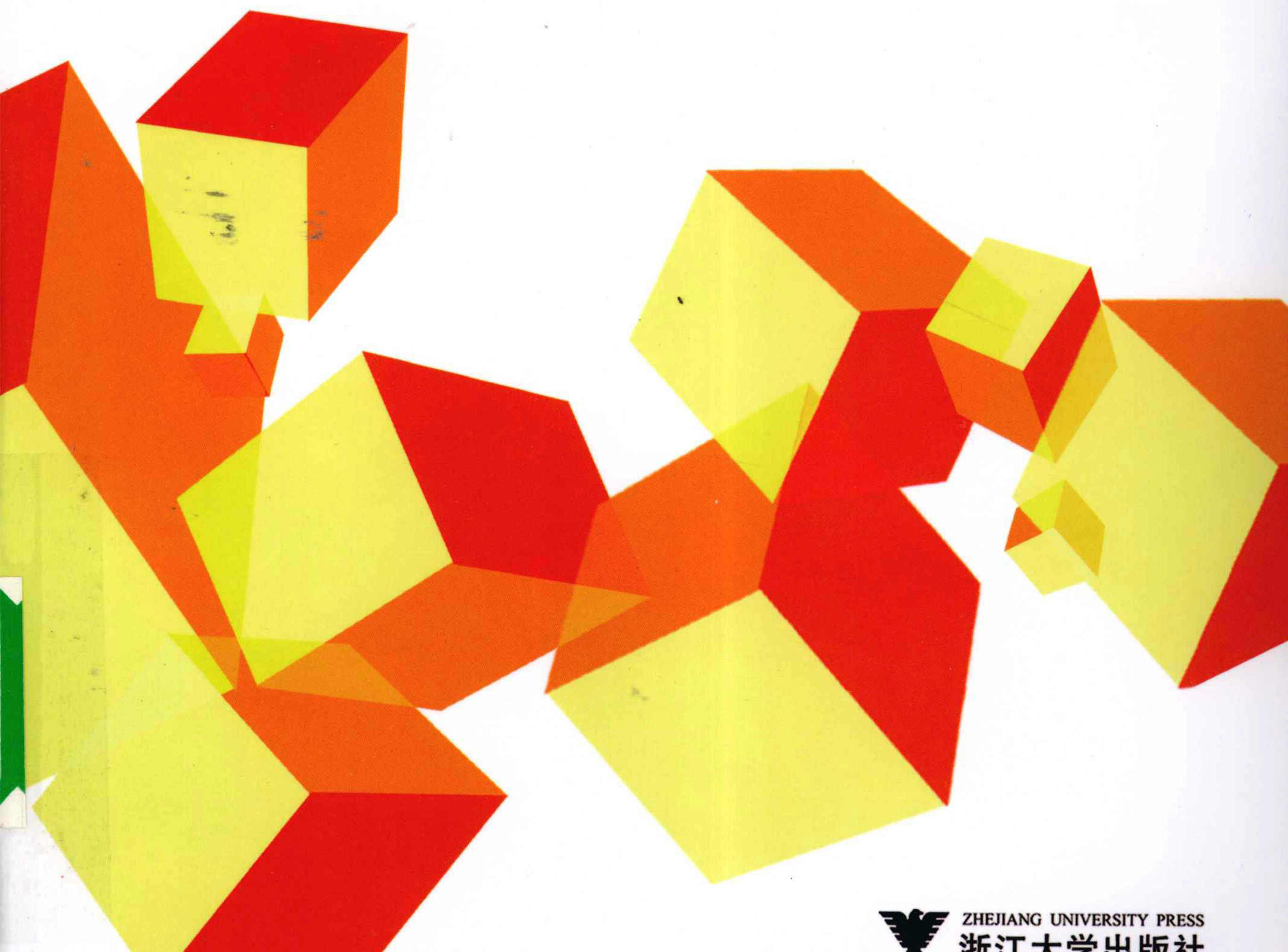
CHUZHONG SHUXUE JINGSAI PEIXUN JIAOCAI

初中数学竞赛培训教材

八年级

《初中数学竞赛培训教材》编委会 组编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

初中数学竞赛培训教材

八年级

《初中数学竞赛培训教材》编委会组编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

初中数学竞赛培训教材. 八年级／《初中数学竞赛培训教材》编委会组编. —杭州：浙江大学出版社，2010.1
ISBN 978-7-308-07168-0

Ⅰ. 初… Ⅱ. 初… Ⅲ. 数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 203224 号

初中数学竞赛培训教材(八年级)

《初中数学竞赛培训教材》编委会组编

责任编辑 杨晓鸣
文字编辑 夏晓冬
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版 杭州好友排版工作室
印　　刷 富阳市育才印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 14.25
字　　数 355 千
版 印 次 2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-07168-0
定　　价 24.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

