ 为 x 的范数,$\|\cdot\|$ 为 E 上的范数.

注　对赋范线性空间 E,定义 $\rho(x,y)=\|x-y\|,\forall x,y\in E$. 易知,$\rho(x,y)$ 为 E 上的距离. 此 $\rho(\cdot,\cdot)$ 称为由范数 $\|\cdot\|$ 导出的距离.

Banach 空间　如果赋范线性空间 E 按范数所导出的距离是一个完备的度量空间,则称 E 是一个 Banach 空间.

例 0.7　n 维欧氏空间 R^n.

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n,\alpha\in R^1$,定

义

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n),$$

并定义范数 $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$，则 R^n 为一 Banach 空间.

例 0.8　连续函数空间 $C[a,b]$.

对 $\forall f,g \in C[a,b],\alpha \in R^1$，定义

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),(\alpha f)(t)=\alpha f(t),t\in[a,b],$$

并定义范数

$$\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|,$$

则 $C[a,b]$ 为一 Banach 空间.

算子　设 E_1,E_2 为赋范线性空间，$D\subset E_1$，我们把由 D 到 E_2 的映射 $T:D\to E_2$ 称为算子，D 称为算子 T 的定义域，记作 $D(T)$. 像集 $\{y\mid y=Tx,x\in D(T)\}$ 称为 T 的值域，记作 $R(T)$.

有界算子　若算子 $T:D\to E_2$ 把 $D(T)$ 中任一有界集映成有界集，则称 T 为有界算子.

紧算子　若算子 $T:D\to E_2$ 把 $D(T)$ 中任一有界集映成相对紧集，则称 T 为紧算子.

全连续算子　若算子 $T:D\to E_2$ 是连续的紧算子，则称 T 为全连续算子.

线性算子　若算子 T 的定义域 $D(T)\subset E_1$ 为 E_1 的子空间，且对 $\forall x,y\in D(T),\alpha,\beta\in K$(实或复数域)，有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,$$

则称 T 为线性算子.

易知，线性算子有如下性质：

① 设 T 是线性算子，则 T 有界 $\Leftrightarrow \exists M>0,\ni \|Tx\|\leqslant M\|x\|,\forall x\in D(T)$.

② 如果线性算子 T 在定义域 $D(T)$ 中某点 x_0 连续，则它在整个定义域上连续.

③ 线性算子 T 连续 $\Leftrightarrow T$ 有界.

证明　这里仅以性质 ③ 为例给出证明.

充分性. 由性质 ①② 易得.

必要性. 设 T 连续. 显然 T 在 θ 点连续. 若 T 无界,则对 $\forall n \in N_+$, $\exists x_n \in D(T)$, $\ni \| Tx_n \| > n \| x_n \|$.

由 T 线性易知, $x_n \neq \theta$. 令 $x'_n = \dfrac{x_n}{n \| x_n \|}$,则 $\| x'_n \| = \dfrac{1}{n} \to 0 (n \to \infty) \Rightarrow x'_n \to \theta (n \to \infty)$. 但由上式知, $\| Tx'_n \| > 1$,这与 T 在 θ 点连续相矛盾!

0.3　Ascoli-Arzela 定理

本节介绍一个非常有用的定理. 它在证明函数列的收敛性方面有重要应用. 为此,先给出两个概念. 设 $F = \{f(t)\}$ 是定义在 $[\alpha, \beta]$ 上的一个函数族,其中 $f(t) \in R^m$ 或 C^m(m 维实(或复)列向量).

一致有界　若 $\exists M > 0$, $\ni \| f(t) \| \leqslant M (\forall f \in F, \forall t \in [\alpha, \beta])$,则称函数族 F 是一致有界的.

等度连续　若对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\ni | t_1 - t_2 | < \delta (\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta])$ 时,对一切 $f \in F$ 均有

$$\| f(t_1) - f(t_2) \| < \varepsilon,$$

则称函数族 F 是等度连续的.

Ascoli-Arzela 定理　设 $F = \{f(t)\}$ 是定义在 $[\alpha, \beta]$ 上的一致有界、等度连续的函数族,其中 $f(t) \in R^m$ 或 C^m,则从 F 中必可选取一个在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛的序列 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$.

证明　设 $r_1, r_2, \cdots, r_k, \cdots$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的全体有理点. 以下分步证之.

① 构造函数序列 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset F$.

因为集合 $\{f(r_1) : f \in F\}$ 有界,所以可选出一个收敛的子序

列$\{f_{1n}(r_1)\}_{n=1}^{\infty}$. 同理,集合$\{f_{1n}(r_2)\}_{n=1}^{\infty}$有界,从而可选出一个收敛的子序列$\{f_{2n}(r_2)\}_{n=1}^{\infty}$. 如此继续下去,便可得到可数个收敛的子序列:

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(r_1), f_{12}(r_1), \cdots, f_{1n}(r_1), \cdots \\
&f_{21}(r_2), f_{22}(r_2), \cdots, f_{2n}(r_2), \cdots \\
&\cdots\cdots \\
&f_{n1}(r_n), f_{n2}(r_n), \cdots, f_{nn}(r_n), \cdots \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

如令 $f_n(t) = f_{nn}(t), n = 1,2,\cdots$ 则$\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset F$.

