高等数学

GAODENG SHUXUE

上册

浙江科学技术出版社

高等数学

（上册）

浙江大学应用数学系

《高等数学》编写组编

浙江科学技术出版社

责任编辑 周伟元
封面设计 丁振华

高 等 数 学
（上册）
浙江大学应用数学系
《高等数学》编写组编
*
浙江科学技术出版社出版
浙 江 新 华 印 刷 厂 印 刷
浙 江 省 新 华 书 店 发 行
开本：850×1168 1/32 印张11.75 字数296,000
1985年8月第 1 版
1985年8月第1次印刷
印数：1—14,200

统一书号：7221·76
定 价：2.30 元

内容提要

本书是根据高等院校工科数学教学大纲编写的。全书分上、下册。上册共六章，介绍函数、极限和一元函数微积分的基本知识。下册共九章，介绍矢量代数与空间解析几何、多元函数微积分、场论、无穷级数和傅里叶级数、常微分方程等内容。每章配有复习题和习题，书末附有习题答案。

该书可作为高等院校工科各专业高等数学课程的教材或教学参考书，也可作为业余科技大学、电视大学各专业及其他自学者学习高等数学用书。

前　言

本书是根据高等院校工科数学教学大纲编写的高等数学教材。多年来，经浙江大学工科和部分理科专业及其他一些院校试用，现整理出版。本书力求从工科实际出发，注重基本概念、基本理论和基本方法，重视应用，配有较多典型的例题；并注意内容的前后联系，启发思路，易于教学。为适应科学技术的发展，本书对数值计算方法的有关知识作了适当的介绍。

本书分上、下两册。上册共六章，介绍函数、极限和一元函数微积分学的基本理论和基本知识。下册共九章，介绍矢量代数与空间解析几何、多元函数的微积分学、场论、无穷级数和傅里叶级数、常微分方程等内容。每章配有一定数量的复习题和习题，书末附有习题答案。

全国高等学校工科数学教材编审委员会委员周茂清教授主审本书，并提出了很多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，书中难免存在一些不足之处，希望读者批评指正。

浙江大学应用数学系

《高等数学》编写组

1984年12月

目　　录

第一章　函数……1

第一节　预备知识……1

一　实数与数轴……1

二　区间……2

三　绝对值、邻域、内点……3

第二节　函数概念……5

一　常量与变量……5

二　函数概念……5

三　函数的定义域与函数的记号……9

第三节　复合函数与反函数的概念……15

一　复合函数……15

二　反函数……16

第四节　初等函数……19

一　基本初等函数……19

二　初等函数……22

复习题……24

习题一……25

第二章　极限与连续……31

第一节　数列的极限……31

一　数列……31

二　数列的极限……32

三　收敛数列的性质……37

第二节　函数的极限……40

一　自变量 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限……40

二　自变量 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限……42

第三节　无穷小与无穷大……48
一　无穷小……48
二　无穷大……50
第四节　极限的运算法则……52
一　极限的运算法则……52
二　举例……54
第五节　两个重要的极限……58
一　极限存在的判定定理……58
二　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$的证明……60
三　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ 存在性的证明……61
四　举例……63
第六节　函数的连续性……66
一　连续与间断……66
二　一致连续性概念……70
三　闭区间上连续函数的性质……72
四　反函数的连续性……74
五　初等函数的连续性……75
第七节　无穷小的比较……79
复习题……83
习题二……84
第三章　导数与微分……93
第一节　导数（变化率）的概念……93
一　导数的概念……93
二　几个重要函数的导数……99
三　单方导数……102
四　可导与连续的关系……104
第二节　导数的运算法则……105
一　函数的和（差）、积、商的导数……105
二　复合函数的导数……108
三　反函数的导数……111

第三节　初等函数的导数 ……112
一　几个初等函数的导数公式 ……112
二　双曲线函数的导数 ……116
三　基本导数公式表 ……117
四　隐函数的求导法 ……119
五　两曲线的交角 ……122
第四节　高阶导数 ……123
一　高阶导数的概念 ……123
二　高阶导数的公式 ……128
第五节　微分 ……130
一　微分概念 ……130
二　微分公式 ……132
三　微分的几何意义 ……133
四　近似公式 ……134
五　高阶微分 ……135
第六节　参数式函数的导数 ……136
一　参数式函数的导数 ……136
二　极坐标方程表示的曲线的切线斜率 ……139
复习题 ……141
习题三 ……141
第四章　导数的应用 ……151
第一节　微分学的几个基本定理 ……151
一　费马(Fermat)定理 ……151
二　罗尔(Rolle)定理 ……152
三　拉格朗日(Lagrange)定理 ……153
四　柯西(Cauchy)定理 ……155
第二节　未定式的定值 ……156
一　“$\frac{0}{0}$”型未定式的定值法则 ……156
二　“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式的定值法则 ……159
三　其他类型的未定式 ……162

