算學小叢書

平面幾何學——圓

東利作著

黃元吉譯

商務印書館出版

算學小叢書

平面幾何學

圓

東利作著
黃元吉譯

商務印書館出版

(51124·1)

算學小叢書 平面幾何學——圓

原著者 東　利　作

譯述者 黃　元　吉

出版者 商務印書館
上海河南中路二一一號

發行者 三聯 中華 商務 開明 聯營聯合組織
中國圖書發行公司
北京絨線胡同六十六號

發行所 三聯書店 中華書局 商務印書館 開明書店 聯營書店 各地分店

印刷者 商務印書館印刷廠

1933年4月第1版
1951年6月第8版
定價人民幣5,000元

(滬)8001-9500

目　次

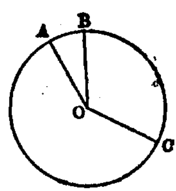
平面幾何學

圓

第一章

圓之基本性質

1. 定義 圓者，即所稱圓周之曲線所圍平面之一部分也；此曲線上一切之點，距一定點恆相等，此定點稱爲圓之中心.由中心至圓周所引各線分，即各有限直線，稱爲圓之半徑.

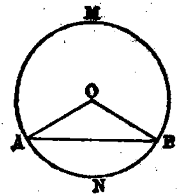


如圖.曲線 ABC 爲圓周，以此曲線爲限界，所圍平面之部分，即圓是也；又 O 爲中心，OA, OB, OC 各爲半徑.

圓依所記之文字稱之.如圖，稱爲 O 圓，或稱 ABC 圓，或稱 OA 圓.

注意 稱圓周者亦單稱圓，其不嫌混雜者，蓋從前後文之關係，不難判別其爲圓與圓周也；圓周分平面爲二部，有

中心之部分,爲圓之內部,無中心之部分,爲圓之外部.



2. **定義** 圓周之一部分爲弧,兩弧合成全圓周者爲共軛弧,共軛弧之大者爲優弧,小者爲劣弧.

如圖,AMB 與 ANB 爲共軛弧,二共軛弧相等者,各爲半圓周.

3. **定義** 由弧之兩端,聯成之線分曰弦,直徑卽通過中心之弦也.

同圓之直徑皆爲半徑之二倍,故互相等.直徑之中點,卽圓之中心.

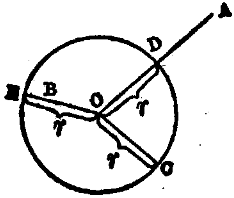
4. **定義** 弓形者,弧與弦所圍圓之部分也;扇形者,弧與二半徑所圍圓之部分也.

如前圖,AMB 及 ANB 皆爲弓形,又 $OANB$ 及 $OAMB$ 皆爲扇形.

5. **公理** 由圓內外二點所聯成之直線,必與圓周相交.

6. **定理 1** 由圓之中心至圓外之點,其距離必比半徑大;由圓之中心至圓內之點,其距離必比半徑小.

O 爲圓之中心, A 爲圓外之點, B 爲圓內之點, r 爲半徑,則 $OA>r$, $OB<r$.



證明　由 A, O 兩點聯成 OA 直線, 與圓周相交於 D, (5)

故　$OA=OD+DA$,

$$\therefore\ OA>OD$$

然　$OD=r$　故　$OA>r$,

次由 B 點作半徑 OE, $OE=r$

$$OB<OE,\quad \therefore\ OB<r.$$

7. 系 1　一點與圓之中心相距等於半徑, 此點必在圓周上.

如云不然. 則其點必在圓內,或在圓外,然此點與中心所成之距離, 不能等於半徑.

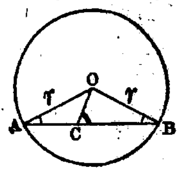
8. 系 2　一點與中心所成之距離, 比半徑大, 此點必在圓外, 若比半徑小, 此點必在圓內. (歸謬法)

9. 系 3　AB 弦上之點, 除其兩端, 必皆在圓內.