编写说明

数学竞赛源远流长，其功能一是激发学生的学习兴趣，二是通过竞赛发现一批数学苗子，三是为有数学天赋的学生提供一个展示能力的平台．当然，还有许多其他的功能．事实证明，数学竞赛活动开展以来，的确培养了一批拔尖的数学人才．倡导数学竞赛不是全民皆兵，客观的看待数学竞赛，才能为数学竞赛创造一个良好的环境．

既不增加学生的负担，又要让学生轻松愉快地学习，使有余力的学生智力能得以开发，这是我们策划本教材的初衷．本套教材共有三册，即七年级、八年级和九年级各一册；编写的宗旨是为初中学生提供一套适合中考和竞赛要求、提高学习能力的素材．本教材重在训练学生的解题思路和解题技巧，注重将数学竞赛与中考结合起来，注意基础知识、基本技能与基本思想方法的训练；同时，注意培养学生的思维能力和创新能力，提高学生的素质，由浅入深，循序渐进．

本教材的例题与练习题，均以初中数学新课程标准和初中数学竞赛大纲为指导，极具代表性，且大部分是近五年来全国各地的中考与竞赛试题．本丛书内容年级为单位，按专题分类展开，去繁求简，去杂求精，力求系统性、全面性、实用性和工具性，使学生在知识与技能、数学思考、解决问题、情感与态度等方面得到进一步提升．

目　录

1　因数分解

知识精解

在研究整数时，我们常常把一个正整数分解成几个因数连乘的形式，就是因数分解. 但我们对一个正整数进行分解，如果不对分解的因数进行某些限制，分解的结果会不唯一，例如：

$36=1\times1\times1\times36=2\times3\times6=6\times6=4\times9=2\times2\times3\times3=2^2\times3^2$.

另一个问题是：一个正整数有多少个正约数呢？给出一个正整数 N^*，能否不用一一列举就可以很快地得到这个正整数的约数的个数呢？

下面介绍两个定理：

定理 1（质因数分解定理）：每一个大于 1 的整数都能分解为质因数的乘积的形式，如果把质因数按照由小到大的顺序排在一起，相同因数的积写成幂的形式，那么这种分解方法是唯一的.

根据这个定理，自然数 $N(N>1)$ 只有唯一的一种表示形式，$N=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_m^{a_m}$ ①，其中 $p_1<p_2<\cdots<p_m$，且 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 都是质数（素数），$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 都是正整数.

我们把①式叫做 N 的标准分解式.

定理 2（约数个数定理）：正整数 N^* 的标准分解式为 $N^*=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_m^{a_m}$，那么，它的正约数个数为 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_m)$.

触类旁通

【例 1】 105 的约数共有几个？

分析 可将 105 分解质因数，由约数个数定理确定约数的个数.

解 共有 8 个.

因为 $105=3\times5\times7$，所以它的约数为 1，3，5，7，15，21，35，105，共 $2\times2\times2=8$（个）.

评注 求正整数的约数的个数的过程实际上是因数分解过程.

【练习 1】 将 6432 与 132 的最大公约数减去 8，则它等于多少？

解 因为 $6432=2^5\times3\times67$，$132=2^2\times3\times11$，

因此，6432 与 132 的最大公约数为 $2^2\times3=12$，

所以 $12-8=4$.

【例 2】 化简：$\frac{116690151}{427863887}$.

分析 要把分子、分母的公因数找出来，以便达到化简之目的.

解 分子的数字之和等于 30，因而它可被 3 整除，分母的奇位数字之和与偶位数字之和的差为 $32-21=11$，因此，分母可被 11 整除，

原式$=\frac{38896717\times3}{38896717\times11}=\frac{3}{11}$.

评注 此题用到了数的整除性的知识，被 2，3，4，5，8，9，11 整除的数都具有某种特征.

【练习 2】 试求 5746320819 乘以 125 的值.

因为 $125=1000\div 8$,所以 $5746320819\times 125=5746320819000\div 8=718290102375$.

【例 3】 求方程 $x^2-y^2=1995$ 的正整数解.

分析 首先考虑降次,要达到降次的目的,则要把 1995 分解因数.

解 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=1995\times 1=665\times 3=399\times 5=285\times 7=105\times 19=133\times 15=95\times 21=57\times 35$.

所以$\begin{cases}x+y=1995\\x-y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x+y=665\\x-y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x+y=399\\x-y=5\end{cases}$或$\begin{cases}x+y=285\\x-y=7\end{cases}$……$\begin{cases}x+y=57\\x-y=35\end{cases}$.

所以$\begin{cases}x=998\\y=997\end{cases}$或$\begin{cases}x=334\\y=331\end{cases}$或$\begin{cases}x=202\\y=197\end{cases}$或$\begin{cases}x=146\\y=139\end{cases}$或$\begin{cases}x=62\\y=43\end{cases}$或$\begin{cases}x=74\\y=59\end{cases}$或$\begin{cases}x=58\\y=37\end{cases}$或$\begin{cases}x=46\\y=11\end{cases}$都是$x^2-y^2=1995$的正整数解.

