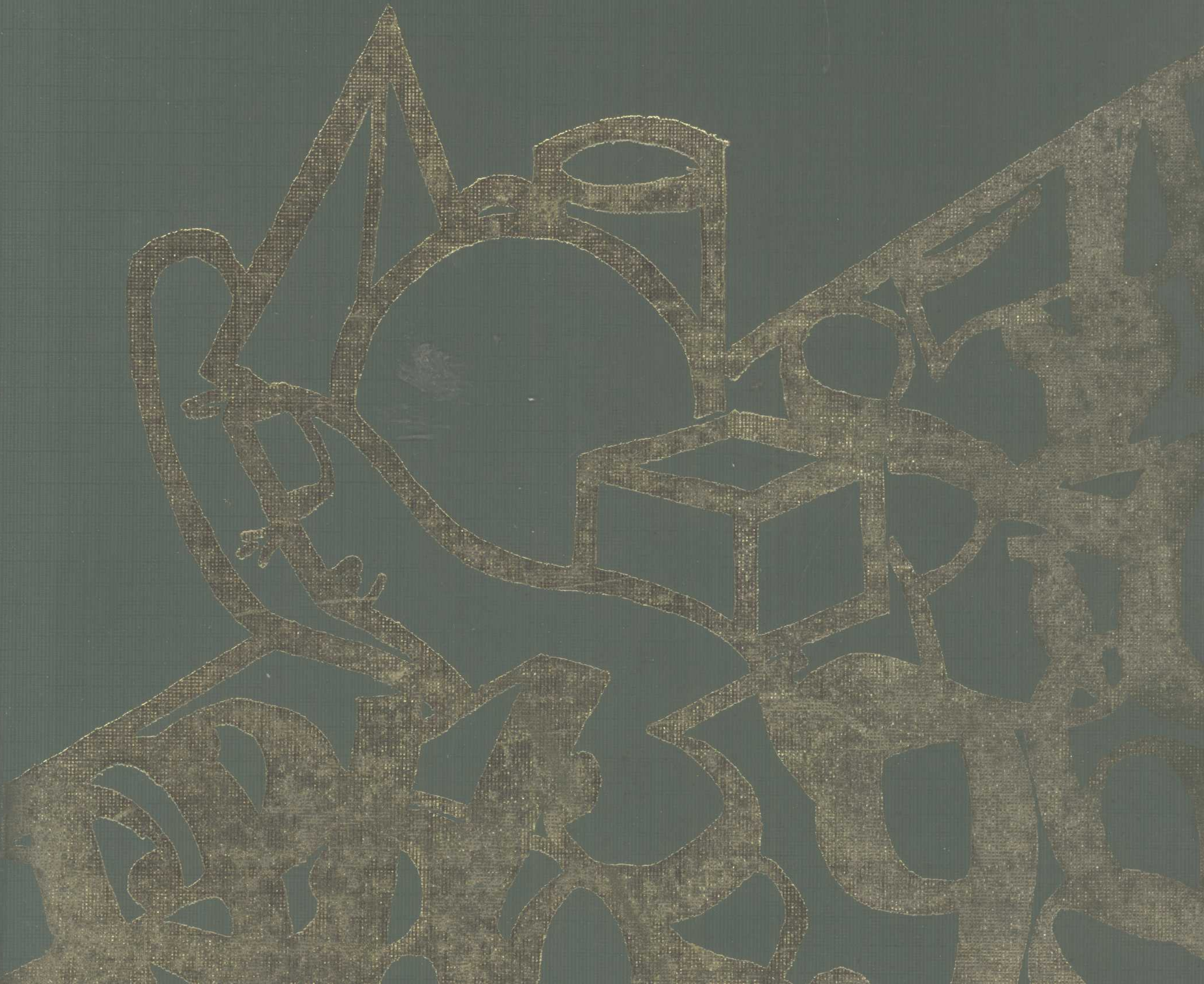
簡明數學百科全書



九章算術是中國古老、最有系統的算書，
我們以之爲名，冀望爲我國數學教育獻力

簡明數學百科全書

出 版 者：九章出版社
學英文化事業有限公司

製作發行：九章出版社
學英文化事業有限公司
台北市羅斯福路四段52巷6號
3946693

印 刷 者：九章打字印刷行
出版日期：中華民國74年元月五版
定　　價：700元（普及版）
郵政劃撥：0578690-5
學英文化事業有限公司

簡明 數學百科全書

The VNR CONCISE ENCYCLOPEDIA of MATHEMATICS

九章出版社出版

簡明 數學百科全書

The VNR CONCISE ENCYCLOPEDIA of MATHEMATICS

譯者：

洪萬生　（任教於師大數學系）
林國棟　（任教於師大數學系）
楊康景松　（任教於景美女高）
林炎全　（任教於台中二中）
甯自強　（師大數研所）
李慶俊　（清大計算機管理決策研究所）
李慧英　（任教於台北萬華國中）
陳創義　（任教於師大數學系）
廖賀田　（台大數研所）
陳榮治　（任教於南投竹山高中）
許清土　（任教於金門金城國中）
蔣永延　（師大數研所）

編輯：孫文先・陳碧眞
校訂　洪萬生・林國棟・楊康景松

九章出版社出版

本書譯自 VAN NOSTRAND REINHOLD COMANY 出版之

THE VNR CONCISE ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS

德文原版 1975 年出版（原名：Mathematics at Glance 數學一瞥）

英文初版 1977 年出版

原編者：W.Gellert・H. Küsther・M.Hellwich・H. Kästher.

原作者：

G. Berthold	H. Kästner	Dr. E. Schröder
Prof. O. Beyer	G. Lisske	Dr. L. Stammler
Prof. L. Bittner	Dr. G. Lorenz	A. Steger
Prof. H. Boseck	Dr. G. Maess	Prof. R. Sulanke
Dr. H. G. Bothe	Dr. W. D. Müller	Prof. H. Thiele
Dr. G. Czichowski	Dr. F. Neigenfind	Dr. H. Thiele
