

# 中学数学中的数学史

汪晓勤 韩祥临 编著

科学出版社



上海市重点学科建设项目资助课题

全国教育科学“十五”规划重点课题“文化传统  
与数学教育现代化”(DHA010276)子课题

# 中学数学中的数学史

汪晓勤 韩祥临 编著

G634.6/60

科学出版社

## 内 容 简 介

本书是根据我国“中学数学教育标准”撰写的。书中介绍了与中学数学教材内容相配套的数学史知识,如球体积公式的历史、二项式定理的历史、 $n$ 倍角正、余弦公式的历史、解析几何的诞生、对数的发明、机会游戏与概率等;还从理论上探讨了数学史与数学教育的关系,阐述了数学史在数学教学中的作用及如何将数学史融入数学教育等问题,是师范院校数学系学生、数学史教师和中学数学教师的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

中学数学中的数学史/汪晓勤,韩祥临编著. —北京:  
科学出版社,2002

ISBN 7-03-010318-1

I. 中… II. ①汪…②韩… III. 数学史—中学—  
课外读物 IV. O11-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第018810号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2002年7月第一版 开本:850×1168 1/32

2002年7月第一次印刷 印张:8 7/8

印数:1—8 000 字数:230 000

定价:20.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

## 序

近读汪晓勤、韩祥临二位合著的《中学数学中的数学史》，触及了数学史和数学教育的关系。环顾国内外的形势，感慨良多。

国际上有所谓 HPM 小组，全称是 International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics（数学史与数学教育国际研究组），成立于 1972 年。研究组每隔几年举行国际会议，工作卓有成效。作为国际数学教育委员会（ICMI）的附属组织，曾受命于 1998 年 4 月在法国马赛组织过一次“数学史与数学教育”的专题研究会议（ICMI-Study Conference）。我有幸参加了那次会议。会后出版了一本极有价值的会议录《数学教育中的数学史》（本书多有引用），编者是福弗尔（John Fauvel）和冯马南（Jan van Maanen）。他们两位在这片土地上长期耕耘，收获丰硕，赢得了同行的齐声赞誉。不幸福弗尔于 2000 年遽然辞世，令人不胜哀悼。

作为国际数学史研究的重要组成部分，中国应当积极参与这些国际活动。据我所知，香港的萧文强、台湾的洪万生两位在 HPM 小组相当活跃，遗憾的是大陆几乎没有人参与其事，我到马赛开会竟成了惟一的例外。

我国数学史界的前辈李俨、钱宝琮、严敦杰诸先生对数学史和数学教育的关系十分重视，专为中学教师写的讲义和书相当不少。20 世纪 50 年代，勾股定理、杨辉三角、祖暅原理等名称不胫而走，直接影响到数学教育。近些年来，由于各地的师范大学有数学史的选修课，北大、清华也相继开出了很受欢迎的数学史课程，数学史和数学教育的关系再次升温。可以预料，在 21 世纪的未来岁月，为数学教育服务的数学史工作，必将跃上新的台

阶。走出国门，参与 HPM 小组的活动，也将是题中应有之义。

这里有一个认识问题：为数学教育而写的数学史是否缺乏“学术性”？我想，这也许如同美声唱法和通俗唱法一样，在艺术上应该是各有千秋，却并无高低之分。版本考据，考古训诂，资料发掘，分析论述，自然是高雅的学术研究。但是，数学史研究要为广大数学教育工作者所接受和钟爱，以至直接在数学教育事业中发生影响，造福万千学子，那可不是容易的事。在此，我想借引著名数学教育家弗赖登塔尔（H. Freudenthal）的一段话：

没有一种数学思想是按照它被发现时的方式加以发表的。一种技巧发展了、使用了，一个问题得以解决了，就把解决问题的程序颠倒过来。……（于是）火热的发明的发明变成了冰冷的美丽。（马赛会议录：《数学教育中的一些数学史》第 204 页）

