教育部審定

初級中學

代數學

下冊

編著者 黃泰 戴維清

校訂者 任誠

下

正中書局印行

中華民國二十四年十二月初版
中華民國二十五年十月廿一版

初中代數

下冊　實價國幣六角
（外埠酌加運費匯費）

編著者　黃泰　戴維清
校訂者　任誠
發行人　吳秉常
南京河北路本局
印刷所　正中書局
南京河北路童家巷口
發行所　正中書局
上海福州路
南京太平路

（ ）

13/5

目 次

第十四章

簡易不等式

116. 數的比較. 從大數減去小數,所得的差是正數.從小數減去大數,所得的差是負數.所以有下面的定義:

若 $a-b$ 是正數,則稱 a 大於 b.

若 $a-b$ 是負數,則稱 a 小於 b.

如 $$5-3=+2 \quad \therefore \quad 5>3$$

$$3-5=-2 \quad \therefore \quad 3<5$$

因從任何正數減去零仍爲正數,故知凡正數,皆大於零.同理,凡負數,皆小於零.我們說 $c>0$, 即表示 c 是正數 $d<0$ 即表示 d 是負數.

上面的定義,又可以這樣說:

若 $a-b>0$, 則 $a>b$.

若 $a-b<0$, 則 $a<b$.

根據這個定義,不但可以比較正數與正數,正數與

負數,也能比較負數與負數.

例一. $6-3=+3,\quad \therefore\quad 6>3$

<u>二正數中,較大者,其絕對值較大.</u>

例二. $6-(-3)=+9,\quad \therefore\quad 6>-3$

<u>凡正數,皆大於負數.</u>

例三. $(-6)-(-3)=-3,\quad \therefore\quad -6<-3$

<u>二負數中,較大者,其絕對值較小.</u>

根據上面三個結論,可以將一切正數,零,及負數,按大小次序,依次排列如下:

$$\cdots\cdots-5<-4<-3<-2<-1<0<1<2<3<4<5\cdots\cdots$$

117. **不等式.** 上面見到的如 $c>0$, $5>3$, $a-b<0$ 等,都叫做<u>不等式</u>,符號 $>$ 或 $<$,叫做不等式的<u>向</u>.

例如 $5>3$, $a>b$, 兩個不等式的向都是 $>$, 叫做<u>同向</u>.

又如 $5>3$, $-5<-3$, 便是<u>異向</u>.

118. **應用.**

例一. 設 x 的值,介乎 -5 與 3 之間,試用不等式表示.

解. 因 $-5<3$ 而 x 又介乎二者之間,則 x 必大於 -5,同時又小於 3, 故應記為 $-5<x<3$.

例二. 若 $|x|<1$ (卽 x 的絕對值小於 1), 問 x 的值當怎樣?

解. 絕對值等於 1 的數, 是 $+1$ 及 -1, 旣然 $|x|<1$, 則 x 的值應小於 $+1$, 而大於 -1, 卽應記爲 $-1<x<1$.

例三. 若 $|x|>3$, 則 x 的值當怎樣?

解. 絕對值是 3 的數, 有 $+3$ 及 -3, 旣然 $|x|>3$, 則 x 的值應比 $+3$ 大或比 -3 小, 應記爲 $x>3$ 或 $x<-3$

注意. 此二式萬不可寫成 $3<x<-3$, 因這樣寫, 表示 $+3<-3$, 便大錯特錯.

習題九十

用不等式表示下列的語言:

1. (a) x 是正數.

   (b) y 是負數.

2. x 的值介乎 a 與 b 之間.

3. x 是小於 5 的正數.

4. x 是大於 -7 的負數.

5. x 的值是介乎 -7 與 -2 之間.

6. x 的值大於 -9 而小於 12.

7. x 的值大於 5 或小於 -3.

