代数与初等函数自学指导

湖南教育

小学教师进修中等师范试用教材
代数与初等函数自学指导
下　　册
辽、吉、黑、皖、湘五省教材协编组编
湖南教育出版社出版　　吉林人民出版社重印
吉林省新华书店发行　　大安县印刷厂印刷
1985年4月第1版第1次印刷
字数：155,000　印张：6.75　印数：1—67,000
统一书号：7284·448　　定价：0.39元

说　明

本书是为了帮助函授学员学好辽宁、吉林、黑龙江、湖南、安徽五省协编小学教师进修中等师范试用教材《代数与初等函数》（下册）而编写的，也可供业余函授、离职进修学员参考。

本书的主要内容有：第九至十二章的学习要求与注意事项，各章的学习指导、练习、习题和复习题的解答，并附有自测题。

本书由郭涤尘同志主编，编者有傅世球（第九章）、郭涤尘（第九章）、刘齐平（第十章）、李锋（第十一章）、赵蔡明（第十二章）。由五省小学教师进修中师教材编审会议审定。

由于编写人员的水平有限，加之编写时间短促，缺点与错误在所难免，敬希读者批评指正。

辽宁、吉林、黑龙江、湖南、安徽五省
小学教师进修中师教材协编组

一九八四年八月

第九章　数列与数学归纳法……………………………………（1）

一　数列

9.1数列（2）　9.2等差数列（6）　习题二十六解答（11）　9.3等比数列（18）　9.4等差中项与等比中项（23）　9.5数列的极限（26）　习题二十七解答（30）

二　数学归纳法

9.6数学归纳法（39）　9.7数学归纳法的应用举例（45）　习题二十八解答（47）　复习题九解答（52）

第十章　排列、组合与二项式定理………………………………（60）

一　基本原理

10.1两个基本原理（61）　习题二十九解答（64）

二　排列

10.2排列的定义（65）　10.3排列数公式（66）　10.4排列应用题（69）　习题三十解答（71）

三　组合

10.5组合的定义（72）　10.6组合数公式（73）　10.7组合数的两个性质（76）　10.8组合应用题（78）　习题三十一解答（84）

*四　二项式定理

10.9二项式定理（89）　10.10二项展开式的性质（92）　习题三十二解答（94）　复习题十解答（98）

第十一章　概率………………………………………………（110）

一　随机事件、等可能性事件的概率

11.1 随机事件的概率（112）　11.2 等可能性事件的概率（116）　习题三十三解答（124）

二　概率的加法运算和乘法运算

11.3互斥事件有一个发生的概率（130）　11.4相互独立事件同时发生的概率（135）　习题三十四解答（139）

三　独立重复试验

11.5 独立重复试验（144）　习题三十五解答（146）　复习题十一解答（148）

第十二章　统计初步 ……………………………………（158）

一　数据的收集

12.1总体和样本（159）　12.2几种常用的抽样方法（162）　习题三十六解答（164）

二　数据的整理

12.3统计表（165）　12.4统计图（168）　12.5频数分布（173）　12.6频率分布（178）　12.7 累计频率及其分布（183）　习题三十七解答（187）

三　几个重要特征数

12.8平均数（192）　习题三十八解答（196）　12.9 中位数（198）　12.10众数（200）　12.11极差（201）　12.12方差（202）　12.13方差的简化计算（204）　习题三十九解答（205）