评注 此题关键是寻找 1995 分解因数的所有可能,$1995=1\times 3\times 5\times 7\times 19$,然后两两结合即可.

【练习 3】 方程$\frac{x}{3}+\frac{14}{y}=3$有________组正整数解.

解 原式变形为 $y(9-x)=42=42\times 1=21\times 2=14\times 3=7\times 6=6\times 7$($9-x>0$,所以 $x<9$),可解得方程有五组解.

【例 4】 求证:如果一个整数是完全平方数,那么这个数的约数的个数是奇数,并且逆命题也成立.

分析 给出的不是一个具体的整数,考虑用 $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_m^{a_m}$ 表示它.

证明 如果数 $N=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_m^{a_m}$ 是完全平方数,则指数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 都是偶数,于是$(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdots(a_m+1)$是奇数,从而 N 的约数的个数是奇数.

反之,若 N 的约数的个数是奇数,则$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_m+1)$是奇数,即 $a_1+1,a_2+1,\cdots,a_m+1$ 都是奇数,于是 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是偶数,从而 N 是完全平方数.

评注 把题中的整数表示成 $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_m^{a_m}$ 是解决此题的关键.

【练习 4】 求约数个数为 10 的最小正整数 n.

解 由于 10 的分解式只有 $10=1\times 10=2\times 5$ 两种,于是 n 的形式为 $n=p^9$ 或 $n=p_1\cdot p_2^4$.

于是 n 的几个较小的可能值为 $n=2^9$,$n=2\times 3^4$,$n=3\times 2^4$,比较这三个数,最小的为 $n=3\times 2^4=48$.

【例 5】 求四个不超过 70000 的正整数,且每一个正整数的约数的个数多于 100 个.

分析 为使约数的个数多于 100 个,必须使约数尽量小,从而保证所求的数不超过 70000.

解 因为 $2^2\times 3^2\times 5^2\times 7\times 11=69300$,$2^5\times 3^2\times 5^2\times 7=50400$,$2^6\times 3^3\times 5\times 7=60480$,$2^4\times 3^2\times 5\times 7\times 11=55440$.

它们的约数的个数依次为 108,108,112,120.

评注 约数的个数由约数的个数定理来确定.

【练习 5】 设 P 是不等于 3 的质数、求形如 $3P^2$ 且所有正约数之和为 124 的所有正整数.

解 因为 $3P^2$ 的正约数有$(1+1)(2+1)=6$ 个,具体地为 $1,3,P,3P,P^2,3P^2$,由题意得 $1+3+P+3P+P^2+3P^2=124$,$4P^2+4P+4=124$,$P^2+P-30=0$,

解得 $P=5$,$P=-6$(舍去).

于是所求之数只有一个 $3\times5^2=75$.

同步检测

1. 能被 252 整除的最小完全平方数是　　(　　)

A. 36　　B. 1764　　C. 7056　　D. 6350

2. 两个正整数的和比积小 1997,并且其中一个是完全平方数,则两数中较大数与较小数的差是　　(　　)

A. 663　　B. 664　　C. 562　　D. 784

3. 若在两数中,大数的三倍为小数的四倍,且两数之差为 8,则两数中大数是　　(　　)

A. 16　　B. 24　　C. 32　　D. 44

4. 6432 与 132 的最大公约数减去 8 等于　　(　　)

A. -6　　B. -2　　C. 3　　D. 4

5. 一个数被 10 除余 9,被 9 除余 8,被 8 除余 7,…,被 2 除余 1,则此数为　　(　　)

A. 419　　B. 1259　　C. 2519　　D. 39

6. 计算:$4\times(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)=$________.

7. 自然数 m 除 13511,13903 和 14589 的余数都相同,则 m 的最大值是 ________.

8. 整数 a,b 满足 $6ab=9a-10b+303$,则 $a+b=$________.

9. $\frac{1}{1995}+\frac{2}{1995}+\frac{3}{1995}+\cdots+\frac{3989}{1995}=$________.

10. 一个正整数加上 50 得一完全平方数,减去 31 又得一完全平方数,求这个正整数.

11. 证明 $333^{777}+777^{333}$ 能被 37 整除.

12. 求一个最小的正整数,使它的$\frac{1}{2}$是平方数,它的$\frac{1}{3}$是立方数,它的$\frac{1}{5}$是五次方数.

2 同　　余

知识精解

一、定义

1. 余数的定义

整数 a 被非零整数 b 除，得不完全商 q、余数为 r，即 $a=bq+r$，其中$(0\leqslant r<|b|)$，称为 a 被 b 除的带余除法表达式，r 称为 a 被 b 除的余数.