数学教育需要把这种冰冷的美丽恢复到火热的思考，也就是“返朴归真”，还数学的本来面目。数学史在这方面的研究恐怕大有可为。请看：《九章算术》的指导思想是“问题解决”，“中国古代数学具有算法的特征”（吴文俊）；“牛顿发明微积分不是从欧氏《几何原本》发展出来的”（席泽宗）；古希腊时期的“欧多克斯（穷竭法）比欧几里得的贡献还要大，韩信点兵用特解的线性组合作为通解是中国的伟大创造”（项武义）。这些论断，都对数学教育有很大的指导作用，发人深省。（本段的引语均为大意，不准确处由笔者负责）

汪晓勤、韩祥临两位编著的这本书具有鲜明的特点。他们不是堆砌史料令人难以卒读，而是力求通俗，具有很强的可读性；同时又不是讲故事，信口评说，而是一板一眼，引文确凿，令人信服。这种工作，确实是很不容易的。

上面说到的马赛会议，企图勾画一门“数学史教育学”的轮廓，把数学史和数学教育之间关系的研究当作一个专门的学问来对待。也就是说，仅仅为中学数学的内容提供史料、作注解，看来是远远不够的。依我管见，数学史介入数学教育，有助于把数



学的“学术形态”转化为“教育形态”，其研究的途径至少有三：

(1) 揭示数学发展的规律，形成正确的数学观。例如如何走出形式主义至上的误区，厘清数学与逻辑的关系，体会数学创新的过程。

(2) 返朴归真，揭示数学发展的过程，并使之适合于今天的课堂教学。如“出入相补”原理及其局限怎样正式进入教材。

(3) 提供真实的历史材料，包括原始问题、原始论据、原始过程，增强真实感，体现数学的人文精神。

最后，想就我国南方的数学史研究谈点感想。自从李俨、钱宝琮先生到北京工作以后，数学史的研究中心移到北京。后学者也多在北方的内蒙古、西安、天津等地。江南的数学史研究几乎由沈康身先生独木支撑着。虽说是沈先生著作等身，毕竟孤掌难鸣，声势不够大。现在汪晓勤、韩祥临二位以及许多青年研究者继续沈先生的事业，在南方建设数学史研究的“根据地”。后起之秀的前途未可限量。我们衷心期待江南的数学史研究家，在新世纪能开辟出一片新天空。

时近 2001 年岁尾，因作者之约，说了一些感想，权作为序。

张奠宙

2001 年 12 月于

华东师范大学数学系

## 作者的话

美国著名数学家、数学史家和数学教育家 M. 克莱因曾经评论当时的过分强调逻辑严密性的中学数学教材，认为它们往往会使学生产生错觉，认为“数学家们几乎理所当然地从定理到定理，数学家能克服任何困难，并且这些课程完全经过锤炼，已成定局。学生被淹没在成串的定理中，特别是当他正开始学习这些课程的时候”。我国传统的数学教材亦然，除了爱国主义教育外，强调的往往是数学的技能，而一个数学概念在历史上是如何产生的？一个数学定理或公式是如何发现的？一个数学分支是如何起源的？教材的编写者以及讲授者似乎很少去关心这些问题。因而，学生对数学概念、定理、公式、思想没有任何“历史感”，它们均是天上掉下来的馅饼——数学似乎就是数学家的事，数学离他们很遥远。在枯燥的逻辑证明、成堆的模仿练习中，学生失去了学习数学的兴趣，教师失去了培养学生创新能力的机会。所幸的是，数学史在数学教育中的作用已经越来越引起数学教育工作者们的重视，从新的中学数学教学大纲、新推广使用的高中数学试验教材中，我们都能得到这样的信息。

作者历年在为本科函授生、教育硕士研究生、研究生课程班学员（大部分来自中学数学教学第一线）授课时，深深感到他们对数学历史的浓厚兴趣以及对一部与中学数学密切相关的实用数学史参考书的迫切需求。许多中学数学教师希望作者早日编写出版这样的参考书，以便用于课堂教学和 HPM 的研究。作者正是受这种需求和愿望的驱使才开始本书的撰写的。韩祥临副教授撰写了 4.1 节、5.1 节和第 7 章，并为 6.2 节补充了部分内容。其余章节由汪晓勤撰写。部分内容已经在近年的中学数学杂志上发表过（汪晓勤 1995, 1996, 1997a~c, 1998a~c, 1999, 2001a,

