FOCUS 聚焦图书

文登数学系列

全国硕士研究生入学统一考试

2006 数学二

模拟考场15套

文登数学团队

陈文灯
黄先开
曹显兵
施明存
殷先军

技巧训练+全真模拟=高分的保证
紧扣大纲，名师汇编
题型汇萃，解析到位

世界图书出版公司

FOCUS 聚焦图书

文登数学系列

全国硕士研究生入学统一考试

2006 数学二 模拟考场15套

文登数学团队

陈文灯

黄先开

曹显兵

施明存

殷先军

000003489581

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

2006版数学模拟考场.2/陈文灯等编著.—2版.—北京:世界图书出版公司北京公司,2005.7

ISBN 7-5062-6065-4

Ⅰ.2.… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第070936号

数学二·模拟考场15套

编　　著:陈文灯　黄先开　曹显兵　施明存　殷先军

责任编辑:李根宾

装帧设计:郑子玥

出　　版:世界图书出版公司北京公司

发　　行:世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街137号　邮编:100010　电话:010-88861708)

销　　售:各地新华书店

印　　刷:北京荣玉印刷有限公司

开　　本:787×1092毫米　1/16

印　　张:13.875

字　　数:328千字

版　　次:2005年7月第2版　2005年7月第1次印刷

ISBN 7-5062-6065-4/G·147　　定价:15.80元

服务热线:010-88861708

前　言

“得数学者得天下”，随着大家对数学重要性的理解逐步深入，考研数学也突显出信息量大、题量多、综合性强、难度大等特点。面对这种形势如何合理安排时间，发挥自己的潜能，高效地进行复习，是每个考研学子必须很好解决的问题。因此，我们建议同学们这样复习：

★　牢记重要的概念、定理和公式。因为这样做可以使你应试时节省“追忆”、“推演”的时间，同时可使你少犯混淆定理、公式的错误。

★　掌握一些题型的快速解法，提高解题速度。

★　掌握重要的变量替换、辅助函数的作法技巧，重要题型的解题思路和方法。这可使你应试时很快找到解题的突破口和切入点。

“学而不思则罔，思而不学则怠”，本书旨在将《数学复习指南》中的理论概念转化为训练概念，进而转化为条理清晰的技巧训练与模拟演练概念。为此，我们通过对历年考研真题的深入研究和本人多年的辅导经验总结，精编了这15套难度与真题相当、技巧性较强、基本概念较丰富的多种题型的模拟训练试题。由于各种考研辅导书中选了大量的真题作为例题讲解，所以只有通过模拟试题的训练，才能更真实地检验自己的复习效果，真正起到查缺补漏的作用。

本书中每套试卷完全根据2006年全国硕士研究生入学统一考试样卷比例编写，对每套模拟试卷中的每道题给出了详尽的解析，包括**解题切入点提示、答案详解、知识点的链接及对解题技巧的评注**。

另外，对每套试卷，请读者严格掌握在3个小时内独立完成，然后再看答案解析中的解题过程。通过与答案对照，看看自己在哪些方面还存在不足，及时突破提高。

由于增添了新的思路、新的题型，难免有欠缺或错误的地方，请考研学子和数学同仁批评指正。

陈文灯　陈文灯印

2005年6月

目录

模拟考场（一）

考生注意：(1) 本试卷共23大题，满分150分.

(2) 根据国家标准，试卷中的正切函数，余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 tan$x$、cot$x$、arctan$x$ 和 arccot$x$ 表示.

得分	评卷人

一、填空题（本题共6小题，每小题4分，满分24分. 把答案填在题中横线上）

(1) 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{(n+1)^b-n^b}=2006$，则常数 $a=$ ________，$b=$ ________.

(2) 设曲线 $x=\int_1^t\dfrac{\cos u}{u}du$，$y=\int_1^t\dfrac{\sin u}{u}du$，则自原点到此曲线右边第一条垂直于 x 轴的切线之间的弧长为 ________.

(3) 设 $y_1=e^x-e^{-x}\sin 2x$，$y_2=e^{-x}\cos 2x+e^x$ 是某二阶常系数非齐次线性方程的两个解，则该方程是 ________.

(4) 设 $z=f(x,y)$ 由方程 $F(x-z,2x+y^2,3x-y+2z)=0$ 所确定，F 有一阶偏导数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(5) 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. λ_1,λ_2 所对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,a,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a,a+1,1)^T$，则 λ_3 所对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=$ ________.

(6) 已知 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为四阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-1$，则行列式 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}^* & 0\\ 0 & 2\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=$ ________.

得分	评卷人

二、选择题（本题共8小题，每小题4分，满分32分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 设函数 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的单调增加的奇函数，

$F(x)=\int_0^x(2t-x)F(x-t)dt$，则 $F(x)$ 是

(A) 单调增加的非奇非偶函数. (B) 单调减少的非奇非偶函数.