證明　O 爲中心, C 爲 AB 弦上之點, 因 $OA=OB$. 故於

$$\triangle OAB \text{ 形內}, \angle A=\angle B$$

然在 $\triangle OAC$ 形內,



外角 $OCB>A$,

$\therefore\ \angle OCB>B$,

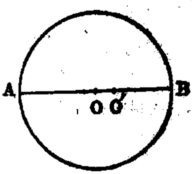
故由 $\triangle OCB$ 其邊必爲 $OB>OC$, 故 $OC<r$, 故 C點必在圓內.

10. 系 4 直線與圓周共有之點, 不能多於二點以上.

如謂有三點, 則由中心至此三點所引三線分, 皆爲半徑, 必皆相等, 是由直線外一點至直線得引相等三線分矣.

11. 定理 2 凡圓祇有一中心.

證明 O 爲圓之中心, 其他任意之點 O', 皆非中心, 如謂 O,O' 皆爲中心, 則由此二點所引直徑 AB, 必爲 $OA=OB$, $O'A=O'B$, 是有限直線 AB 有二中心矣, 故凡圓祇有一中心,

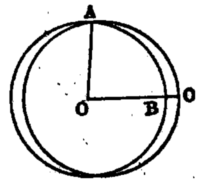


注意 此定理改爲"一圓不能有二中心,"其義同也.

12. 定理 3 同以 O 爲中心 OA 爲半徑之二圓, 必可疊合.

證明 設有一圓周上任意之點 C 不在他圓周上, 則其

半徑 OC 必與他圓周相交，其交點爲 B,則 $OB \neq OC$.然同圓之半徑必相等，故 $OB=OA$, $OC=OA$, 若 $OB \neq OC$. 是不合於理，故此兩圓必可疊合.



13. 系 1 二圓半徑相等者，此二圓必可疊合.

蓋相等之半徑爲 OA, $O'A'$. 其中心 O 令疊於中心 O' 之上，其半徑 OA 必適疊於半徑 $O'A'$ 之上,是與前節定理相符，故可疊合.

定義 凡可疊合之圓，稱爲等圓.

注意 半徑不等者圓亦不等，故等圓之半徑必相等.

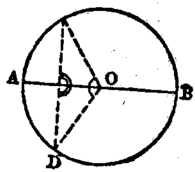
14 系 2 圓之中心固定，而於其平面上將此圓旋轉，必常合於原位.

蓋半徑之長不變，而中心又爲固定,故圓周上各點,不能入於原位之圓內. 亦不能出於原位之圓外.

15. 定理 4 直徑 (AOB) 分圓及圓周爲二等分

證明 以直徑 AB 爲折痕，將弓形 ACB 折合於 ADB 之部分，因 ACB 弧上一切之點,與中心相距,皆等於半徑，故點點皆落於 ADB 弧之上,即 ADB 弧上一切之點,適與 ACB 弧上一切之點相疊合，故 ACB, ADB 兩弓形成疊

合.



別證 依中心O旋轉,將弓形ACB旋至半周,其A點必適疊於B點之上,B點必適疊於A點之上,故ACB弧與BDA弧成疊合(14).

16. 定義 圓爲直徑所分之各部分,稱爲半圓.

17. 討論 定理4.之第一證明法,圓依其直徑成對稱,第二證明法,圓依其中心成對稱.詳言之,第一證明法,凡與直徑AB成正交之弦如CD,必適於其中點與AB成正交.第二證明法,凡通過中心O之弦,必皆以中心O爲中點.

18. 定義 通過圓之中心之無限直線,稱爲中心線.

19. 定理5 由定點P至圓周所作各線分之中,以中心線上之PA爲最小,PB爲最大.

證明 O爲圓之中心,PC爲不通中心任意所作之線分.

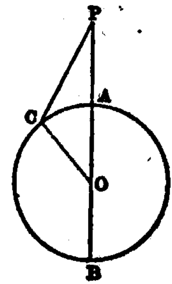
(第一) P點在圓外.

由 $\triangle POC$, $PO<PC+OC$,

由是減去 $OA=OC$

則 $PA<PC$.