J. Dähnn	Prof. F. Nožička	Prof. W. Tutschke
Dr. C. Frischmuth	Dr. S. Oberländer	Dr. H. Vahle
Dr. D. Göhde	Prof. M. Peschel	Dr. L. Wagner
W. Göhler	Dr. G. Pietzsch	Prof. W. Walsch
Prof. L. Görke	Dr. B. Renschuch	Dr. V. Wunsch
Dr. M. Hellwich	Prof. H. Sachs	Dr. G. Wussing
Dr. H. Herre	Prof. H. Salié	Prof. H. Wussing
Prof. M. Herrmann	H. Schlosser	

英文版譯者：

Dr. O. Pretzel	Dr. A. Stefan
Dr. E. J. F. Primrose	Dr. A. M. Tropper
Prof. G. E. H. Reuter	Dr. A. Walker

中文版譯者：

洪 萬 生	孫 文 先	李 慶 俊
楊康景松	李 慧 英	陳 創 義
廖 賀 田	林 國 棟	陳 榮 治
許 清 士	林 炎 全	蔣 永 延
甯 自 强	陳 碧 眞	

☆德文原版銷售量（至 1977 年底止）：七十萬册。

☆英文原版銷售量（至 1977 年底止）：一百萬册。

☆中文版銷售量（至 1980 年 5 月）：6000 册。

☆中文摘譯本（中學數學百科全書）銷售量（至 1980 年 2 月止）：5000 册。

代譯序

第一眼看到這一本書，就衷心地喜愛它；當出版社決定翻印英文版的同時，我們也不揣淺薄地決心把它翻譯成中文。如今中譯本擺在各位眼前，希望您關心它的存在，指出它的錯誤和缺失，使它有機會再版時，能印得更加精美，更符合讀者的需要。

這是一本高水準的「通俗」著作。原著作者群的慧心每能貫注筆尖，娓娓道來，俱見親切感人的力量。無怪乎本書二年內在德國售達700000冊，一年內在美國已售逾1000000冊。執筆中譯的女士、先生當然都不是什麼學者專家，但憑被感動後的一股餘勇下筆，這樣子能顧及譯文的「信」已經是很大的造化了，那裡還敢奢望「達」、「雅」？以如此拙樸的譯筆我們怎還敢不自量力將它中譯呢？主要是認為這是一本很值得推荐的好書，特別是對數學教師來說，簡直就是一本完備齊全的教師手冊，基於促使本書普及的深切願望，及引導國內學者及出版家關切數學教育的理想，我們遂貿然地動手翻譯了。