說明下列各式的值,並用不等式表示:

8. $|x|<3$　　9. $|x|<a$

10. $|x|>4$　　11. $|x|>b$

用絕對值表示下列不等式:

12. $-4<x<4$

13. $-m<x<m$

14. $x>5$ 或 <-5

15. $x>a$ 或 $<-a$

119. 不等式公理.

例一. 設 $5>-3$, 則 $5+4>-3+4$,

又 $5-4>-3-4$.

這好像天平的兩端,一端重,一端輕,雙方各加一等重砝碼或各移去一等重砝碼,結果原來重的一端,還是重,於是得

公理一. 不等式的兩端,各加一等量,或各減一等量,仍爲一不等式,與原不等式同向.

公式. 若 $a>b$, 則 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$.

根據此公理,可知不等式可以移項,其向不變.

如 $5+3>4$ 兩端各減3, 則應得 $5>4-3$.

所以不等式可舉行移項,其手續與方程式同.

例二. 設 $5>-3, 3>1$, 則 $5+3>-3+1$.

這好像天平的兩端,一端重,一端輕,若再將較重的砝碼加入較重的一端,較輕的砝碼加入較輕的一端,當然原來重的那一端更重了.於是得

公理二. 兩同向的不等式相加,仍得一同向的不等式.

公式. 若 $a>b$, $c>d$, 則 $a+c>b+d$.

例三. 設 $5>-3$, $4<6$, 則 $5-4>-3-6$.

這好像天平的兩端,一端重,一端輕,從較重的一端移去較輕的砝碼,從較輕的一端,反移去較重的砝碼當然原來輕的那一端更輕了.於是得

公理三. 兩異向的不等式相減所得的不等式,與被減的不等式同向.

公式. 若 $a>b$, $c<d$ 則 $a-c>b-d$.

注意. 若兩異向的不等式相加,或兩同向的不等式相減,所得的結果不定.(何故?)

例四. 設 $5>-3$, 則 $5\times(+2)>-3\times(+2)$,

又 $5\div(+2)>-3\div(+2)$.

這好像不平衡的天平,將兩端的砝碼,各換成等倍重的砝碼,或換成等分之一的砝碼,當然原來重的那

端還是重,於是得

公理四. 不等式的兩端,同乘以等正量,或同除以等正量,所得的不等式,與原不等式同向.

公式. 若 $a>b$, m是正數,則

$$ma>mb,\quad \frac{a}{m}>\frac{b}{m}.$$

根據此公理,可知凡用以乘不等式一端的正因子,可移除他端的各項;用以除一端的正因子,可移乘他端的各項.(注意正因子三字)

例如 $2x>4$, 則 $x>2$. (何故?)

又如 $\frac{x}{3}<\frac{1}{3}$, 則 $x<1$. (何故?)

但用以乘不等式一端的因子,若爲負數,則如何?

例五. 設 $5>-3$, 則 $5\times(-1)<(-3)\times(-1)$.

即不等式兩端,同時變號,所得的不等式,與原不等式異向.

同理,知乘數爲任一負數,所得的不等式,都與原不等式異向.

如 $5>-3$, 則 $5\times(-2)<(-3)\times(-2)$; 於是得

公理五. 不等式兩端,若同乘以等負量,或同除以等負量,所得的不等式,與原不等式異向.

例如　　$-3x>6$, 則 $x<-2$.　　(何故?)

又如　　$\frac{x}{-3}<\frac{1}{3}$, 則 $x>-1$.　　(何故?)

$3x>-3$ $x>-1$

公式. 若$a>b$, m是正數,則

$$-ma<-mb,\quad \frac{a}{-m}<\frac{b}{-m}.$$

若$m=1$, 則 $-a<-b$.

習題九十一

1. 不等式移項的手續,與解方程式時,完全相同否?

2. 設 $a<b$, $c<d$, 則 $a+c$, $b+d$ 那一個大?

3. 兩異向的不等式相加,有時能得等式,試舉例證明.

4. 兩異向的不等式相減,所得的不等式,它的向怎樣?

5. 兩邊都是正數的兩同向不等式相乘,仍得同向不等式,試舉例證明.