(C) 单调增加的奇函数. (D) 单调减少的奇函数. 【 】

(8) 设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则在下列条件中使 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$

成立的是

(A) $x_1 < x_2,\ y_1 < y_2$.　　(B) $x_1 < x_2,\ y_1 > y_2$.

(C) $x_1 > x_2,\ y_1 < y_2$.　　(D) $x_1 > x_2,\ y_1 > y_2$.　【　】

(9) 设$f(x,y)$为连续函数,则使$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy = 4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$成立的充分条件是

(A) $f(-x,-y)=f(x,y)$.

(B) $f(-x,-y)=-f(x,y)$.

(C) $f(-x,y)=f(x,-y)=-f(x,y)$.

(D) $f(-x,y)=f(x,-y)=f(x,y)$.　【　】

(10) 设函数$f(x)$在$x=x_0$的某邻域内连续,在$x=x_0$处可导,则函数$f(x)|f(x)|$在$x=x_0$处

(A) 可导,且导数为$2f(x_0)f'(x_0)$.

(B) 可导,且导数为$2f(x_0)|f'(x_0)|$.

(C) 可导,且导数为$2|f(x_0)|f'(x_0)$.

(D) 不可导.　【　】

(11) 若$\dfrac{x^2+ax+b}{(1+x)^2(1+x^2)}$的原函数$f(x)$的表达式中不包含对数函数,则常数$a,b$的取值为

(A) $a=1$,b任意.　　(B) a任意,$b=2$.

(C) a任意,$b=1$.　　(D) $a=0,b=2$.　【　】

(12) 方程$2^x=1+x^2$实根的个数是

(A) 一个.　(B) 二个.　(C) 三个.　(D) 四个.　【　】

(13) 已知$f(x)$在$x=0$的某邻域内二阶连续可导,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-f(x)}-1}{\int_0^x \ln\cos(x-t)\,dt}=-1$

(A) $x=0$为$f(x)$的极小值点.

(B) $x=0$为$f(x)$的极大值点.

(C) $(0,f(0))$为曲线$f(x)$的拐点.

(D) $x=0$不是$f(x)$的极值点,$(0,f(0))$也非曲线$y=f(x)$的拐点.　【　】

(14) 设n阶方阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$,记向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,Ⅲ:$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$. 如果向量组Ⅲ线性相关,则

(A) 向量组Ⅰ线性相关.

(B) 向量组Ⅱ线性相关.

(C) 向量组Ⅰ与Ⅱ都线性相关.

(D) 向量组Ⅰ与Ⅱ至少有一个线性相关.　【　】

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤).

得分	评卷人

(15)(本题满分 10 分)

设$f(x)$是可导的偶函数,它在$x=0$的某邻域内满足关系式$f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2)$,求曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程.

得分	评卷人

(16)(本题满分 12 分)

设$g(x)$在$x=0$的某邻域内连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-1}{x}=a$,

已知$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^1 g(x^2t)\,dt-1}{x^2}, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{a+b\cos x}{x^2}, & x<0\end{cases}$ 在$x=0$处连续,求a、b的值.

得分	评卷人

(17)(本题满分 9 分)

设$f'(x) = \arcsin(x-1)^2$及$f(0) = 0$,求$\int_0^1 f(x)\,dx$.

得分	评卷人

(18)(本题满分 12 分)

设一底半径为r,高为h的圆锥形容器被隔成左右对称不相连通的两部分,两部分都盛满水,水的比重为ρ. 若把右半部分的水抽出一部分,使容器的中间隔板的左边所受的压力F_1为右边所受的压力F_2的 8 倍,求抽掉右边那部分水克服重力所作的功.

得分	评卷人

(19)(**本题满分 9 分**)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,且 $f(1)=0,\int_0^1 xf'(x)dx=1$.

证明:至少存在 $\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=2$.

得分	评卷人

(20)(**本题满分 12 分**)

用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$,并求其满足 $y\big|_{x=0}=1,y'\big|_{x=0}=2$ 的特解.

得分	评卷人

(21)(本题满分 10 分)

设 f 为连续函数,求证:$\iint\limits_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-A}^{A}f(t)(A-|t|)\,\mathrm{d}t$,

其中 D 为:$|x|\leqslant\dfrac{A}{2},|y|\leqslant\dfrac{A}{2}$($A$ 为正常数).

得分	评卷人

(22)(本题满分 10 分)

已知 2 维非零向量 $\boldsymbol{x}$ 不是 2 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明:$\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 线性无关.

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-6\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值并讨论 $\boldsymbol{A}$ 可否相似对角化.

得分	评卷人

(23)(**本题满分 10 分**)

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\alpha}_n]$ 的前 $n-1$ 个列向量线性相关,后 $n-1$ 个列向量线性无关,$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$,证明

(1) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 必有无穷多解;

(2) 若 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的任一解,则 $k_n=1$.