第三节　泰勒 (Taylor) 定理 ……163
一　泰勒公式 ……163
二　马克劳林 (Maclaurin) 公式 ……166
第四节　函数增减性的判定法 ……169
第五节　函数的极值 ……172
一　函数的极值概念 ……172
二　函数极值的判定法 ……173
三　函数的最大值和最小值 ……178
第六节　曲线的凹向 ……182
一　曲线的凹向 ……182
二　曲线凹向的判定法 ……183
第七节　函数图形的描绘 ……185
一　函数图形的描绘 ……185
二　曲线的渐近线 ……188
第八节　曲率 ……192
一　曲率 ……192
二　曲率圆 ……196
三　渐屈线与渐伸线 ……198
第九节　方程的近似根 ……199
一　图解法 ……200
二　隔根区间 ……201
三　对分法 ……202
四　切线法 ……203
复习题 ……208
习题四 ……209
第五章　不定积分 ……218
第一节　原函数与不定积分概念 ……218
一　原函数与不定积分 ……218
二　基本积分表 ……220
三　不定积分的性质 ……221
第二节　几种基本的积分方法 ……225
一　直接积分法 ……225

二　变量替代法 ……………………………………………………………230
三　分部积分法 ……………………………………………………………235
第三节　有理函数及三角函数的积分举例 ………………………………240
一　有理函数的积分 ………………………………………………………240
二　几种特殊形式的三角函数的积分 ……………………………………246
复习题 ……………………………………………………………………250
习题五 ……………………………………………………………………251
常用积分表 ………………………………………………………………259
第六章　定积分及其应用 ……………………………………………261
第一节　定积分概念 …………………………………………………261
一　定积分的定义 …………………………………………………………261
二　可积函数类 ……………………………………………………………266
第二节　定积分的性质和基本定理 ……………………………………271
一　定积分的基本性质 ……………………………………………………271
二　积分学的基本定理 ……………………………………………………274
第三节　定积分的计算方法 ……………………………………………278
一　变量替代法 ……………………………………………………………278
二　分部积分法 ……………………………………………………………280
第四节　定积分的近似计算法 …………………………………………285
一　矩形法 …………………………………………………………………286
二　梯形法 …………………………………………………………………287
三　抛物线法（辛普生(Simpson)法） ………………………………28[illegible]
第五节　定积分的应用 …………………………………………………292
一　平面图形的面积 ………………………………………………………292
二　旋转体的体积 …………………………………………………………295
三　平面曲线的弧长 ………………………………………………………297
四　变力所作的功 …………………………………………………………304
五　液体的静压力 …………………………………………………………306
六　函数在给定区间上的算术平均值 ……………………………………307
第六节　广义积分 ………………………………………………………308
一　无穷区间上的广义积分 ………………………………………………308
二　无界函数的广义积分 …………………………………………………311

三 广义积分收敛性的判定法 ……………………………………314
四 Γ函数 ……………………………………………………320
复习题 ……………………………………………………323
习题六 ……………………………………………………325
习题答案 ………………………………………………336

第一章　函　数

在自然界中，一切事物由于内部的矛盾性，总是处在不断的运动、变化之中，而且每一事物的运动、变化，都不是孤立的，总是同它周围的其他事物相互联系和相互影响着．函数从数量方面反映自然界的事物运动、变化的相互联系、相互影响的关系．函数是高等数学的研究对象．

有关函数的知识，在中学里已初步介绍过，例如三角函数、指数函数、对数函数等．本章针对高等数学的需要，复习并进一步介绍有关函数的知识．

第一节　预备知识

一、实数与数轴

1．实数　正、负整数，正、负分数和零，统称为有理数．即有理数是形如 p/q 的数，其中 p 与 q 都是整数，且 $q \neq 0$．有理数可表示为有限小数，或无尽的循环小数．随着生产的发展，有理数还满足不了需要，人们发现了无理数，例如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、π 等等都是无理数．无理数的出现使得数的领域扩大，因为在有理数中即使是正整数的根，例如$\sqrt{2}$，也并不存在．就是说，并没有这样的有理数 p/q，其平方能等于 2．若不然，$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$，我们可以假设 p/q 是既约分数，因 $p^2=2q^2$，故 p 为偶数．令 $p=2r$(r 为整数)，于是$q^2=2r^2$．由此推得 q 为偶数，这与$\frac{p}{q}$是既约分数