6. 不等式的移乘作除,移除作乘,與解方程式的情形,完全相同否?

7. $-2x>6$, 則 $x>-3$ 嗎?

8.　$-\frac{x}{2}<5$, 則 $x<10$ 嗎?

9.　$\frac{x}{2}<-5$, 則 $x>-10$ 嗎?

10.　$-x>-2$, 則 $x>2$ 嗎?

11.　$-4>-7$ 的兩端, 各乘以 -3, 則所得新不等式的向怎樣?

120. 不等式解法

例一. 解不等式　$x+5<8$.

解.　原式移項　$x<8-5$

$\therefore\quad x<3$

所謂解不等式者, 就是求式中一文字所可取各數値的界限. 此文字的値, 在此界限以內, 原不等式始能成立.

例二. 解不等式　$4x-5<x-3$.

解.　原式移項　$4x-x<5-3$

卽　$3x<2$

兩端用 3 除, 得　$x<\frac{2}{3}$

例三. 解不等式　$5x-\frac{1}{4}>7+\frac{17x}{3}$.

解. 以 3×4 卽 12 乘兩端, 得

$$60x-3>84+68x$$

移項　$$60x-68x>84+3$$

$$-8x>87$$

兩端同以 -8 除,得　$x<-\frac{87}{8}$　(何故?)

即比 $-\frac{87}{8}$ 小的 x 值,始能適合原不等式.

習題九十二

1. 解不等式的目的是什麼?

2. 解不等式和解方程式的意義有何不同?

解下列各不等式:

3. $3x+2>8$　$3x>6$　$x>2$

4. $3x>10+2x$

5. $2x+1<10-x$

6. $3x+84>8x-36$

7. $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}<x-5$

8. $\frac{5x-2}{3}>6+\frac{4x-3}{5}$

9. $\frac{3}{5}x-\frac{2x-1}{8}<\frac{x}{2}-\frac{7}{10}$

10. $\frac{2x}{3}-\frac{x}{2}<3+\frac{1}{2}-x$

121. 二次不等式解法

例一. 解不等式 $x^2<9$.

解. 原式兩端開平方,取絕對值,得

$$|x|<3 \qquad \text{(何故?)}$$

即 $$-3<x<3$$

例二. 解不等式 $x^2+2x-3>0$.

解. 原式可寫為 $(x+1)^2-1-3>0$

移項 $$(x+1)^2>4$$

開平方取絕對值 $$|x+1|>2 \qquad \text{(何故?)}$$

即 $$x+1>2 \quad 或 \quad x+1<-2$$

即 $$x>1 \quad 或 \quad x<-3$$

例三. 解不等式 $-x^2+2x>0$.

解. 原式兩端變號 $x^2-2x<0$

兩端各加1 $$(x-1)^2<1$$

$$\therefore \ |x-1|<1 \qquad \text{(何故?)}$$

即 $$-1<(x-1)<1$$

即 $$0<x<2$$

習題九十三

1. 設 $x^2<25$, 則 x 值的界限,只有 $x<5$ 嗎?假定 x 值

是 -4 的時候,這不等式成立否?另外還有什麼界限?

2. 設 $x^2>25$, 則 x 值的界限,只有 $x>5$ 嗎?假定 x 值是 -6 的時候,這不等式也能成立否?另外還有什麼界限?

解下列各題的二次不等式:

3. $x^2<81$　　4. $x^2-21<100$

5. $x^2>64$　　6. $x^2+4x+4>49$

7. $4x^2+4x-15<0$　　8. $-9x^2+6x<0$

復習題十二

1. 用不等式表明 x 是任意正數.

2. 若 a 不等於 b, 用不等式表明 a, b 的關係.

3. 用不等式表示 x 的值是大於 -12 的負數.

4. 用絕對值表示不等式 $-6<x<6$.

5. 用絕對值表示不等式 $x>8$ 或 <-8.