模拟考场(二)

考生注意:(1)本试卷共23大题,满分150分.

(2)根据国家标准,试卷中的正切函数,余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1)函数 $y=f(x)$ 在点(1,0)处有 $\Delta y=\Delta x+o(\Delta x)$,则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{e^x}f(t)dt}{\ln(1+x^2)}=$ ______.

(2)设函数 f,g 均可微,$z=f(xy,\ln x+g(xy))$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______.

(3)设 $f'(\ln x)=1+x$,则 $\int_0^{\frac{1}{2}}f'(2x)\mathrm{d}x=$ ______.

(4)已知当 $x\to 0$ 时,$x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t$ 与 Ax^k 是等价无穷小,则 $A=$ ______,$k=$ ______.

(5)设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)$,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$,且有 $\boldsymbol{A}^3+p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{E}=0$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵,则微分方程 $y'''+py'+qy=0$ 的通解为______.

(6)设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$,其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 均为3维列向量.且 $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$,则行列式 $|[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}+3\boldsymbol{\gamma}]|=$ ______.

得分	评卷人

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7)设函数 $f(x)$ 有连续导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=1$,则当 $f(0)=0$ 时,

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.　　(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.　　(D) 不能判定 $f(0)$ 是否为 $f(x)$ 的极值.

【　】

(8)设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上以 T 为周期的连续函数,则下列函数中也是以 T 为周期的是

(A) $\int_0^x f(t)dt$.　　(B) $\int_{-x}^0 f(t)dt$.

(C) $\int_0^x f(t)dt - \int_{-x}^0 f(t)dt$.　　(D) $\int_0^x f(t)dt + \int_{-x}^0 f(t)dt$　　【　】

(9) 设 $y(x)$ 是微分方程 $y'' + (x-1)y' + x^2 y = e^x$ 的满足 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的解. 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}$

(A) 不存在.　　(B) 等于 0.

(C) 等于 1.　　(D) 等于 2.　　【　】

(10) 由 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} (0 < t < \dfrac{\pi}{2})$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的图形在 $(0,1)$ 内

(A) 单调下降且向下凹.　　(B) 单调下降且向上凹.

(C) 单调上升且向下凹.　　(D) 单调上升且向上凹.　　【　】

(11) 设 $f(x) = \begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处

(A) 不连续.　　(B) 连续但不可导.

(C) 可导但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续.　　(D) 可导且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.　　【　】

(12) 当 $x\to 0$ 时, $\int_0^x (t-\sin t)\,dt$ 是 $\dfrac{1}{2}x^3$ 的

(A) 高阶无穷小.　　(B) 低阶无穷小.

(C) 同阶无穷小但不等价.　　(D) 等价无穷小.　　【　】

(13) 设 $D: x^2+y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0$; $D_1: x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$,则

(A) $\iint\limits_D xy\,dxdy = 2\iint\limits_{D_1} xy\,dxdy$.

(B) $\iint\limits_D y\,dxdy = 2\iint\limits_{D_1} x\,dxdy$.

(C) $\iint\limits_D x\,dxdy = 2\iint\limits_{D_1} y\,dxdy$.

(D) $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = 2\iint\limits_{D_1} (x+y)\,dxdy$.　　【　】

(14) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四维非零列向量组, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,已知方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $k(1,0,2,0)^T$,则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$.　　【　】

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤).

得分	评卷人

(15)(本题满分 12 分)

设函数$f(x,y)$可微,且$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right)^n=e^{\cot y}$, $f(0,\frac{\pi}{2})=1$,求$f(x,y)$.

得分	评卷人

(16)(本题满分 10 分)

设$f(x)$在$[0,+\infty]$上连续,且$\int_0^1 f(x)dx<-\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

证明:至少$\exists\xi\in(0,+\infty)$,使$f(\xi)+\xi=0$.

得分	评卷人

(17)(**本题满分 11 分**)

设 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$,求 $y^{(n)}(0)$.

得分	评卷人

(18)(**本题满分 8 分**)

设 $f(x)=a|\cos x|+b|\sin x|$ 在 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极小值,并且 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f(x)]^2\mathrm{d}x=2$. 试求常数 a 和 b.

得分	评卷人

(19)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$,$\varphi(x)$在点x_0处可微,证明曲线$y=f(x)$和$y=\varphi(x)$在点$P(x_0,y_0)$相交且相切的充分必要条件是:当$x\to x_0$时,$(f(x)-\varphi(x))$是$(x-x_0)$的高阶无穷小量.

得分	评卷人

(20)(本题满分 12 分)

洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱,其顶头长、短半轴为b与a,试计算水箱头面的所受的压力(取水的比重为1):

(1)当水装满时;(2)当水刚好为半水箱时.