四　相关

12.14相关（205）　复习题十二解答（206）

第九章　数列与数学归纳法

要求

1．理解数列的概念，对于存在通项公式的简单数列，会写出它的通项公式，反之，已知通项公式，能求出相应的数列。

2．理解等差数列和等差中项的概念，掌握等差数列的通项公式，并能解答有关问题。

3．掌握等差数列前几项和的两个公式及推导过程，了解这两个公式的区别和联系。

4．理解等比数列和等比中项的概念，掌握等比数列的通项公式，并能解答有关问题。

5．掌握等比数列前几项和的两个公式及推导过程，了解这两个公式的区别与联系，能解答有关的问题。

6．理解极限概念及无穷递缩等比数列的求和公式，掌握化循环小数为分数的方法。

7．理解数学归纳法的实质，掌握数学归纳法的应用。

8．课时分配：

内　容	函授	业余面授	离职进修
一、数　　列	2	1	2
二、等差数列	4	3	3
三、等比数列	6	4	4

内　容	函授	业余面授	离职进修
四、数列的极限	4	2	2
五、数学归纳法	8	6	7
小结复习	4	2	3
合　　计	28	18	21

注意事项：

1．为了顺利掌握本章的内容，必须复习一元一次、一元二次方程的解法，对数运算等代数、几何和三角方面的知识．

2．本章的重点是数列的概念、等差数列、等比数列的通项公式以及求和的公式．难点是运用这些知识去解决有关的问题和掌握数学归纳法．

3．学习中要加强知识的对比．如等差数列与等比数列的引入，通项公式的归纳，求和公式的推导等，都有许多类似之处，可以对比地学习，以便帮助我们理解所学的内容．

4．数学归纳法是一种证明与自然数 n 有关的数学命题的重要方法．必须理解每一步骤的意义，由模仿开始，熟练地掌握证明方法．

一　数　列

9.1　数　列

学习指导

1．“在一个数列里，每一个确定的位置上都有一个确定的数．”这句话的意思是“数列是按一定次序排列的一列数”，

而“按一定次序”又是指数列的每一项与它的序号之间有一个对应关系。

如数列（1）中，就有一个对应关系：

$$\begin{array}{cccccccc} \text{项} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{序号} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

而通项公式$a_n=n+3$（$n\leqslant 7$）就建立了序号的集合$\{1,2,3,4,5,6,7\}$与数列的集合$\{4,5,6,7,8,9,10\}$之间的函数关系。

一般来说，数列可以看作一个定义域为自然数集N（或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$）的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值。

2．知道了一个有限数列，如何用试探的方法，写出这个有限数列的通项公式呢？

由于数列可视为以自然数为自变量的函数，在给出一个有限数列时，可将自然数集的有限子集从小到大地与有限数列的相应的各项建立对应关系，然后再仔细地观察：既要从左到右地观察数列各项（即函数值）的变化规律，又要观察数列的项与其序号之间的数量关系，才能概括出该数列的通项公式。

如已知某数列的前几项是

$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，如何求出通项公式？

第一步先建立数列与集合$\{1,2,3,4\}$的对应关系：

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{5}. \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1, & 2, & 3, & 4. \end{array}$$

第二步进行全面地，仔细地观察．发现每一项的分子都与序号相等，而分母都等于序号加1．于是得出通项公式

$$a_n=\frac{n}{n+1}.$$

如果一个数列还存在着符号规律，那么，在奇数项为负，偶数项为正的条件下，照上法探索出的通项公式还要乘以$(-1)^n$；在奇数项为正，偶数项为负的条件下，照上法探索出的通项公式还要乘上$(-1)^{n+1}$。

3．如何理解通项公式的含义以及通项公式的用途？

如果一个数列的第n项可以用自然数为自变量的一个解析式给出：$a_n=f(n)$，则这个公式叫做数列的通项公式．有了一个数列的通项公式，就可以把这个数列的任何一项算出来．由此可见，数列的通项公式可以代表该数列中的任何项．此外，通项公式$a_n=f(n)$又只表示第n项，因此，由通项公式可以看出特殊性与一般性，个性与共性，具体性与抽象性之间的对立统一。

通项公式有两方面的应用：已知通项公式可以求出该数列的某一项或者有限项，反之，已知数列的某一项的数值，也可以求其项数．

练习解答

1．(1) 4，8，12，16，20；

(2) -5, 5, -5, 5, -5;

(3) 1, -4, 9, -16, 25;

(4) $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{17}$, $\frac{11}{26}$.

2. (1) $a_n=3n$;　　(2) $a_n=10n$;

(3) $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$;　　(4) $a_n=(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. (1) 2, 4, (6), 8, 10, (12), 14. $a_n=2n$;

(2) 2, 4, (8), 16, 32, (64), 128. $a^n=2^n$

(3) 4, 3, 2, 1, (0), -1, (-2). $a_n=5-n$;

(4) 1, $\sqrt{2}$, ($\sqrt{3}$), 2, $\sqrt{5}$, ($\sqrt{6}$), $\sqrt{7}$. $a_n=\sqrt{n}$

(其中 $n\in N$)

4. (1) 这个数列的第7项是70，第11项是154。

(2) 解：设第 n 项是40，则

$n(n+3)=40$，$n^2+3n-40=0$，

$\therefore$　$n_1=5$，$n_2=-8$（不合），

$\therefore$　40是这个数列的第5项。

同理54是这个数列的第6项，

70是这个数列的第7项。

设第 n 项是77，则

$n(n+3)=77$，$n^2+3n-77=0$，

$$n_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+308}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{317}}{2}.$$

$\because$　$\frac{-3\pm\sqrt{317}}{2}$ 不可能是自然数，

$\therefore$ 7不是这个数列的项.