2. 同余的定义

给定一个正整数 m，把它叫做模，如果用 m 去除任意两个整数 a，b 所得的余数相同，我们就说 a，b 对模 m 同余，记作 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$. 如果余数不同，则称 a，b 对模 m 不同余，记作 $a\not\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$. 例如：$9\equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$，$2006\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$.

同余的定义也可用下面两种方式来描述：

(1)若 $m|(a-b)$，则 a 与 b 对模 m 同余.

(2)若 $a=b+mt$(t 为整数)，则 a 与 b 对模 m 同余.

二、同余的性质

(1)反身性：$a\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$.

(2)对称性：$a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)\Leftrightarrow b\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$.

(3)传递性：$\left.\begin{array}{l}a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)\\ b\equiv c(\mathrm{mod}\ m)\end{array}\right\}\Rightarrow a\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$.

(4)可加性：$\left.\begin{array}{l}a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)\\ c\equiv d(\mathrm{mod}\ m)\end{array}\right\}\Rightarrow a\pm c\equiv(b\pm d)(\mathrm{mod}\ m)$.

推论 1：$\left.\begin{array}{l}a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)\\ c\text{ 为整数}\end{array}\right\}\Rightarrow a+c\equiv b+c(\mathrm{mod}\ m)$.

推论 2：$a+b\equiv c(\mathrm{mod}\ m)\Rightarrow a+b-c\equiv 0(\mathrm{mod}\ m)$或 $a\equiv c-b(\mathrm{mod}\ m)$.

推论 3：$a_k\equiv b_k(\mathrm{mod}\ m)\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\equiv\sum\limits_{k=1}^{n}b_k(\mathrm{mod}\ m)$(其中 $k=1,2,\cdots$).

(5)可乘性：$\left.\begin{array}{l}a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)\\ c\text{ 为整数}\end{array}\right\}\Rightarrow ac\equiv bc(\mathrm{mod}\ m)$.

推论 1：$\left.\begin{array}{l}a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)\\ c\equiv d(\mathrm{mod}\ m)\end{array}\right\}\Rightarrow ac\equiv bd(\mathrm{mod}\ m)$.

推论 2：$\left.\begin{array}{l}a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)\\ n\text{ 为自然数}\end{array}\right\}\Rightarrow a^n\equiv b^n(\mathrm{mod}\ m)$.

触类旁通

【例 1】 求证：$11|(10^{1999}+23^{1999})$.

分析 利用同余思想，将整除问题转化为同余问题来解决.

证明 因为 $10\equiv-1 \pmod{11} \Rightarrow 10^{1999}\equiv(-1)^{1999} \pmod{11}$，

$23\equiv1 \pmod{11} \Rightarrow 23^{1999}\equiv1 \pmod{11}$，

所以 $10^{1999}+23^{1999}\equiv(-1+1) \pmod{11}\equiv0 \pmod{11}$，所以 $11|(10^{1999}+23^{1999})$.

评注 找到与 10^{1999}，23^{1999} 关于模 11 同余的数是解题的关键.

【练习 1】 求 19^{1996} 除以 17 的余数.

解 $19\equiv2 \pmod{17}$，所以 $19^{1996}\equiv2^{1996} \pmod{17}$.

又因为 $2^{1996}=(2^4)^{499}=16^{499}$，$16\equiv-1 \pmod{17}$，

所以 $16^{499}\equiv(-1)^{499} \pmod{17}$.

又因为 $16\equiv-1\equiv16 \pmod{17}$，即 19^{1996} 除以 17 的余数是 16.

【例 2】 今天是星期天，过了$\overbrace{123\ 123\cdots123}^{2001个123}$天之后是星期________.

分析 由于每个星期都是 7 天，所以只需考虑$\overbrace{123\ 123\cdots123}^{2001个123}$被 7 除的余数.

解 因为 $123123=123\times1001=123\times143\times7\equiv0 \pmod 7$

所以$\overbrace{123\ 123\cdots123}^{2001个123}=\overbrace{123\ 123\cdots123}^{2000个123}000+123\equiv123\equiv4 \pmod 7$.

所以，答案为星期四.

评注 要注意到 $123123\equiv0 \pmod 7$，则只要偶数个 123 连接起来的数均能被 7 整除.

【练习 2】 把由 1 开始的自然数依次写下来，一直写到第 201 位为止，就是

$$a=\underbrace{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\,16\,17\,18\,19\cdots}_{共201位}$$

请问：a 的数字和被 3 除的余数是几？

解 因为 1～9 写在一起构成 9 个数码，10～99 共计 $90\times2=180$ 个数码，所以从 1 开始的自然数依次写到 99，合计写出 189 个数码.

由于 $201-189=12$，因此只需再接着写上 100，101，102，103 四个数，就写出了这个 201 位的整数 a.

易知，每三个连续整数之和能被 3 整除，所以它们的数字和能被 3 整除. 因此前 102 个数写成的数码和被 3 整除，而 103 被 3 除余 1，所以 a 这个 201 位数的数字和被 3 除余 1.

