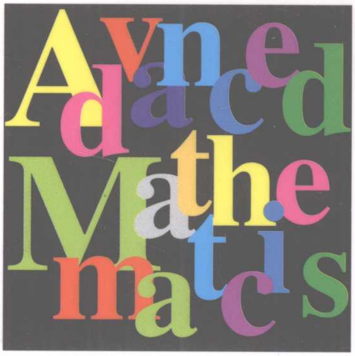

高等数学

学习指导

东华大学高等数学教学团队
陶有山 尤苏蓉 谢峰 等 编

清华大学出版社

高等数学

学习指导

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者在多年教学实践的基础上编著而成的. 本书突出高等数学中处理问题的思想方法和关键技巧, 是一本教学辅导书.

本书主要是针对高等数学中的"重点与难点"进行讲解, 而对一些基本概念和基本定理并未做详细介绍. 为了便于初学高等数学的大学一年级学生能方便地使用本书, 该书章节编排顺序参考了同济大学编《微积分》(上、下册)教材. 全书共九章, 其中第一章为极限与连续; 第二章为一元函数微分学; 第三章为一元函数积分学; 第四章为微分方程; 第五章为向量代数与空间解析几何; 第六章为多元函数微分学; 第七章为重积分; 第八章为曲线积分与曲面积分; 第九章为无穷级数. 每一章又分为若干小节, 而每一小节由"重点与难点"、"典型例题"与"习题"三部分组成. 重点与难点部分主要是针对重要的概念、定理或难点, 或关键的方法技巧进行讲解; 典型例题部分是针对能反映重要概念的理解、重要定理的应用或体现关键的方法与技巧的例题进行深入讲解, 不少例题后也给出了"评注", 点出解题过程的关键之处; 习题部分用来检查学习效果, 书后有习题答案和提示.

本书突出重点与难点, 注重方法与技巧, 精选例题与习题. 可作为工科或其他非数学类专业的大学一年级学生学习高等数学的辅导书, 或作为高年级学生的考研辅导书, 也可作为教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/陶有山等编. --北京: 清华大学出版社, 2010.3

ISBN 978-7-302-21549-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陶… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 219060 号

责任编辑: 佟丽霞
责任校对: 刘玉霞
责任印制: 杨 艳
出版发行: 清华大学出版社 **地 址**: 北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn **邮 编**: 100084
社 总 机: 010-62770175 **邮 购**: 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者: 北京嘉实印刷有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 170×230 **印 张**: 11.25 **字 数**: 210 千字
版 次: 2010 年 3 月第 1 版 **印 次**: 2010 年 3 月第 1 次印刷
印 数: 1～4000
定 价: 17.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话: (010)62770177 转 3103 产品编号: 031970-01

序

本书是作者在多年教学实践的基础上编著而成的, 可作为高等学校工科或其他非数学类专业学生学习高等数学基础课的辅导书, 或复习考研的辅导书, 也可作为教师的教学参考书.

高等数学是工科或其他非数学类专业学生的重要基础课, 东华大学十分重视该基础课的教学. 为了不断提高高等数学的教学质量, 在东华大学分管教学的陈田初副校长、教务处吴良处长等领导和老师的关心和支持下, 我们组建了“东华大学高等数学教学团队”. 团队的任务和目标是: 对高等数学的教学内容和方法进行深入研讨, 团队成员之间充分交流教学经验, 相互促进和提高, 提升团队的整体教学水平和效果, 最终的目的是要促进学生学好高等数学这门重要的基础课. 本书正是在上述教学背景和环境下编写而成的.

本书由团队中 9 名主要成员陶有山、叶海平、尤苏蓉、谢峰、康剑灵、陈敏、彭亚红、马晨明、李美丽分别执笔写出了第一章 (极限与连续)、第二章 (一元函数微分学)、第三章 (一元函数积分学)、第四章 (微分方程)、第五章 (向量代数与空间解析几何)、第六章 (多元函数微分学)、第七章 (重积分)、第八章 (曲线积分与曲面积分)、第九章 (无穷级数) 的初稿. 全书由陶有山负责统稿, 对初稿的内容进行了适当的删减或增加. 全书的打印工作由尤苏蓉负责完成. 内容定稿后, 上述团队主要成员对各自所写章节进行了反复认真的校对, 寇春海和陶有山对全书进行了审校.

本书主要是针对高等数学中的重点与难点进行讲解, 而对一些学生比较容易理解或掌握的知识点未做详细介绍, 所以本书适合作教学辅导书. 本书着重注意以下两个方面:

(1) 突出高等数学中处理问题的思想方法, 加强分析能力、应用能力的培养. 通过典型例题的讲解, 渗透处理问题的宏观数学思想, 对高等数学中的问题先进行“粗分析”, 找出解决问题的思路和方法. 这一点也反映在书中典型例题后面的“评注”中. 如果能掌握处理问题的思想方法, 不仅对学好高等数学有帮助, 而且还将有益于后继课程的学习乃至终身学习.

(2) 注重解题的关键技巧, 加强解题能力、计算能力的培养. 通过典型例题的讲解, 为了便于掌握其中的数学技巧和培养计算能力, 在每一节后都安排了一定数

量的习题，供读者进行练习或自测学习效果. 书中的例题和习题是作者根据多年的教学实践和经验积累而成的，也有一些例题和习题选自近几年的考研题.

本书内容丰富，但十分精练. 限于编者的水平，不妥及疏漏之处在所难免，恳请同行专家和广大读者提出宝贵意见.