9.2 等差数列

学习指导

1. 等差数列的通项公式是怎样得来的？这个通项公式有什么用途？

等差数列的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$是用归纳的方法得来的. 要想严格地对它进行证明，只有学完本章时才能进行.

应用这个公式，只有在已知a_1，d，n，a_n这四个数中的任意三个时，才能顺利地求出第四个数来.

比如，求下表中的未知数：

	a_1	d	n	a_n
(1)	7	?	9	39
(2)	31	-7	10	?
(3)	1	5	?	61
(4)	?	4	26	105

解：(1) $\because\quad a_n=a_1+(n-1)d$,

$$\therefore\quad d=\frac{a_n-a_1}{n-1}$$

$$=\frac{39-7}{8}$$

$$=4;$$

(2) $\because\quad a_{10}=31+(10-1)\times(-7)$,

$$=31+9\times(-7)$$

$$=31-63$$

$$=-32;$$

(3) $\because \quad a_n=a_1+(n-1)d,$

$\therefore \quad a_n-a_1=(n-1)d,$

$\therefore \quad n=\dfrac{a_n-a_1}{d}+1$

$$=\frac{61-1}{5}=1$$

$$=12+1$$

$$=13;$$

(4) $a_1=a_n-(n-1)d$

$$=105-(26-1)\times 4$$

$$=105-100$$

$$=5.$$

2．学习例 5，可以提出更为一般的问题：如何在数 a 与 b 之间插入 k 个数，使它们同这两个数组成等差数列。

解决这个问题，关键是求出等差数列的公差．其方法如下：因为$a_n=a_1+(n-1)d$，此处$a_1=a$，$a_n=b$，$n=k+2$，便得到

$$b=a+(k+2-1)d,$$

即 $b=a+(k+1)d,$

$$d=\frac{b-a}{k+1}.$$

已知第一项和公差，就可以写出要插入的 k 个数。

3．对于求等差数列前 n 项的和的两个公式，必须了解它

们的内在联系，将通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$代入第一个求和公式，即可求得第二个求和公式。

在第一个公式$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$中，只要已知公式中四个数S_n，n，a_1和a_n中的任何三个，可以立刻求出第四个数．如果在已知S_n，n，a_1与d中的任何三个，要求出第四个数，那么应用第二个公式比较方便。

在第二个公式$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$中，如果已知项数$n$，末项$a_n$和公差$d$的情况下，我们可以用通项公式的变形

$$a_1=a_n-(n-1)d$$

来代换第二个求和公式$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$中的$a_1$，得到

$$S_n=n\left[a_n-(n-1)d\right]+\frac{n(n-1)}{2}d,$$

即 $S_n=na_n-n(n-1)d+\frac{n(n-1)}{2}d$，

故 $S_n=na_n-\frac{n(n-1)}{2}d$。

4．在有限的等差数列中，与首末两项距离相等的两项之和是一个常数，且等于两外项之和．设a，b，c，…，g…，h，…，i，k，l成等差数列，公差为d，又设g前有p项，h后也有p项，于是$g=a+pd$，另一方面，如果将h看作是一个新的等差数列的首项，则对于这一新数列来说，l将是前有p项之项，故$l=h+pd$，或$h=l-pd$，则$g+h=a+l$．

5．例8可以改成一个集合题：求集合$M=\{m \mid m=9n,$

$n\in N$，且$m<100\}$的元素个数，并求这些元素的和。

初看起来，例8与这个集合题没有什么共同之处，其实，只要将这个集合的特点找出来，“这个集合的元素都是9的倍数（或者说被9整除），并且都是小于100的正整数”。就可以发现它们是一致的。