相矛盾，从而$\sqrt{2}$非有理数．无理数可表示为无尽的不循环小数．无理数与有理数统称实数．在本书中，如无特别声明，凡讲到的数，均指实数．

2．数轴 取定一有向直线，在其上取一点作为原点，并规定一长度单位，这样就构成了一个数轴．每一个实数对应数轴上唯一的一个点，数轴上的每一个点对应唯一的一个实数．即数轴上全体点与全体实数之间，有一一对应关系．以后凡讲到实数，就应联系到数轴上与它对应的一个点；凡讲到数轴上的一个点，就应把它与所对应的实数联系起来．为叙述方便，对两者往往不再加以区别．

二、区间

设a与b为两实数，且$a<b$．满足不等式

$$a<x<b$$

的一切实数x的全体叫做**开区间**，记为(a,b)．它表示数轴上a与b两点之间（不包括点a与b）的一切点的全体，如图1—1(1)，其中a与b处画空心圈，表示该两点不包括在内．

满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的一切实数x的全体叫做**闭区间**，记为$[a,b]$．它表示数轴上a与b两点之间（包括点a与b）的一切点的全体．如图1—1(2),其中a与b处画实心点，表示该两点包括在内．

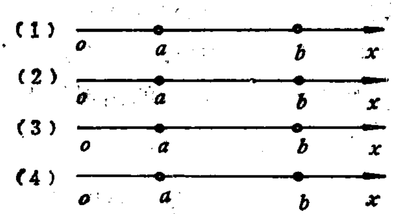


图1—1

“闭”与“开”的区别就在于是否包括端点．包括的，用方括号表示；不包括的，用圆括号表示．

满足$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的一切实数x的全体，叫做半开区

间，分别记为 $[a,b)$、$(a,b]$，数轴上表示如图1—1(3)、(4).

以上所说的区间，都叫有限区间. 此外，还有所谓无限区间. 我们把实数 x 的全体记为 $(-\infty,+\infty)$，或写成 $-\infty<x<+\infty$，它是一个无限区间. 这里 $-\infty$ 与 $+\infty$ 分别读作负无穷，正无穷. 满足不等式 $x>a$、$x\geqslant a$，$x<a$、$x\leqslant a$ 的实数 x 的全体分别记之为 $(a,+\infty)$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,a)$ 和 $(-\infty,a]$，这些都是无限区间. 应注意的是，$+\infty$ 与 $-\infty$ 都不是数，仅是记号.

上面所说的各类区间，可以写为下面的数集形式：

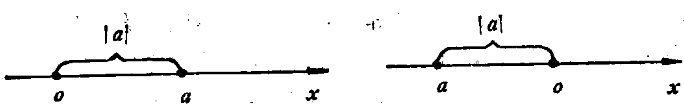
$$(a,b)=\{x|a<x<b\};\ [a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\};$$
$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\};\ [a,b)=\{x|a\leqslant x<b\};$$
$$(a,+\infty)=\{x|a<x\};\ [a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\};$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\};\ (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x|x\text{是实数}\}\overset{\text{记}}{=}R$$

三、绝对值、邻域、内点

1. 绝对值 设 a 为一实数，所谓 a 的绝对值用式子表示，就是

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a>0 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } a=0 \text{ 时};\\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases} \tag{1.1}$$

$|a|$ 的几何意义：表示数轴上点 a 与原点之间的距离，如图1—2.



（1） $a>o$ 时　　　（2） $a<o$ 时

图 1—2

一般，两实数 a 与 b 之差的绝对值

$$|b-a|$$

在几何上表示实轴上 a 与 b 两点间的距离.

2．**绝对值的性质**　设 a, b 为实数，则有下述关于绝对值的性质：

1°　$\big||a|-|b|\big|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$；

2°　$|ab|=|a|\cdot|b|$；

3°　$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$　　　$(b\neq0)$.