次 $PC<PO+OC$,



因 $OC=OB$,

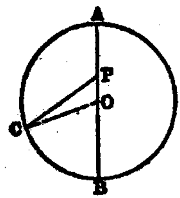
∴ $PC<PO+OB$.

即 $PC<PB$.

(第二) P點在圓內.

三角形二邊之差，必比第三邊小，

故 $\triangle POC$,

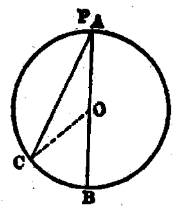


$OC-OP<PC$,

∴ $OA-OP<PC$,

∴ $PA<PC$,

次 $PO+OC>PC$,



∴ $PO+OB>PC$,

∴ $PB>PC$,

(第三) P點在圓周上.

此則 P, A 兩點相疊合，故 PA 為零而 $PB=PO+OB$ $=PO+OC$

故 $PB>PC$,

20. 系 直徑即最大之弦.

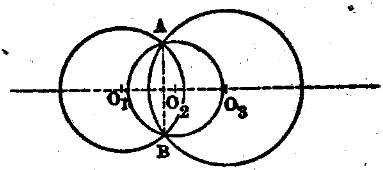
21. 定義 點與圓相距之最小者，稱為點與圓之距離.

如前定理，P 點與 O 圓之距離，PA 之長是也．P 點若在圓周上，則其距離爲零．

22. **定理 6** 通過一定點 A．可作無數之圓．

證明 任取一點 O 爲中心．OA 爲半徑，規取圓周，此圓卽通過 A 點，故依此可作無數之圓

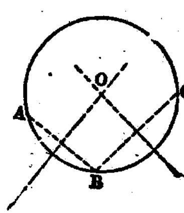
23. **定理 7** 通過二定點 A, P，可作無數之圓．



證明 線分 AB 之垂直二等分線上各點，必與 A, B 二定點成等距．故於此直線上任取 O_1 點爲中心，O_1A 爲半徑，規取圓周，此圓必兼通過 B 點(7)．

24. **定理 8** 不同在一直線上之三定點 A, B, C，通過此三定點，必可作一圓，惟祇能作一圓而止．

證明 A, B, C 三點不同在一直線上，與此三點成等距者祇有一點，此點卽 AB, BC 上垂直二等分線之交點 O 是也．故以 O 爲中心，OA 爲半徑，規取圓周，此圓通過 A, B, C，三點，然祇能作此一圓而止，因凡非以 O 爲中心之圓．不能通過 A, B, C 三點，



而以 O 爲中心, OA 爲半徑之圓, 則又皆成疊合也 (12).

25. **系 1** 不相疊合之二圓, 其共有之點, 不能多於二點以上.

26. **系 2** 相異之二圓, 其共有之點, 不能多於二點以上.

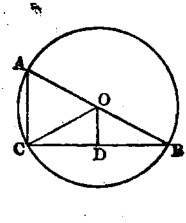
27. **注意 1** 前定理, 即"不同在一直線上之三點, 可決其能成一圓"

注意 2 因無與一直線上三點成等距之點, 故無通過一直線上三點之圓.

問題 I

*1. 直角三角形以斜邊 AB 爲直徑, 作圓周, 其直角之頂點 C 必適在此圓周上.

證明 A, B, C 三點, 與斜邊 AB 之中點 O, 成等距, BC 邊之中點 D, 與 O 聯成 OD 直線, 必與 AC 平行. 故 OD 爲 BC 之垂直二等分線.



$$\therefore \quad OC = OB = OA,$$

故以 O 爲中心, OA 爲半徑, 作圓周. 即以 AB 爲直徑之圓, 必通過頂點 C.

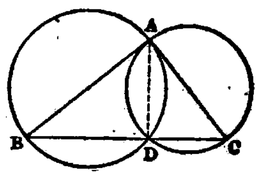
凡用 * 記號, 係屬主要問題.

2. 同由一斜邊所成之直角三角形，其直角之頂點，必同在一圓周上.