本書自第23章以後，大都由林國棟和洪萬生負責，楊康景松也支援了很多篇幅。第23章以前，概由幾位熱誠的中學教師及正就讀師大數學系的幾位同學分擔。難能可貴的，譯者群中很多人都是第一次操持譯筆，然而，其認真學習的態度却很令人激賞，更令人敬佩的是本書編輯陳碧真女士在繁忙的教職之餘，貢獻驚人的智慧與毅力，幾乎是不眠不休的工作，才使本書能於短短數個月之中誕生。我們期盼來自讀者的督促和共鳴，使他們的滿腔熱忱發揮更有效的力量，以便能做更實質的貢獻。

如果本書僥倖獲得讀者的讚賞，那麼就應把這份榮耀歸於他們堅持譯到底的毅力；但是，如果本書有什麼錯誤或缺失，那麼無疑地，譯者中較年長的幾位應該負擔全部的責任，因為後者參與了最後的定稿工作。

楊康景松
林國棟
洪萬生
1978.11.17

目　　録

Ⅲ．數學專題

圖片索引

基　7.佩西歐里

24. 16世紀的數學家

雷考德所著“代數學”一書的書名頁

賴斯所著“Rechnung auff der Linihen und Federn…”

書中關於購買家畜的問題

25. 古算書的摘錄

在計算盤上示出生意交易的結果

桶容積的計算

26. 兩座圖書館

布拉格國立大學圖書館的數學陳列室

Erfurt 科學圖書館的入口（Boyneburg 正門）

27. 古數學教具 I

分角器，1741

裂條竹棒當作計數棒

符木棒

28. 古數學教具 II

16世紀算術的輔算物或籌碼及其皿盒。

29. 古數學教具 III

測量員使用的羅盤

30. 古量度器 I

以並列的16足來圖解一竿之長

16世紀的丈量竿，其上有許多刻度

31. 古量度器 II

可變日晷儀，象牙製。

稱重器，1588 年Naremberg

32. 17世紀的著名數學家 I

笛卡兒著作的書名頁

笛卡兒

33. 17世紀的著名數學家 II

1.維塔　2.納比爾　3.伽利略　4.刻卜勒　5.卡瓦列利　6.費爾瑪　7.格列高里

34. 17/18世紀著名的數學家 I

萊布尼玆

巴斯卡

牛頓

35. 17/18 世紀著名的數學家 II

摘自萊布尼玆的手稿，在其上積分符號首度出現

1642 年巴斯卡所製造的計算機器。

36. 17/18 世紀著名的數學家

伯努利·傑克比

伯努利·約翰

伯努利·丹尼爾

37. 18世紀著名的數學家 I

尤拉手稿中的一頁

尤拉

38. 18世紀著名的數學家 II

1.泰勒　2.摩斐替斯　3.蘭伯特　4.拉格藍吉　5.蒙奇　6.雷根德　7.傅立葉

39. 19世紀著名的數學家 I

波利亞在非歐幾何學上的繪圖

洛勃却斯基

波利亞

40. 19世紀著名的數學家 II

年青時高斯的自畫像

老年時的高斯

高斯

41. 19世紀著名的數學家III

高斯科學日誌的一頁

42. 19世紀著名的數學家IV

1.貝塞爾　2.歌西　3.史田納　4.阿貝爾　5.狄力屈力特　6.伽羅瓦　7.柴比西夫

43. 19世紀著名的數學家V

1.傑克比　2.黎曼　3.考納克　4.威爾

斯却斯　5. 開樂立　6. 李　7. 庫巴萊斯基

44. **數學工具 I**

求給定函數或微分方程式積分曲線之製圖器

求給定圖形的積分函數值之工具

45. **數學工具 II**

極管式面積測量儀

極承載式面積測量儀

46. **數學工具 III**

精密縮圖器

用來度量直角坐標及繪製給定坐標的點的儀器

47. **數學工具 IV**

調和分析儀

用來繪製給定圖形的切線、法線的工具

48. **19/20 世紀著名的數學家**

1. 史脫克　2. 達得金　3. 弗洛畢比爾斯　4. 肯特　5. 波恩卡利　6. 克廉　7. 諾塞

49. **19/20 世紀的著名數學家**