【例 3】 求证：对于任意奇数 n，数 $1^{2007}+2^{2007}+3^{2007}+\cdots+n^{2007}$ 不能被 $n+2$ 整除.

分析 这个问题为非整除问题，设法转化为同余问题.

证明 因为 $n\equiv-2 \pmod{n+2}$，$n-1\equiv-3 \pmod{n+2}$，$n-2\equiv-4 \pmod{n+2}$，…，

$3\equiv-(n-1) \pmod{n+2}$，$2\equiv-n \pmod{n+2}$.

所以 $n^{2007}\equiv(-2)^{2007} \pmod{n+2}$，$(n-1)^{2007}\equiv(-3)^{2007} \pmod{n+2}$，…，

$2^{2007}\equiv(-n)^{2007} \pmod{n+2}$.

所以 $n^{2007}+(n-1)^{2007}+\cdots+2^{2007}$，…，

$\equiv(-2)^{2007}+(-3)^{2007}+\cdots+(-n)^{2007}$

$\equiv-[n^{2007}+(n-1)^{2007}+\cdots+2^{2007}] \pmod{n+2}$.

即 $2[n^{2007}+(n-1)^{2007}+\cdots+2^{2007}]\equiv 0(\mathrm{mod}\ n+2)$.

因为 n 为奇数，所以 $(2,n+2)=1$，

所以 $n^{2007}+(n-1)^{2007}+\cdots+2^{2007}\equiv 0(\mathrm{mod}\ n+2)$，

所以 $n^{2007}+(n-1)^{2007}+\cdots+2^{2007}+1^{2007}\equiv 1(\mathrm{mod}\ n+2)$，

所以 $n^{2007}+(n-1)^{2007}+\cdots+2^{2007}+1^{2007}$ 不能被 $n+2$ 整除.

评注 非整除问题转化为同余问题，借助同余的性质进行变通.

【练习 3】 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+2002^3$ 的末位数是________.

解 因为 $11^3+12^3+\cdots+20^3\equiv 1^3+2^3+\cdots+9^3(\mathrm{mod}\ 10)$，

$21^3+22^3+\cdots+30^3\equiv 1^3+2^3+\cdots+9^3(\mathrm{mod}\ 10)$，

…

$1991^3+1992^3+\cdots+2000^3\equiv 1^3+2^3+\cdots+9^3(\mathrm{mod}\ 10)$，

所以 $1^3+2^3+\cdots+2002^3\equiv 200(1^3+2^3+\cdots+9^3)+1^3+2^3(\mathrm{mod}\ 10)\equiv 1^3+2^3(\mathrm{mod}\ 10)\equiv 9(\mathrm{mod}\ 10)$.

所以末位数是 9.

【例 4】 试证：$x^2+y^2=z^2$ 没有都是质数的解.

分析 考虑用反证法.

证明 假设 $x=a,y=b,z=c$ 是质数解，

如果 $a=2$，由 $c^2-b^2=a^2$ 得 $(c+b)(c-b)=4$，因此 $c+b=4$，$c-b=1$，所以 $c=\frac{5}{2}$，这是不可能的.

于是知 a,b 都是奇数，因此有 $a^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$，$b^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$，

所以 $a^2+b^2\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$，而 $a^2+b^2=c^2$，故 $2|c$.

这与 c 为质数矛盾，这就是说 a,b,c 不能都是质数.

评注 多元不定方程的解的问题常用分类讨论的方法，此题需要恰当地选择模 m.

【练习 4】 证明不定方程 $x^2+y^2-8z=6$ 无整数解.

证明 对任意整数 x，以 8 为模有 $x\equiv 0,1,2,3,4,5,6,7(\mathrm{mod}\ 8)$，$x^2\equiv 0,1,4(\mathrm{mod}\ 8)$，

同理，对于任意整数 y，有 $y^2\equiv 0,1,4(\mathrm{mod}\ 8)$，

所以 $x^2+y^2\equiv 0,1,2,4,5(\mathrm{mod}\ 8)$，而 $8z+6\equiv 6(\mathrm{mod}\ 8)$，

所以 x^2+y^2 与 $8z+6$ 对模 8 不同余，所以 $x^2+y^2-8z=6$ 无整数解.

【例 5】 如图 2-1 所示，一枚棋子放在五角棋盘的 0 位上，现依逆时针方向按下列规律移动：第 1 次移动 1 格，第 2 次移动 2 格，…，第 n 次移动 n 格.

求证：不论棋子连续移动多少次，在第 2、第 4 格上总没有停棋的可能.

分析 利用移动总格数被 5 除的余数来决定棋子所在的位置.

证明 如图 2-1，设在 0 号位上的棋子连续移动了 n 次，这时棋子共走了 $1+2+3\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$(格)，

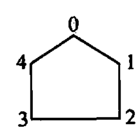


图 2-1

不论连续走多少次，棋子所在位置应是所走格数被 5 除的余数，因此问题即为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 被 5 除时，余数不可能为 2 和 4.