② 证$\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ 在$[\alpha,\beta]$上是一致收敛的.

基本思路:利用 Cauchy 准则和有限覆盖定理来证明.

首先,根据$\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$的取法知,它在$[\alpha,\beta]$的一切有理点上是收敛的. 这样,由函数列收敛的定义知,对 $\forall \varepsilon > 0, \forall r_k$, $\exists N_\varepsilon(r_k) > 0, \ni m,n > N_\varepsilon(r_k)$ 时,有

$$\| f_m(r_k) - f_n(r_k) \| < \varepsilon.$$

其次,根据$\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$的等度连续性知,对上 $\varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$, $\ni | t_1 - t_2 | < \delta_\varepsilon (\forall t_1, t_2 \in [\alpha,\beta])$ 时,对一切正整数 p 有

$$\| f_p(t_1) - f_p(t_2) \| < \varepsilon.$$

由于$[\alpha,\beta] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B(r_k,\delta_\varepsilon)$,其中 $B(r_k,\delta_\varepsilon) = (r_k - \delta_\varepsilon, r_k + \delta_\varepsilon)$,所以由有限覆盖定理知,$[\alpha,\beta]$存在有限覆盖. 不妨设为$[\alpha,\beta] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{j} B(r_k,\delta_\varepsilon)$. 令 $N = \max\{N_\varepsilon(r_1), N_\varepsilon(r_2), \cdots, N_\varepsilon(r_j)\}$,则当 $m,n > N$ 时,对 $\forall t \in [\alpha,\beta]$,必存在某一个 $k: 1 \leqslant k \leqslant j$,使得 $t \in B(r_k,\delta_\varepsilon)$,这样通过插项即得

$$
\begin{aligned}
\| f_m(t) - f_n(t) \| \leqslant &\| f_m(t) - f_m(r_k) \| + \| f_m(r_k) - f_n(r_k) \| \\
&+ \| f_n(r_k) - f_n(t) \| < 3\varepsilon.
\end{aligned}
$$

由函数列收敛的 Cauchy 准则知,$\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ 在$[\alpha,\beta]$上是一致收敛的.

0.4 不动点定理

0.4.1 Banach 压缩映像原理

求解各种类型方程(如微分方程、积分方程、代数方程等)时，首先遇到的问题是方程解的存在性与唯一性. 而这些问题通常可化为一个算子方程的不动点问题，而不动点的存在性往往与所考虑的空间的完备性有关.

Banach 压缩映像原理 设(X,ρ)是一个完备的度量空间，$\Omega \subseteq X$ 是一个非空闭集，$T:\Omega \to \Omega$. 若 $\exists \alpha \in [0,1)$，使得

$$\rho(Tx,Ty) \leqslant \alpha\rho(x,y), \forall x,y \in \Omega, \tag{0.4.1}$$

则 $\exists ! x^* \in \Omega, \ni Tx^* = x^*$. 这样的 x^* 称为 T 的不动点. 满足式(0.4.1)的映像称为压缩映像.

证明 ① 存在性.

任取 $x_0 \in \Omega$，作迭代序列

$$x_{n+1} = Tx_n, n = 0,1,2,3,\cdots \tag{0.4.2}$$

由不等式(0.4.1)知

$$\rho(x_{n+1},x_n) = \rho(Tx_n,Tx_{n-1}) \leqslant \alpha\rho(x_n,x_{n-1})$$
$$\Rightarrow \rho(x_{n+1},x_n) \leqslant \alpha^n\rho(x_1,x_0), \quad n = 1,2,3,\cdots$$

从而，对 $\forall n,p \in N_+$ 有

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+p},x_n) &\leqslant \rho(x_{n+p},x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1},x_{n+p-2}) + \cdots + \rho(x_{n+1},x_n)\\ &\leqslant (\alpha^{n+p-1} + \alpha^{n+p-2} + \cdots + \alpha^n)\rho(x_1,x_0)\\ &= \alpha^n(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{p-1})\rho(x_1,x_0)\\ &= \frac{\alpha^n(1-\alpha^p)}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0).\end{aligned} \tag{0.4.3}$$

因为 $0 \leqslant \alpha < 1$，所以 $\alpha^n \to 0(n \to \infty)$. 这样，由式(0.4.3)知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一 Cauchy 列. 再由 X 的完备性及 Ω 的闭性知，$\exists x^* \in \Omega, \ni x_n \to x^*(n \to \infty)$. 又 $\rho(x_{n+1},Tx^*) = \rho(Tx_n,Tx^*) \leqslant \alpha\rho(x_n,x^*) \to 0(n \to \infty)$，所以由 ρ 的连续性知，$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_{n+1},Tx^*) =$