3．**邻域**　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$. 满足不等式

$$|x-a|<\delta \tag{1.2}$$

的一切实数 x 的全体，叫做点 a 的 δ 邻域，简称点 a 的邻域. 这里（1.2）式等价于不等式：

$$-\delta<x-a<\delta$$

或

$$a-\delta<x<a+\delta. \tag{1.3}$$

显然，点 a 的 δ 邻域在几何上表示数轴上与点 a 的距离小于 δ 的点的全体，即以点 a 为中心、以 δ 为半径的开区间$(a-\delta, a+\delta)$，如图1—3.

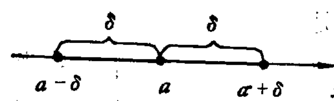


图 1 — 3

4．**点集的内点、外点、边界点**　设E是数轴上的点集，若点 x_0 连同它的某一个邻域内的点都属于E，则称 x_0 是E的**内点**. 当点 x_0 连同它的某一个邻域内的点全不属于E，则称 x_0 是E的**外点**. 如果对于 x_0 的任意邻域，该邻域必定既含E的点，又含不属于E的点，则 x_0 叫做E的**边界点**. E 的边界点的全体，叫做E的**边界**.

当点集E的点都是E的内点时，E叫做开集。当点集E的边

界点都属于E时，E叫做闭集. 开区间(a,b)是开集；闭区间$[a,b]$是闭集.

第二节 函数概念

一、常量与变量

人们在观察、研究某一运动过程时，会遇到许多不同的量. 有的量在所研究的过程中保持一定的数值，这种量叫做**常量**；有的量在过程中可取不同的数值，这种量叫做**变量**. 例如，对于某一地点，物体从不高的空中下落的过程中，物体离地面的距离是变量，而重力加速度g是常量.

必须注意，上述常量与变量的概念，依赖于所考察的过程. 仍以落体为例，如果由高空落下，重力加速度不是常量而是变量.

二、函数概念

一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的. 在物质的运动中，各个变量的变化不是孤立的，而是彼此联系着的. 我们先分析几个实例.

例 1 保险丝的熔断电流和直径之间的关系. 下表是常见的保险丝（铅锡合金，铅75%，锡25%）在不同直径时的熔断电流.

直径D(毫米)	0.508	0.559	0.61	0.71	0.813	0.915	1.22
	1.63	1.83	2.03	2.34	2.65	2.95	3.26
熔断电流	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0	7.0	10.0
I(安)	16.0	19.0	22.0	27.0	32.0	37.0	44.0

上表反映了变量I与变量D的对应关系，对于表中所列的每

一个直径D，就有确定的熔断电流I与它对应．例如，$D=0.61$毫米时，$I=4.0$安．

例 2　一定质量的气体在一定温度下，气体所占的体积与压强的关系．由波义耳定律知道，当温度保持不变时，一定质量的气体的压强P与体积V成反比，即

$$P=\frac{C}{V}\qquad (C\text{是常量}). \tag{2.1}$$

上式说明，当气体的体积V在一定范围$V_0\leqslant V\leqslant V_1$（其中$V_0$、$V_1$是两个确定的正数，分别表示最小体积与最大体积）中每取一个定值时，压强P就有确定的值与它对应．

例 3　设有一克冰，温度为-10℃，将其加热，温度逐渐上升到零度，化成水，再上升到10℃．考虑它在这一过程中，从外部吸收的热量Q．

当加热过程刚开始时，冰的温度为-10℃，假定这时从外部吸收的热量Q为零．由于冰的比热为0.5，所以当温度升到t℃时，吸收的热量是

$$Q=(t+10)\times 0.5=0.5t+5.$$

在冰的温度已达0℃时，开始溶化为水，这时虽然继续从外界吸收热量，但温度并不升高，只有当冰已全部化为水以后，温度才能继续上升．0℃时一克冰溶化为0℃的水所吸收的热（溶解热）为80卡（1卡＝4.1868焦耳），因此，在这一克冰的温度刚升到0℃，还没有化成水时，吸收的热量是5卡，而全部化成水（还是0℃）后，吸收的热量便已变成$80+5=85$卡了．水的比热是1卡/(克·摄氏度)，所以当水的温度上升到t时，又新吸收$t\cdot 1$卡的热，即总共已吸收$t+85$卡的热，于是Q与t的对应关系为

$$Q=\begin{cases}0.5t+5, & \text{当}-10\leqslant t<0;\\ t+85, & \text{当}0<t\leqslant 10.\end{cases} \tag{2.2}$$

这里，我们除去$t=0$的情况，因为在0℃时，既可以全是冰，也可以全是水，还可以是部分化成水，部分还是冰．在各种不同