由于 $n\equiv r(\mathrm{mod}\ 5)$，$0\leqslant r\leqslant 4$，那么 $\frac{n(n+1)}{2}\equiv\frac{r(r+1)}{2}(\mathrm{mod}\ 5)$，

当 r 分别取 0,1,2,3,4 时，$\frac{r(r+1)}{2}\equiv 0,1,3\pmod 5$，

即第 2、第 4 格上总没有停棋的可能.

评注　把游戏问题转化为同余问题来解决，确定棋子所在位置应是所走格数被 5 除的余数.

【练习 5】　每一本书都有一个国际书号：$ABCDEFGHIJ$，其中 $ABCDEFGHI$ 由九个数字排列而成，J 是检查号码. 令 $S=10A+9B+8C+7D+6E+5F+4G+3H+2I$，$r$ 是 S 除以 11 所得的余数，若 r 不等于 0 或 1，则规定 $J=11-r$；若 $r=0$，则规定 $J=0$；若 $r=1$，则规定 J 用 x 表示，现有一本书的书号是 $962y707015$，那么 y 的值是多少？

解　因为 $S=9\times10+6\times9+2\times8+y\times7+7\times6+0\times5+7\times4+0\times3+1\times2=232+7y=21\times11+(7y+1)$，

所以 $S\equiv 7y+1\pmod{11}$，

检验号码为 5，S 被 11 除所得的余数是 $11-5=6$，因此 $7y$ 被 11 除的余数为 5，由此得 $y=7$.

同步检测

1. 已知 x,y 为任意整数，则 x^2+y^2 除以 4 的余数不可能是　　　　(　　)

A. 0　　　B. 1　　　C. 2　　　D. 3

2. 2000^{2001} 被 29 除的余数是　　　　(　　)

A. 0　　　B. 1　　　C. 2　　　D. 28

3. 设 n 为自然数，若 $15n+14\equiv 9n+1\pmod{85}$，则 n 的最小值是　　　　(　　)

A. 12　　　B. 14　　　C. 15　　　D. 16

4. 2001 年 7 月 13 日，北京市获得了第 29 届夏季奥运会的主办权，这一天是星期五，那么第 29 届奥运会在北京市举办的那一年的 7 月 13 日是　　　　(　　)

A. 星期四　　　B. 星期五　　　C. 星期六　　　D. 星期日

5. 若 p 与 $2p+1$ 均为质数，且 $p>3$，则 $4p+1$ 是　　　　(　　)

A. 奇数　　　B. 合数　　　C. 质数　　　D. 以上结论都不对

6. 如果 m 是大于 1 的整数，69，90，125 对 m 同余，那么 m 的值是________.

7. 已知 x,y 为整数，则 x^3+y^3 除以 9 的余数为________.

8. 在黑板上写有 $1,2,3,\cdots,2001$ 的数，每次只许抹去若干个数，同时又写上这些数之和除以 7 的余数，这样进行若干次操作后，黑板上仅剩下两个数 x 和 7，则 x 为________.

9. 若 a 除以 5 余 1，b 除以 5 余 4，且 $3a>b$，则 $3a-b$ 除以 5 的余数为________.

10. 设十进制数 $N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$. 求证：当且仅当 $9\mid(a_0+a_1+\cdots+a_n)$ 时，$9\mid N$.

11. 求证：$x^4+y^4+2=5z$ 无整数解.

12. 口袋里装着分别写有 $1,2,3,\cdots,2001$ 的小纸片，从袋中任意摸出若干小纸片后，算出纸片上各数的和除以 29 所得的余数，把余数写在另一张新纸片上放入袋内，经过若干次这样的操作后袋内最后剩下三个数，其中两个数分别是 2000，2001，求第三个数.

3 末尾数

知识精解

若想知道 2006^{2006} 的末位数字是几，但又不想做冗长的计算，该怎么办呢？

下面介绍一个定理：

定理 在 a^{4k+r} 中，设 k,r 为非负整数，a 为非零整数，且 $0\leqslant r<4$，那么当 $r=0$ 时，a^{4k+r} 的个位数字等于 a^4 的个位数字；当 $r\neq0$ 时，a^{4k+r} 的个位数字等于 a^r 的个位数字，我们看下表：

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^4	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
a^5	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
a^8	1	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	1677216	43046721

由上表可见，a^5 的末位数字与 a 的个位数字相同，a^8 的末位数字与 a^4 的末位数字相同．这就验证了上述定理的正确性（证明可参照同步检测第 12 题）．另一个事实：$N^n=(10b+a)^n$ 的末位数字就是 a^n 的末位数字．