1. 希爾伯特　2. 卡田　3. 雷畢斯格　4. 紐曼　5. 威爾　6. 哈德瑪　7. 巴那克

50. **測量儀**

用來觀測三角網的信號儀

三角點

51. **數學教育 I**

在黑板上作練習

用手製儀器測量角

教學上所用的巨型計算尺

52. **數學教育 II**

在黑板上的幾何作圖

丈量排氣系統之一部份

畢氏定理的應用

53. **數學教育 III**

1. 含有平面及空間對角線的正方體
2. 角柱分成三個相等角錐
3. 圓柱及其截面
4. 球體及其截面
5. 直圓錐的截面

54. **映像**

攝影的正、負片

水中的映像

船上笛塞爾內燃機左右邊對應

55. **雜例**

捕蝦籠最小曲面的構造

肥皂膜最小曲面的構造

光線從A到B的路徑是極小問題的解

56. **數學模型**

摩比爾斯帶，單面曲面

第一類閉曲面；如環狀圓

歪球體，具有負常數曲率的最簡曲面

代表函數 $w=\exp(1/2)$ 在 $z_0=0$ 附近模的曲面

導言

科技在各方面的偉大成就，深深地影響每一個人的生活，它引導人們廣泛地認識數學的重要性：每個人都知道，至少確信，沒有數學，科技全然不會有今天的成就。因此，人們乃更堅定地關切數學，需要這門科學的消息。

在許多方面，特別就問題和結論的陳述來說，數學是一門非常特別的科學。對醫藥學、動物學、植物學、地理學、地質學或語言學、歷史學、天文學而言，一個學者只要充分具備當代知識就能夠對門外漢闡釋大半的問題和結論，甚至於包括他的研究方法及此專門學科中的基本原理，藉著這些解釋，他能成功地傳播專門學科內容的印象，這對近代化學、近代物理學已經非常困難了，而對於數學，這幾乎是不可能的。不僅繁多的數學結論有此現象，而數學的問題更是如此地難以探討，並且是如此地深刻，以致於即使是數學家也只能對整個數學作表面化的解釋。

爲了避免把數學片斷地割裂成許多特別的部門，我們從不同範疇中儘可能地選出通常在表面上不完全相近的共同特性，並藉此產生新的，甚至是抽象的理論。就是依這種方式，介於廣大初看之下散漫分歧的各個方向之間的環鍵，乃能連鎖起來。這種程序可視爲再抽象：而像基本學科代數和幾何，其根源都是從日常經驗抽象化出來的，若再進一步的（比方）從代數和幾何抽象化則可得到一個統一的定理。在某些情況下，這種抽象化的程序可以重覆地疊加在彼此的上面。此處“抽象”的字面意義可當作“除去”，像刪除問題中不重要的上下文或者是爲了特定的目地；例如，在幾何圖形上除去顏色，在裝飾上它依然扮演了一個很好的角色。

綜合上述，可知要一個門外漢對當代整個數學即使是一瞥都十分不可能。此處所指的門外漢，不僅僅是對學校正式課程所知有限的人，甚至有文憑的數學家或理學士，更甚至是數學教師，都是數學許多專門範疇的門外漢。三、四年的研讀不可能獲得數學上所有部門的專門知識。因此，這本書並不企圖提供數學上所有專門領域的重要知識——這限制是不可缺少的。

在數學史上，數學最先是以十分拙樸的方式發展的。它從數１、２、３……和一些顯而易見的幾何圖形如空間中的點、線段、線、平面，角、三角形、圓等出發，逐漸地提升到較繁複的構式，其中數及形的實體並不是分開發展，而是通過“度量”聯繫在一起的。正是在這種從直觀、簡易、明顯進化到更複雜問題的發展過程中，數學建立了起來，例如，在巴比倫和埃及，天文學上都曾達到驚人的成就，以致能預測月蝕。當希臘人迫切地感覺他們不僅要永遠地向前邁進，而且也思考到：「一個人在數學上追求的是什麼？」時，數學便被他們提升到一個全新的發展層面，也因爲他們，數學才能成爲一門今日意義下的科學。一方面，

他們體認“證明”在於把數學的命題，藉著由已知的證據或經驗來驗證和確定的簡易邏輯結論，演繹成爲其他已知的事實。另一方面，他們確知一個演繹程序中，只能達到由直覺或經驗認爲可靠的數和圖形之簡單特性，而不能無限制的發展。