2001c)。

早在1972年，国际数学教育委员会(ICMI)设立专门研究数学史与数学教学关系的研究小组(简称HPM)，英、美、法、德、意、荷、丹麦等国均有成员，25年间，HPM研究水平日上。丹麦现行的一套中学数学教材已经将数学史作为数学内容本身的一部分。在台湾师大洪万生教授的引领下，台湾数学教育界的HPM研究亦方兴未艾。我国大陆在该领域相对落后，因此希望本书的出版能起到抛砖引玉的作用。

本书原计划包含初、高中数学的历史专题，但教学工作的繁忙使作者无法从容地完成这一计划，只能先写高中部分。在适当的时候，作者将续写初中部分。限于作者的水平，本书一定有许多缺点和错误，恳请读者发现后及时与作者联系。

在本书写作过程中，作者受惠于华东师范大学数学系张奠宙教授、台湾师大洪万生教授所提供的有关文献。张奠宙教授还欣然为本书作序，他的支持和鼓励是作者今后继续致力于数学史研究的动力。华东师范大学数学系沈纯理教授和李士铸教授、浙江师范大学数学系何伯镛教授和张维忠教授关心和支持本书的出版。科学出版社孔国平博士为本书花费了很多心血。郭学萍博士阅读了部分书稿，提出了若干意见。在此一并致谢！

汪晓勤 韩祥临

2001年12月

于华东师范大学



# 目 录

序	(1)
作者的话	(1)
第 1 章 HPM 的理论与实践	(1)
1.1 历史渊源	(1)
1.2 数学史对数学教育的作用	(6)
1.3 如何将数学史融入数学教育	(9)
1.4 数学史应用之例	(10)
第 2 章 代数	(14)
2.1 三次方程求根公式的诞生	(14)
2.2 二项式定理史略	(32)
2.3 自然数幂和公式的历史发展	(45)
2.4 二次幂和十一法	(61)
2.5 复数概念的产生和发展	(67)
2.6 棣莫佛和他的公式	(76)
2.7 帕斯卡与数学归纳法	(81)
2.8 等差数列与等比数列	(86)
2.9 对数的发明	(95)
第 3 章 平面与立体几何	(110)
3.1 卡瓦列利和他的定理	(110)
3.2 球积公式之历程	(116)
3.3 古希腊三大几何难题	(132)
第 4 章 解析几何	(160)
4.1 解析几何的诞生	(160)
4.2 古希腊圆锥曲线史略	(168)
第 5 章 平面三角	(180)

5.1	平面三角学史略 .....	(180)
5.2	$n$ 倍角正、余弦公式史略 .....	(187)
5.3	三角公式的几何证明 .....	(199)
第 6 章	排列、组合与概率 .....	(209)
6.1	排列与组合 .....	(210)
6.2	机会游戏与概率 .....	(215)
第 7 章	微积分 .....	(227)
7.1	微积分的前奏 .....	(229)
7.2	牛顿与微积分 .....	(238)
7.3	莱布尼茨与微积分 .....	(242)
7.4	微积分的严格化 .....	(246)
7.5	函数概念的历史 .....	(249)
参考文献	.....	(262)
人名索引	.....	(267)
(53)	.....	2.2
(74)	.....	2.2
(10)	.....	2.4
(70)	.....	2.2
(67)	.....	2.2
(18)	.....	2.2
(80)	.....	2.2
(20)	.....	2.2
(101)	.....	2.2
(11)	.....	2.1
(11)	.....	2.2
(32)	.....	2.2
(10)	.....	2.2
(10)	.....	2.1
(8)	.....	2.1
(8)	.....	2.1