6. -2 和 -117 二數的值那個大?

7. 解 $2x^2+12x+18<8$.

8. 解 $\dfrac{4x^2+8x+4}{3}>3$.

第十五章

開平方及二次根式

122 多項式開平方. 單項式開平方,上册已經講過,就是取係數的平方根爲係數,再連續寫出原式中諸文字,令各文字的指數,等於原有指數的一半.現在講多項式開平方:

因 $$[\pm(a+b)]^2=a^2+2ab+b^2,$$

故 $a^2+2ab+b^2$ 的平方根是 $\pm(a+b)$.

又因 $$a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b,$$

所以平方根的第一項 a,就是 a^2 的平方根,第二項 b,便是用 $2a$ 除 $2ab$ 所得的商.開方的演草如下:

$$\begin{array}{lll} & a^2+2ab+b^2 & \underline{|\,a+b} \\ & \underline{a^2} & \\ \text{試除數}\ 2a & \quad |\ 2ab+b^2 & \\ \text{全除數}\ 2a+b & \quad |\ \underline{2ab+b^2}=(2a+b)b & \end{array}$$

故求得平方根爲 $\pm(a+b)$. $+(a+b)$ 稱爲原式的主根.以後本書凡稱平方根,都指主根而言.

任何完全平方的多項式,都可推廣此法,以求其平方根.如 $(a+b+c)^2$ 可寫成

$$(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c$$

求其平方根如下:

$$\begin{array}{l|l|l}
 & a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 & \underline{a+b+c} \\
 & \underline{a^2} & \\
\text{第一試除數 } 2a & 2ab+b^2 & \\
\text{第一全除數 } 2a+b & \underline{2ab+b^2}=(2a+b)b & \\
\text{第二試除數 } 2(a+b) & 2ac+2bc+c^2 & \\
\text{第二全除數 } [2(a+b)+c] & \underline{2ac+2bc+c^2}=(2a+2b+c)c &
\end{array}$$

故求得平方根爲 $a+b+c$.

若 x 的多項式開平方,應先按 x 的降冪排列,再按上法依次求平方根的各項.

例. 求 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 的平方根.

解.

$$\begin{array}{l|l|l}
 & 4x^4-4x^3+13x^2-6x+9 & \underline{2x^2-x+3} \\
 & \underline{4x^4} & \\
2a=4x^2 & -4x^3+13x^2 & \\
2a+b=4x^2-x & \underline{-4x^3+\quad x^2}=(2a+b)b & \\
2(a+b)=4x^2-2x & 12x^2-6x+9 & \\
2(a+b)+c=4x^2-2x+3 & \underline{12x^2-6x+9}=[2(a+b)+c]c. &
\end{array}$$

得平方根 $2x^2-x+3$.

法則. 先將多項式的各項,按某文字的降冪排列取第一項的平方根,爲根的第一項;從多項式減去此項的平方.

二倍求出的根,作第一試除數,以除餘式的第一項,所得的商,就是根的第二項.

取第一試除數及此商的和作全除數,以全數乘根的第二項,從餘式減去.

若仍有餘式,再二倍已求出的根(兩項)為試除數,以其第一項除餘式的第一項,得商為根的第三項;繼續寫出全除數,按前法進行,至無餘數為止,或求到平方根所需的項數為止.

習題九十四

求下列各式的平方根:

1. $4x^4-12x^3+13x^2-6x+1$

2. $x^6-4x^5+10x^4-12x^3+9x^2$

3. $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc$

4. $4a^2b^2-6b^2c^2-12a^2c^2+4a^4+b^4+9c^4$

5. $a^6-4a^5b+8a^4b^2-10a^3b^3+8a^2b^4-4ab^5+b^6$

6. $25x^4-30x^3y+49x^2y^2-24xy^3+16y^4$

7. $4-\dfrac{4c^2}{5}+\dfrac{c^4}{25}$

8. $x^4-4x^3+5x^2-2x+\dfrac{1}{4}$