由此，他們將首先察覺到的基本事實滙集成系統，例如，過兩點確有一直線，並且他們也創設了邏輯基礎。配合這兩個主要特性乃能系統化地建立了由簡入繁的幾何學。

除了少數不重要的補充外，這個歐氏幾何有很長的一段時間，一直都是科學的典範。大約有二千年之久，沒有人嘗試以同樣的方法討論代數學和後來的分析學。希臘人對自然數的基本性質已頗有認識，但他們對因數和質數的問題更有興趣。他們也知道如何處理普通分數（Common fraction，或稱Vulgar fraction，即分母不爲10的乘冪的分數），但尙不能激發足以引進負數的理念。從等腰直角三角形，他們領悟到分數不足以描述所有數量的比：他們注意到此一三角形的邊和底之比不能以分數表示。然而，由此他們並沒有給出結論：分數的領域應擴展，使得這個比，甚至所有的幾何比，都可以用擴展出來的新數來描述。反而，他們却“幾何化了代數”。雖然他們確曾導出一個與我們實數對等的理論；但幾何化把數的理論搞得如此複雜，迫使希臘數學的發展停頓了下來。

幾世紀後，天文學家和航海家的實際需要迫切地需求三角計算，而這種僅能借助於某些三角函數表。由於觀測值的精確度有限，所以只要給出逼近的量以供計算即已足夠。由此，逐漸地發明了有限小數，它在實際的計算中，被認爲比普通分數更爲方便。還有，大致說來，信心也逐漸加强，因爲使用的小數位數愈多，其值往往越精確，甚至用足夠多的小數位數便能達到指定的精確度。在上一階段的分析學中，小數的逼近掌握了實數的眞正本質：事實上，數學家不再拋開分數可化爲無限小數的說法。要是這個理論能獲得一致性的發展，那麼其結果應該可以成爲實數的一個正確理論。

一個具有基本重要性的有趣實例指出：前述的觀念早在阿基米德的研究中，以一種稍爲不同的形式出現，當時他試圖計算平面上任意封閉曲線所圍的面積，就曾提出類似的概念。首先，在他著名的“窮盡法”中，他成功的計算出拋物線與垂直中心軸的弦所圍的面積，並推得此所圍面積比弦的兩端點及頂點所圍三角形面積多了三分之一。但阿基米德並沒有成功的找出求圓面積的一個對應的簡易結果。爲了解決這個問題，他必須計算 π 的值。據我們所知，因他僅僅使用分數來算，所以不能成功；他只好聊勝於無地證明 π 位於 $3\frac{1}{7}$ 和 $3\frac{10}{71}$ 這兩個分數之間。爲了計算圓面積，他反覆地應用畢氏定理，由計算圓的內接及外接正凸 96 邊形的面積而得到其近似值。阿基米德顯然知道取足夠多的邊和頂點，就能夠把 π 限制在兩個很窄的區間內，甚至也能夠把 π 計算到指定的精確範圍內。一個數可由分數作指定精確度的逼近，正是實數的特性之一。

對實數本質的熟悉感，適當的時候在各種不同的場合，比方——在微分和積分奠基的很久之前——，在對數表的構造中，在笛卡兒的解析幾何學中，其中平面或空間上的點都用坐

標來標定)，接著是相當大程度地，在始自萊布尼茲與牛頓，而由陶醉在發現喜悅中的伯努利、尤拉、歌西、高斯及其他人所繼承的微分與積分學的發展中，穩固地建立起來。沒有人想像得到實數理論的「基礎」竟然需要更進一步的精深研究。

然而，「基礎」的若干問題在其他的兩個分支，幾何學和代數學中也有各自的份量。前面已經指出**歐氏幾何學**是以非常簡單的幾何命題開始，而導出較深的幾何定理。這些簡單的命題稱爲**公理**，它是當時直觀幾何知識的精粹，因此沒有人認爲需要加以證明。唯一的例外是**平行公理**（或設準）。這是說：給定一直線和線外一點，平面上恰有一直線通過此點且和給定直線不相交。可不可能由其他公理導出它，而將之從公理系統中除去呢？——2000年來，數學家對這問題束手無策，直到德國的高斯、俄國的洛勃却斯基及匈牙利的波利亞才成功地指出平行公理獨立於其他公理。這結論伴隨著其他方面的發展，其重要性才變得非常顯著。

代數上，二次方程式解的公式可導出$\sqrt{-1}$的表示式，它第一眼看起來似乎是無意義的。但我們只要像計算尋常的根式如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$甚至$\sqrt{\pi}$一樣來計算它，其結論是有意義的。這種計算方式强化了$\sqrt{-1}$形式的可信性，並使人接受$i=\sqrt{-1}$的記號法。大約300年前，高斯和其他人把實數域再擴大，其中存在一個新數，它的平方等於-1，從此這問題就有了一個完全明確的解釋方法了！