## 第1章 HPM 的理论与实践

### 1.1 历史渊源

1742年德国数学家海尔布罗纳(J.C.Heilbronner, 1706~1747)出版《世界数学史》,1758年法国数学家蒙蒂克拉(J.E.Montucla, 1725~1799)出版《数学史》,标志着数学史作为一个独立研究领域的出现。而随着该领域研究的深入和普及,数学史对数学教育的意义也被一些西方数学家所认识。早期的两种为数学教育服务的杂志——法国数学家泰尔凯(O.Terquem, 1782~1862)创办于1842年的《新数学年刊》(*Nouvelles Annales de Mathématiques*)、德国数学家格鲁纳(J.A.Grunert, 1797~?)创办于1841年的《数学物理档案》(*Archiv der Mathematik und Physik*)都以大量篇幅刊登数学史、数学文献的文章,即证明了这一点。

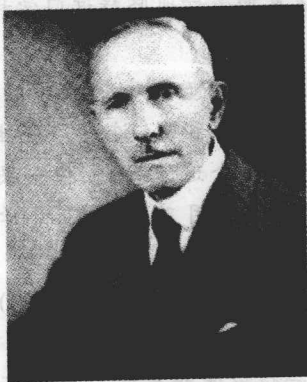
19世纪英国著名数学家德摩根(A.de Morgan, 1806~1871)不仅强调数学史对数学研究的重要性(汪晓勤 2001b),而且也强调数学教学中应遵循的历史次序。如,德摩根认为教师在教代数时,不应该一下子把新符号都解释给学生,而应该让学生像最初发明这些符号的人那样从完全的书写方法到简写的顺序学习符号。学生应先使用 $aa$ 、 $aaa$ ,而不是 $a^2$ 、 $a^3$ ,直到他们不再混淆 $2a$ 与 $a^2$ 、 $3a$ 与 $a^3$ (Howson 1982, 87~92)。德摩根的这种观点与我们今天所说的发生教学法思想是一致的。英国著名数学家格莱歇尔(J.W.L.Glaisher, 1848~1928)在其数学研究生涯的始终,一直爱好和研究数学历史,他认为“在任何著作或高等(数学)教材中都有必要参考原始论文,并且如果可能的话,给出简短的历史评论”,

“如果试图将一门学科和它的历史割裂开来,那么没有哪门学科会比数学的损失更大”。1919年,英国一数学会报告提出:“每一个孩子都应该知道他所学习的这门学科的更为人文或个性的一面”,并建议“数学教室中应悬挂大数学家的肖像,数学教师在课堂上应经常提到这些大数学家的生平与数学研究,并对数学发现对人类文明进步的影响作出解释”。(Fauvel, Maanen 2000, 36)英国数学史学会在1971年创建之初即将“促进数学史在教育中的运用”作为学会目标之一。

在美国,早在19世纪末即有人提倡将数学史作为教学工具引入数学教学之中。美国著名数学史家、历史上第一个数学史教授卡约黎(F. Cajori, 1859~1930)在出版于1893年的《数学史》前言中强调数学史对数学教师的重要价值:

需要历史研究的另一个原因是历史知识对于数学教师的价值。如果用历史回顾和历史轶事点缀枯燥的问题求解和几何证明,学生的学习兴趣就会大大增加。算术课上的学生乐于听巴比伦人和印度人的工作以及印度人“阿拉伯数码”的发明;他们会惊叹:经过了数千年,人们才想到把哥伦布鸡蛋——零引入数字记号;令他们惊奇的是,发明一个他们今天一个月就能学会的记号要花费如此漫长的时间。在学生学习了如何二等分角后,告诉他们用初等几何方法解决表面上看起来十分简单的三等分角问题的许许多多徒劳的尝试,让他们惊讶。当他们知道了如何作一个正方形,使其面积等于给定正方形的两倍后,告诉他们倍立方问题及其神话中的起源——只有造一个立方祭坛两倍于原来的祭坛,太阳神阿波罗才会息怒,以及数学家是如何长期冥思苦想、孜孜以求的。在学生学习了勾股定理殚精竭虑之后,告诉他们有关其发现的传说——毕达哥拉斯对他的发现如此高兴,以致为缪斯女神献上百牲大祭。当数学训练的价值受到怀疑时,引用哲学家柏拉图的学园门口所刻的那句话:“不懂