3. 矩形之四頂點，必同在一圓周上.

4. 四邊形兩對角線若成正交，則以四邊爲直徑所作四圓周，必同交於一點.

【指】 四圓周皆通過對角線之交點.

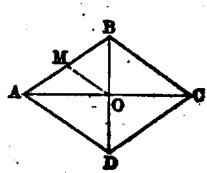


5. 三角形以二邊爲直徑作兩圓，必適於底邊或其延長線上相交.

【指】 兩圓周通過垂線之正交點，依 $\angle B<90^\circ$，$\angle B=90^\circ$，$\angle B>90^\circ$ 分別證明可也.

6. 菱形以四邊爲直徑，作四圓周，必同交於一點.

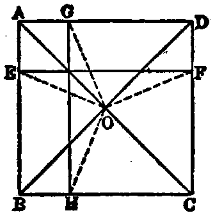
【指】 菱形爲 $ABCD$，則其 B, D 二點與 A, C 二點成等距，故 BD 爲 AC 之垂直二等分線.



7. 菱形四邊之中點，必同在一圓周上.

【指】 如前圖，AB 之中點爲 M，$OM=\frac{1}{2}AB$.

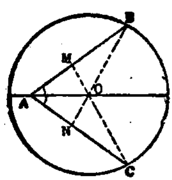
8. 由正方形一對角線上任意之點,準與二鄰邊平行引二直線,此二直線與四邊之交點,必同在一圓周上.



【指】 $\square ABCD$ 之中心爲 O, 平行線爲 EF, GH, 則 $\triangle AEO \equiv AGO \equiv BHO \equiv DFO$ 依此證明可也.

9. 由圓內 A 點. 引 AB, AC 二直線,係與圓周相交於 B, C, 而與由 A 點所作之直徑,夾成相等之角,如是則 AB, AC 必相等.

證明 由中心 O 作 AB, AC 之垂線 OM, ON,



則 $$\triangle OAM \equiv OAN,$$

$$\therefore \quad OM = ON, AM = AN,$$

因之 $$\triangle OMB \equiv ONC,$$

$$\therefore \quad MB = NC.$$

故 $$AM + MB = AN + NC,$$

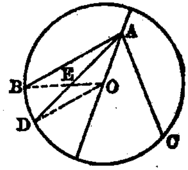
即 $$AB = AC.$$

注意 讀者試以 AO 爲折痕,將圓折疊,以證明本題.

10. 由圓外 A 點,引 AB, AC 二直線,係與圓周相交於 B, C, 而與中心線 AO 夾成相等之角,如是則 AB, AC

必相等.

11. A 點在圓內, 而非中心, 其由 A 至圓周所引相等之線分, 不能多於二線分以上.



證明　與中心線 AO 夾成等角之二線分 AB, AC 爲相等.　　(9)

今作第三線分 AD, 其不能與 AB 相等, 可證之如次, 作半徑 OB, OD, 其 AD, OB 之交點爲 E, 則

$$AE+EB>AB,$$

$$ED+OE>OD,$$

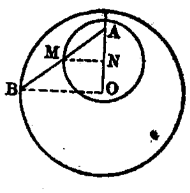
$$\therefore \quad AD+OB>AB+OD$$

由此不等式之兩邊減去 $OB=OD$,

$$\therefore \quad AD>AB$$

注意　A 點在圓外, 亦係同理成立.

12. 一點與圓周上三點成等距, 此點必爲中心.



因非中心, 不能與圓周上三點聯成相等三線分也.

***13.** 由 A 定點至 O 定圓所引一切線分之中點, 必同在一圓周上.

證明 線分 AB 之中點為 M, AO 之中點為 N,

則
$$MN=\frac{1}{2}BO,$$

今 BO 之長,不隨 B 點之位置而變,故 MN 之長亦不變,而 N 為定點,故 M 在以 N 為中心 $\frac{1}{2}BO$ 為半徑之圓周上.

又定點 A 在圓外或在圓周上,亦依同理證明可也.