练习解答

1．(1) 数列3，4，5，6，7，8，9是递增的，有穷的等差数列，公差是1．（√）

(2) 数列1，-1，-3，-5，-7，…，$3-2n$，…，是有穷、递减的等差数列，其公差是-2。（×）

(3) 5，5，5，5，…是有穷的等差数列，其公差是0．（×）

2．答：(1) 等差数列的第5、8、9项分别是-5，-17和-21。

(2) 等差数列的第n项是$4+2n$。

(3) 等差数列的第$n+1$项是$(2n+3)b$。

3．解：(1) ∵ $a_n=a_1+(n-1)d$，

∴ $2=a_1+(4-1)\times(-\frac{1}{2})$，

$a_1=2+\frac{3}{2}=3\frac{1}{2}$。

(2) ∵ $a_n=a_1+(n-1)d$，

∴ $1\frac{1}{2}=4+(6-1)d$，

$$d=\frac{1\frac{1}{2}-4}{5}=-\frac{1}{2}.$$

(3) $\because \quad a_n = a_1 + (n-1)d,$

$\therefore \quad 21 = 3 + (n-1)\times 2,$

$$n = \frac{21-3}{2} + 1 = 9 + 1 = 10.$$

(4) $\because \quad a_n = a_1 + (n-1)d,$

$\therefore \quad 3 = a_1 + (3-1)d,$

$2 = a_1 + (5-1)d,$

解此二元一次方程组得$a_1 = 4$，$d = -\frac{1}{2}$。

4．答：(1) $S_5 = \frac{5\times(25+65)}{2} = 225$；

(2) $S_{25} = 50\times 25 + \frac{25\times(25-1)}{2}\times(-1) = 950$。

5．答：(1) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$；

(2) $S_n = n(n+1)$。

6．解：设此多边形的边数为 n，最长边为a_n。

则
$$\begin{cases} a_n = 2 + (n-1)\times 3, & \cdots① \\ \dfrac{n(2+a_n)}{2} = 442, & \cdots② \end{cases}$$

解得
$$3n^2 + n - 884 = 0,$$

$$(3n+52)(n-17) = 0,$$

$$n_1 = -\frac{52}{3}(\text{不合}),\ n_2 = 17.$$

$$\therefore \quad a_{17} = 2 + (17-1)\times 3 = 2 + 48 = 50.$$

答：这个多边形有17条边，最长的一条边等于50厘米。

7．解：(1) 在正整数集合中，最小的二位数是10，最大的二位数是99，共有$99-10+1=90$个，它们的和

$$S_{90}=\frac{1}{2}(10+99)\times 90=4905.$$

(2) 在二位正整数集合中，最小的3的倍数是12，最大的3的倍数是99。设3的倍数有n个，则

$$99=12+(n-1)\times 3,$$

由此求得$n=30$。

这些3的倍数的和

$$S_{30}=\frac{1}{2}(12+99)\times 30=1665.$$

8．解：$a_4=9$ 即 $a_1+3d=9$，

$a_3+a_8=9$ 即 $a_1+2d+a_1+7d=9$，

得二元一次方程组 $\begin{cases} a_1+3d=9, \\ 2a_1+9d=9. \end{cases}$

解此方程组得$a_1=18$，　$d=-3$。

故　$S_{10}=10\times 18+\dfrac{10\times 9}{2}\times(-3)=45.$

答：这个等差数列前10项的和是45。

习题二十六解答

1．答：(1) $a_n=4n$；　　(2) $a_n=1-(-1)^n$；

(3) $a_n=\dfrac{n+1}{n}$；　(4) $a_n=1-(0.1)^n$。

2．解：(1) $a_9=9\times 11=99$，$a_{31}=31\times 33=1023$；

$a_{49}=49\times 51=2499$。

（2）设$a_n=440$，则$n(n+2)=440$，

即　$n(n+2)=20\times22$，　$\therefore$　$n=20$，

故　440是这个数列的第20项。

3．解：(1)　$a_1=1$，　$a_2=2$，

$$a_3=a_2+a_1=2+1=3,$$

$$a_4=a_3+a_2=3+2=5,$$

$$a_5=a_4+a_3=5+3=8.$$

（2）$b_1=\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{1}{2}$，　　$b_2=\dfrac{a_2}{a_3}=\dfrac{2}{3}$，

$b_3=\dfrac{a_3}{a_4}=\dfrac{3}{5}$，　　$b_4=\dfrac{a_4}{a_5}=\dfrac{5}{8}$。

4．解：(1)　$a_2-a_1=-1-2=-3$，

$$a_3-a_2=-4-(-1)=-3,$$

$$a_4-a_3=-7-(-4)=-3.$$

（2）
$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=[-3(n+1)+5]-[-3n+5]\\&=-3n-3+5+3n-5\\&=-3.\end{aligned}$$

5．解：(1)　由$8d=a_9-a_1=39-7=32$，得$d=4$。

$\therefore$　$a_5=a_1+4d=7+4\times4=23$。

（2）由$6d=a_9-a_3=3-9=-6$，得$d=-1$。

$\therefore$　$a_{12}=a_9+3d=3+3\times(-1)=0$。

6．解：因为这些尺码所组成的数列，从第2项起，每一项与它前项的差都是$\frac{1}{2}$，所以这些尺码成等差数列，其公差是$\frac{1}{2}$。