高斯澈底了解實數的性質，以致於他能毫不遲疑且不需詳證地使用它們。只有當歌西和同時代其他數學家在分類**極限**的觀念而出現難題時，實數才變成嚴肅沈思的對象。大家都體認到分數可以通過許多不同途徑的演繹，而建立一個實數的理論。分數又可以衍化爲自然數，且在自然數領域中所有的性質都可藉少數完美顯明的基本事實——**皮亞諾公理**統合起來。

藉著這種衍化爲自然數的演繹，得到了實數、複數理論和整個實數、複數**分析**，甚至是幾何學的基石。在解析幾何中，它顯出如何利用坐標（都是實數）去掌握幾何學的基素——點。

下文中我們將提及一種開始於150年前的發展。衆人皆知，數的乘法和加法的某些法則有强烈的形式相似性。同樣地，其他**數學運算**也遵守一些相當簡單的形式法則，例如：連續地實施許多運動。數學家由萃取基本性質進行到下一個邏輯步驟，並由純邏輯的程序導出新穎而更深刻的性質，但這種進展是很緩慢的。這領域逐漸發展成爲今日的群論，還有，我們也可以看到，如同在歐氏幾何學中一樣，繼起的數學發展都有**公設系**的出現。

今日數學的大部份，尤其是代數，以及範圍漸增的分析學和幾何學，都是以公設化的方式建立的。其大略的程序如下：給一群數學物元，通常稱作**集合**，用集合中的**元素**和某些**公設系**來描述這些物元的基本性質。然後從事下面的工作：首先，從公設推求出深遠的結論，換句話說，把這樣的結構的理論儘可能地推演；接著，去求得落實此公設的所有專門性方法的一種**鑑定**。或許，本質地只有**一種**可能的落實，或**多種**，甚或**無限多種**，也可能**沒有**這樣的落實存在，比方，所給的公設互相矛盾。假如有好幾個模型，也就是，好幾個落實公設的

方法，那麼，我們就尋求其「微定特色」———在有限多次步驟中有效地區分各種可能性。對某些結構這已經完全被解決，而有些則還差一大截。這附帶地指出公設化和數學邏輯是如何緊密地交織在一起。

當世紀更替，喚起了一個新的結構理論——集合論，它更強烈地需要有效的數學邏輯。集合論是最簡單的結構論，因爲它可以是任意的組合，它的元素不一定附屬於任何公設，可以是點、數、運動、函數、圖形，也可以是人、星星、椅子或任何給定的東西。因爲沒有給出結構性的假設，故兩個具有相同個數的元素之集合稱爲相等或對等。對有限集合來說，這個意義大家當然清楚得很；而對無限集合，甚至也能定義像元素的個數——冪數或基數，這一類的東西，則實在是諾大的貢獻。誠然，這可能不會具備我們所熟知的有限集合之元素個數涉及的那些特性，例如，自然數與分數的個數一樣，而分數與實數的個數却不同，線上的個數與平面上的點一樣多。所有這些性質儘管缺乏明顯的直觀性，但從整體的數學嚴密性觀點來說，它是不可否認的。而矛盾出現在未將集合的構式加以限制；例如：“所有集合的集合”的觀念是自身矛盾的。然而，這並不是數學的危機——雖然這現象常被過分地渲染；相反的，這倒促使數學家在定義數學概念時，兢兢業業地思考所牽涉到的內涵。事實上，有系統的數理邏輯已經發展出來，今日我們都很明確地知道如何避免這種矛盾。

我們可能認爲在非常一般化理論結構和數理邏輯公設化形式中，這種極端的抽象化，離實際應用會愈來愈遠。事實並不如此，萊布尼兹放棄了頗有創見的數學研究，而投入邏輯的一些基本問題中，並且曾經創造了一個可以使用的計算器，這當然不是一種巧合。

大量製造計算器的出籠，不論用手或動力操作，都沒有引起重要的原理討論。但電算機的發明，却使得這些事物劇烈地改變，因爲計算的速度快速地增加。事實上，機器的運轉只是利用到簡單的黑白原理，因爲在它們的每一組合成分中，全看電流通過或不通過。然而，它却能應付用其他方法不可能實現的計算，它們以一種超越想像的速度，以最簡單的方式計算龐大數目，且在可被接受的時間內完成一個複雜而冗長的程式。當然，計算的時間依賴寫程式的技巧而定。在完成電算機發明前的初步工作後，程式的某些規則很快地被發現，在數理邏輯中也扮演了一個角色，如算法理論就是一個例證。這再度證明了純爲理論需要所做的純數學研究，有其實際之效用。算法論是一個在計算技巧上，在純數學和應用數學之間具有緊密的、天然的關係之典型實例。