对于上面的问题，要求 2006^{2006} 的末位数字，因为 $6^{2006}=6^{4\times501+2}$，则只要求 6^2 的末位数字就行了，对于整数的末位数字的确定问题，我们还经常转化为余数问题来解决．

触类旁通

【例 1】 $3^{2001}\times7^{2002}\times13^{2003}$ 所得积的末位数字是________．

分析 由整数的正整数幂的末位数字问题可知只要考虑正整数指数除以 4 的余数．

解 因为 $2001\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$，$2002\equiv2(\mathrm{mod}\ 4)$，$2003\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$，

所以 3^{2001} 的末位数字是 $3^1=3$，7^{2002} 的末位数字是 $7^2=49$ 的末位数字 9，13^{2003} 的末位数字也是 $3^3=27$ 的末位数字 7．

于是求 $3^{2001}\times7^{2002}\times13^{2003}$ 的末位数字转化为求 $3\times9\times7$ 的末位数字，显然它是 9．

评注 (1)充分利用末位数字的周期性的变化规律来确定末位数字，这种方法典型，且便于掌握．

(2)若干个正整数的乘积的末位数字，等于它们的末位数字乘积的末位数字．

【练习 1】 试求 43^{43} 的末位数字．

解 因为 $43\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$，所以 43^{43} 的末位数字是 $3^3=27$ 的末位数字 7．

【例 2】 试证：$53^{53}-33^{33}$ 是 10 的倍数．

分析 要证 $53^{53}-33^{33}$ 能被 10 整除，只要证其结果的末位数字为零即可．

证明 因为 $53^{53}=53^{4\times13+1}$，$33^{33}=33^{4\times8+1}$，

所以 53^{53} 的个位数字等于 33^{33} 的个位数字．

从而 $53^{53}-33^{33}$ 的个位数字为 0，即 $53^{53}-33^{33}$ 是 10 的倍数．

评注 倍数问题可以转化为末位数问题.

【练习 2】 试证：$3^{1998}+4^{1998}$是 5 的倍数.

证明 因为 $1998=4\times499+2$，所以由定理知 3^{1998}的个位数字等于 9.

而 4^{1998}的个位数字等于 6.

即 $3^{1998}+4^{1998}$的个位数字是 5.

故 $3^{1998}+4^{1998}$是 5 的倍数.

【例 3】 求 $1^4+2^4+3^4+\cdots+1990^4+1991^4$ 的个位数字.

分析 求 1991 个四次幂的和的个位数，先确定各个幂的个位数，寻找规律，找到解决问题的突破口.

解 $10^4\equiv0(\bmod 10)$，$1^4\equiv1(\bmod 10)$，$2^4\equiv6(\bmod 10)$，$3^4\equiv1(\bmod 10)$，$4^4\equiv6(\bmod 10)$，$5^4\equiv5(\bmod 10)$，$6^4\equiv6(\bmod 10)$，$7^4\equiv1(\bmod 10)$，$8^4\equiv6(\bmod 10)$，$9^4\equiv1(\bmod 10)$，

则 $1^4+2^4+3^4+\cdots+1990^4+1991^4$

$\equiv199\times(1^4+2^4+\cdots+9^4)+1^4$

$\equiv199\times(1+6+1+6+5+6+1+6+1)+1$

$\equiv199\times33+1\equiv9\times3+1\equiv7+1\equiv8(\bmod 10)$.

故 $1^4+2^4+3^4+\cdots+1991^4$ 的个位数字是 8.

评注 一个正整数的末位数字，是这个正整数被 10 除的余数.

【练习 3】 求 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+2002^3$ 的末位数字.

解 因为 $11^3+12^3+\cdots+20^3\equiv1^3+2^3+\cdots+9^3(\bmod 10)$，

$21^3+22^3+\cdots+30^3\equiv1^3+2^3+\cdots+9^3(\bmod 10)$，

$1991^3+\cdots+2000^3\equiv1^3+2^3+\cdots+9^3(\bmod 10)$，

所以 $1^3+2^3+\cdots+2002^3\equiv200(1^3+2^3+\cdots+9^3)+1^3+2^3(\bmod 10)\equiv1^3+2^3(\bmod 10)\equiv9(\bmod 10)$，

故 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+2002^3$ 的末位数字为 9.

【例 4】 求适合于 $x^5=656356768$ 的整数 x 的值.

分析 利用 $N^5<x^5<M^5$，先确定 x 的范围，再利用分析末位数字的方法最后确定 x.

解 通过估计容易得出 $50^5<656356768<60^5$，

于是整数 x 应满足 $50<x<60$.

易知，任何一个整数的五次乘方以后它的末位数字不变，由于题中数字的末位数是 8，所以 $x=58$. 验证后可知 $x=58$ 是正确的.

评注 巧用估算、注意验证.

【练习 4】 一列数 $7^1,7^2,7^3,\cdots,7^{2001}$，其中末位数字是 3 的有________个.

解 由 $4k+3\leqslant2001$（k 为自然数）有 $0\leqslant k\leqslant499$.