几何者免进。”学习解析几何的学生应了解点笛卡儿，学习微积分的学生又应熟悉牛顿、莱布尼茨、拉格朗日在创造这门学科过程中所起的作用。在历史的解说中，教师可以让学生明白：数学并不是一门枯燥呆板的学科，而是一门不断进步的生动有趣的学科。(Cajori 1926)。



卡约黎

美国著名数学史家和数学教育家史密斯(D. E. Smith, 1860~1944)更是数学教育中利用数学史的提倡者，实际上，他的两卷本《数学史》(Smith 1923~1925)和一卷本《数学原始文献》(Smith 1929)便是为中学数学教师而写。美国数学教师哈斯勒(J. O. Hassler)认为数学史对数学教育的作用有三：①激发学生学习数学的兴趣；②丰富和活跃数学教师的教学；③使教师和学生了解数学的价值及其与人类文明发展的不可分割的联系(Hassler 1929)。数学教育中提倡运用数学史的传统在美国一直延续下来。1969年，美国数学教师协会出版《数学课堂中的历史话题》(NCTM 1969)，是直接为数学教学服务的文献。

著名数学家和数学史家克莱因(M. Kline, 1908~1992)十分强调数学史对数学教育的重要价值。以下是1970年代亚历山德森(G. L. Alexanderson)针对克莱因的《为什么教授不会教书》一书对他进行采访时的一段对话(Albers, Alexanderson 1985, 171)：

采访者：您在书<sup>①</sup>中有一处说数的字母符号直到1600年左右才开始使用。您在前面的一处又指出，微积分的逻辑基础是在19世纪发展起来的，约在牛顿和莱布尼茨300年后。但我们期望年轻学生喜爱代数，学生开始学微积分时就明白使用 $\epsilon$ 和 $\delta$ 的需要。您认为数学教材的编写者应该更加密切地坚持这门学科历史发展的顺序吗？

克莱因：我相信历史顺序是教学的优秀指南。微积分入门中不该涉及 $\epsilon$ 和 $\delta$ 。这一严密性属于高等微积分。我们无需完完全全追随历史，但如果大数学家在作出某些创造时遇到困难，我们的学生也必会遇到。

采访者：您提倡每一位未来的（数学）教师都修数学史课程吗？

克莱因：每一位中学和大学数学教师都应该知道数学史。有许多理由，但最重要的一条理由或许是：数学史是教学的指南。

数学史研究在意大利有着悠久的历史。早在17世纪，人文主义数学家巴尔蒂(B. Baldi, 1553~1617)就编写过古希腊以来的数学家传记，18世纪柯萨里(P. Cossali, 1748~1815)、19世纪富兰契尼(P. Franchini, 1768~1837)、利布里(G. Libri, 1803~1869)、波恩康帕尼(P. B. Boncompagni, 1821~1894)等都是著名的数学史家。而20世纪著名数学史家洛利亚(G. Loria, 1862~1954)则是关注HPM的第一位学者。洛利亚认为，数学史是联结中学数学和大学数学教学的纽带。洛氏还提出数学史在数学与其他学科关系、发生法教学等方面的作用(Furinghetti 2000)。

20世纪的许多著名数学家和数学教育家也都是数学史的提倡者和实践者。欧拉(L. Euler, 1707~1783)的数学著作是匈牙利

① 指克莱因的《为什么教授不会教书：数学与大学教育的困境》。



著名数学家和数学教育家波利亚(G. Polyá, 1887~1985)的数学教育著述的重要素材(如 Polya 1954)。荷兰数学家和数学教育家弗赖登塔尔(H. Freudenthal, 1905~1990)则同时也是一位数学史家,他认为,数学史应该是数学教师用于数学教学的必备知识(Freudenthal 1981)。他也发表了许多数学史专题论文,如数学归纳法的历史(Freudenthal 1953)、希尔伯特几何基础等。在印度数学家拉玛努金百年诞辰纪念会上,美籍挪威著名数学家、菲尔兹奖和沃尔夫奖获得者塞尔伯格(Atle Selberg)在他的即席演讲中提到:



弗赖登塔尔



波利亚

我曾经跟很多已成为数学家的人谈起他们在中学所学的数学。他们中的大多数并非从中得到特别的鼓舞,而是自学自己偶然碰到的或以某种方式得到的课外读物。我自己就是一例。我认为对中学数学的内容一定要重新斟酌,应增加一些涉及如何发现并令人振奋的内容。我觉得,在中学里,数学教学常跟其他科学的教学不同,后者通常能很好地完成教学任务并给学生以从事发现的振奋之感。(塞尔伯格 1990)。

## 1.2 数学史对数学教育的作用

20 世纪,西方学者对数学史在教学中的作用有很多论述。综合起来说,有以下几点:

(1) 激发学生学习数学的兴趣。

王梓坤院士曾指出:“数学教师的职责之一就在于培养学生对数学的兴趣,这等于给了他们长久钻研数学的动力。优秀的数学教师之所以在学生心中永志不忘,就是由于他点燃了学生心灵中热爱数学的熊熊火焰。”(王梓坤 1998)冯克勤教授认为,一个能激起学生学习兴趣、使学生对数学着迷的教师才是最优秀的教师,而只让学生得高分的教师最多只能算合格的教师(冯克勤 1998)。课堂上介绍数学家的趣闻轶事、数学概念的起源、古今数学方法的简单对比等等,都能起到激发兴趣的作用。

(2) 对学生的人格成长产生启发作用。

蒙蒂克拉在他的《数学史》中讲述了古希腊大数学家阿基米德(Archimedes, 前 287~212)的故事:公元前 212 年,阿基米德的家乡叙拉古被罗马人攻陷。当时,阿基米德仍在专心致志地研究一个几何问题,丝毫不知死神的临近。当一个罗马士兵走近他时,阿基米德让他走开,不要踩坏了他的图形,罗马小卒残忍地用刺刀杀害了他。18~19 世纪法国著名女数学家索菲·热尔曼(Sophie Germain, 1776~1831)年轻时偶然在父亲的书房里发现蒙蒂克拉的书。她阅读了上述故事后,觉得数学肯定是世界上最有魅力的学科,不然阿基米德怎会如此醉心于它?在那以后,她深深爱上了数学,并且在女性在学术上普遍受歧视时走上了数学研究的不归路,在数论和数学物理方面取得杰出成就。

苏格兰女数学家奥勒伦绍(D. K. Ollerenshaw)在 1929 年回忆道(Fauvel, Maanen 2000, 36):



罗马地板镶嵌画:阿基米德之死

我在圣里奥纳兹的一次终生难忘的经历是我的女宿舍管理员送给我的一份启人心智的礼物——腾布尔<sup>①</sup>的可爱的小书《大数学家》。每一个对某学科有兴趣的年轻人都应该看一本讲述在该领域筚路蓝缕的巨人故事的书籍。如果说在我的生命中有那么一个时刻,让我知道我必须专攻数学而别无选择的话,那么这就是我初读这本文笔优美的历史书的时候。

我们不会相信一个数学故事或一本数学家传记一定造就一名数学家,但数学家的奋斗经历对学生人格成长的正面启发作用是无可否认的。

<sup>①</sup> 腾布尔(H. W. Turnbull, 1885~1961), 20世纪英国数学家和数学史家。著有《行列式、矩阵和不变量理论》(*The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants*, 1928)、《大数学家》(*The Great Mathematicians*, 1929)、《方程论》(*Theory of Equations*, 1939)、《牛顿的数学发现》(*The Mathematical Discoveries of Newton*, 1945)等。