走文至此，我們似乎是可以探討數學問題的理論性和實際可解性之間的差別了。通常數學並不是討論給定數值後的個別問題，而是依據某些數據而定的一般性問題，其數值可以由有限多次、大致是無限多次的方法中選取。一個簡單的例子：確定三角形的面積是依照它的三邊長而定。雖然邊長有無限多種可能，但仍有一個適用於所有三角形的面積公式。

假如有一個問題能由公式或算法求出各種個別情況下的解，則我們稱此問題被解決了

。在這裏我們必須假設此公式或程序在有限個步驟內就可求出數值解。這種情形，純數學家也認為這問題被解決了。然而，實際上即使解決問題所須的步驟是有限的，但因時間上的理由或所耗經費太大，而可能尚未被解決。這件事，引導純數學家面臨一個新而有趣的挑戰：尋找更有效的程序——除非我們對逼近解已感到滿足，或者創造更快速的計算機。

由於電算機的發明，這方面有了巨大的進展。它引出以前未被發展過的新部門，尤其是在應用數學上，因為很顯然地有些主要問題被認為不可能在實際可接受的時間內被解決。**理論上可解**的問題，如“九人遊戲（ nine men's morris ）”和棋，就是這類的兩個例子。它們理論上是可解的，因為根據規則它們只有有限種可能的玩法。九人遊戲實際上也是可解的，我們可以給第一位遊戲者作如何對抗敵手所有可能行動的正確解說，以期在每一情況獲勝。雖然棋的玩法同樣是有限，但是否持白棋者總能獲勝這問題始終不能被解決；即使使用世界上現存能用的所有電算機，單獨用來解決棋盤問題，也不可能得到結論：這問題需要比現存計算機還要不可想像快速的計算機。

數學的發展，我們已大略的簡述如上，它是從數、運算、圖形和度量的最簡單基本概念，導向今日富有高度抽象化結構之完全的公設化形式，以及發展可能性永不窮盡的現代自動計算器。這種發展和本書目錄表相對照，可指出許多直接和間接的關係。

因此，第一部的內容「**初等數學**」，等於是從古代經過中世紀一直到微積分建立前的數學發展中的大部份內容。其中只有算術學、數論和幾何學，它們是依次發展而不是同時發展出來的。我們由自然數與其**初等運算法**則開始論述，並儘可能的詳明，就像把它呈現給一無所知的人一樣。緊接著，我們給出**公設化建構**，從自然數出發，導至複數而止。

雖然使用符號的是如此簡單的概念，但却不為希臘人所知，符號的缺乏迫使數學使用極端笨重的式子：以字母做為數字。今日，它在學校中已被視為當然。符號是非常適用於基本數學概念的，但它是那麼地容易處理以致於頗有不深思地使用，甚至機械化操縱字母的危險。下述引起不當後果的效應，特別是在中小學內，應該加以極力反對：數學的概念是最重要的，而計算過程的細節則是次要的——斷然不走其他的途徑。在1850年9月1日高斯寫給舒馬邦爾（Schumacher）的信上就曾討論到這主題：「這是近代數學的特徵。……藉諸符號與名辭語言，我們擁有一個可把最複雜的論證化簡為某些機械裝置的槓桿……。雖然在大部份情況下，權威導致某些被默認的假設，但我們仍經常機械地操作這槓桿。我主張在微積分的每一次應用中，在諸概念的每一次使用中，我們都應該永遠對原條件保持自覺，並且不可把由機械操作產生的結果視為在顯然可被容許限度外的數學特質。」

許多研究是由已知量來求未知量。一般認為使用字母，可以幫助我們把研究工作敍述得簡單而清楚。許多第一眼看似完全不同的問題，經過方程式或方程組的處理後，往往是同一形式。這也指出介於問題的數學構式和抽象化之間的相似性，這個抽象化是指忽略已知量和所需量的意義，只留下數學的核心。

函數化想法是近代數學的一大特性。這意指我們關注一量與其他量相關性的函數關係，