而 7^{4k+3}的末位数字与 7^3 的末位数字相同，均为 3.

所以末位数字是 3 的有 500 个.

【例 5】 证明：对于任意自然数 n，和数 $1+2+3+4+\cdots+n$ 的末位数字不可能是 2，4，7，9.

分析 由于 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，对于 $1+2+3+\cdots+n$ 的末位数字的确定，只要分析$\dfrac{n(n+1)}{2}$的末位数字即可.

证明　因为 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

n 的末位数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n+1$ 的末位数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$n(n+1)$的末位数字	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0
$\frac{n(n+1)}{2}$的末位数字	0,5	1,6	3,8	1,6	0,5	0,5	1,6	3,8	1,6	0,5

即 $1+2+3+4+\cdots+n$ 的末位数字只能是 0,1,3,5,6,8,不可能是 2,4,7,9.

评注　善用枚举、逐类分析.

【练习 5】　已知 a 不能被 5 整除,试证:a^4-1 能被 5 整除.

证明:由题意知,a 的个位数字只能是 1,2,3,4,6,7,8,9,

当 a 的个位数字是 1,3,7,9 时,a^4 的个位数字为 1,于是 a^4-1 的个位数字是 0,故 a^4-1 能被 5 整除;

当 a 的个位数字为 2,4,6,8 时,a^4 的个位数字为 6,于是 a^4-1 的个位数字为 5,故 a^4-1 能被 5 整除.

同步检测

1. 能够整除 $3^{11}+5^{13}$ 的最小质数是　(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 5　　D. 7

2. 将 2137^{753} 展开后所得数的个位数字是　(　　)

A. 3　　B. 5　　C. 7　　D. 9

3. $3^{1001}\times7^{1002}\times13^{1003}$ 的个位数字是　(　　)

A. 1　　B. 5　　C. 9　　D. 7

4. 777^{777} 的个位数字是　(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 2　　D. 7

5. $19^{93}+93^{19}$ 的末位数字是　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 6　　D. 5

6. 12345^{12345} 的个位数字是________.

7. 2^{999} 的最后两位数字为________.

8. 设 $7^7=m,7^m=n$,则 7^n 的末 3 位数字为________.

9. a 为自然数,证明 $10\mid(a^{2005}-a^{1949})$.

10. 试求 $N=(3^5+1)(3^{17}+1)(3^{21}+1)$的个位数字.

11. 设 N 是整数,证明 N^5 和 N 的末位数字一定相同.

12. 证明 $111^{111}+112^{112}+113^{113}$能被 10 整除.

4　因式分解

知识精解

一、定义

把一个多项式化成几个整式的积的形式，这种变形叫做把这个多项式因式分解，也叫做把这个多项式分解因式. 因式分解的实质是多项式乘法的逆运算.

二、因式分解的基本方法

提公因式法、运用公式法、分组分解法、十字相乘法. 除此之外，还有换元法、添项拆项法、待定系数法等. 因式分解的方法很多，而且技巧性较强.

三、因式分解的基本思路

(1)先看多项式的各项有没有公因式，若有公因式则先提取公因式；

(2)若各项没有公因式，则看能否运用公式法；

(3)用分组分解法；

(4)若用以上方法不能分解，再考虑换元法、添项拆项法、待定系数法等方法. 因式分解必须进行到每一个因式都不能再分解为止.

触类旁通

【例 1】 分解因式：$x^2-2xy+y^2-9$.

分析 所给的多项式含有四项，考虑分组分解法，前三项可写成$(x-y)^2$，再应用平方差公式进行因式分解.

解 原式$=(x^2-2xy+y^2)-9=(x-y)^2-3^2=(x-y+3)(x-y-3)$.

评注 善于观察、注意特征.

【练习 1】 把 $x^4-4x^3+4x^2-9$ 分解因式.

解 原式$=(x^4-4x^3+4x^2)-9=x^2(x^2-4x+4)-9=x^2(x-2)^2-9=[x(x-2)]^2-3^2=(x^2-2x+3)(x^2-2x-3)=(x^2-2x+3)(x+1)(x-3)$.

【例 2】 分解因式：$(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$.

分析 展开后再因式分解，肯定相当复杂，但若将$(1+y)^2$，$x^4(1-y)^2$ 分别视为一个整体的平方，易使人联想到完全平方式.

解 原式$=(1+y)^2+2x^2(1+y)(1-y)+[x^2(1-y)]^2-2x^2(1+y^2)-2x^2(1-y^2)=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-4x^2=(1+y+x^2-x^2y+2x)(1+y+x^2-x^2y-2x)=[(1+x)^2-y(x^2-1)]\cdot[(x-1)^2-y(x^2-1)]=(x+1)(x-1)(x+1-xy+y)(x-1-xy-y)$.

评注 建立“整体”思想，通过添项，配成完全平方式.