编　者

2009 年 12 月于上海

目　　录

第一章　极限与连续

1.1　数列极限的定义

一、重点与难点

极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的定义：对任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在自然数 N, 只要 $n > N$, 都有

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

注 1　$N = N(\varepsilon)$ 依赖于 ε, 一般 ε 越小, N 越大.

注 2　N 并不唯一, 假定对给定的某个 ε, N_1 满足要求, 那么大于 N_1 的任何自然数 N 均满足要求.

注 3　极限定义是整个高等数学的基石, 后面一些定理的证明要用到它, 所以应该把它弄清楚.

注 4　用极限定义证明极限恒等式, 关键在于找到 $N = N(\varepsilon)$. 一般做法是从式子 $|x_n - a|$ 出发, 放大不等式：$|x_n - a| \leqslant g(n)$, 这里对 $g(n)$ 有且只有两个要求：① $g(n)$ 尽量简单; ② $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = 0$.

二、典型例题

例 1　用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{(n+1)^2} = 0$.

证明　对于任意的 $\varepsilon > 0$, 由于

$$\left|\frac{\sin n}{(n+1)^2} - 0\right| = \frac{|\sin n|}{(n+1)^2} < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n},$$

所以要 $\left|\dfrac{\sin n}{(n+1)^2} - 0\right| < \varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n > N$ 时有 $\left|\dfrac{\sin n}{(n+1)^2} - 0\right| < \varepsilon$.

例 2　用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, 其中 $a > 1$.

证明　对任意 $\varepsilon > 0$, 由于

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \frac{a-1}{1 + \sqrt[n]{a} + \cdots + (\sqrt[n]{a})^{n-1}} < \frac{a-1}{n},$$

所以，要 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{a-1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{a-1}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$.

例 3　用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{2n^2-n+1}=\dfrac{1}{2}$.

证明　对任意的 $\varepsilon>0$，由于

$$\left|\frac{n^2-1}{2n^2-n+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n-3}{2(2n^2-n+1)}\right|<\left|\frac{n-3}{2n^2-n}\right|=\left|\frac{n-3}{n(2n-1)}\right|<\frac{1}{n},$$

(最后一个不等式中假设 $n>3$) 所以要 $\left|\dfrac{n^2-1}{2n^2-n+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

取$N=\max\left(\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right],3\right)$，则当 $n>N$ 时有 $\left|\dfrac{n^2-1}{2n^2-n+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

评注　在放大不等式 “$|x_n-a|\leqslant g(n)$” 时，有时需要假设 $n>N_0$. 之所以能这样做，是因为极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 只与 n 充分大时的 x_n 有关.

三、习题

1. 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+(-1)^n}{n}=0$.

2. 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=0$.

3. 用定义证明当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}|q|^{n-1}=0$.

1.2　函数极限的定义

一、重点与难点

数列 $x_n=f(n)$ 可以理解为函数，其自变量 n (自然数) 是离散的. 而一般来说，函数 $y=f(x)$ 的自变量 x (实数) 是连续的. 以下设 x_0, A 为有限实数，“$\forall$” 表示 “任给”，“$\exists$” 表示 “存在”.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N$ (自然数)，使得当 $n>N$ 时，有 $|f(n)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$ (实数)，使得当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使得当 $x<-X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(5) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(6) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(7) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使得当 $0<x_0-x<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

如何用极限定义来证明函数极限等式? 情形 (2)~(4) 可以仿照数列极限情形 (1) 来处理; 情形 (6)~(7) 可以仿照情形 (5) 来处理. 所以, 本节重点考虑情形 (5).

注 “$|x-x_0|<\delta$” 用来刻画 x 接近于 x_0, 强调 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 只与 x_0 附近 $f(x)$ 的性质有关; 如 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$, 但 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$. “$|x-x_0|>0$” 用来排除 (或者挖去) x_0 点, 强调 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关; 如 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$, 但是函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 没有定义.

用定义证明函数极限等式时, 关键要找出 $\delta=\delta(\varepsilon)$. 为此, 要放大不等式 $|f(x)-A|\leqslant g(|x-x_0|)$, 这里要求函数 $g(|x-x_0|)$: ① 尽量简单; ② $\lim\limits_{x\to x_0} g(|x-x_0|)=0$. 有时为了能放大上述不等式, 需先假设 $|x-x_0|<\delta_0$ $\left(\text{常取 } \delta_0=2,1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$, 能这么做的理论依据在于: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 只与 $f(x)$ 在 x_0 附近的性质有关 (极限的局部性质).

二、典型例题

例 1 用定义证明 $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$, 假设 $|x-2|<1$, 由于

$$|x^2-4|=|x-2||x+2|<5|x-2|,$$

所以要 $|x^2-4|<\varepsilon$, 只要 $5|x-2|<\varepsilon$, 即 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$.

取 $\delta=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{5}\right)$, 则当 $0<|x-2|<\delta$ 时, 有 $|x^2-4|<\varepsilon$.

例 2 用定义证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{1}{3}$.

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 假设 $|x-1|<1$. 由于

$$\left|\frac{x-1}{2x^2-x-1}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{2(x-1)}{3(2x+1)}\right|<\frac{2|x-1|}{3}<|x-1|,$$

所以, 要 $\left|\dfrac{x-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$, 只要 $|x-1|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min(1,\varepsilon)$, 则当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 有 $\left|\dfrac{x-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$.

三、习题

1. 用定义证明 $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$.

2. 用定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$, 其中 $x_0 > 0$.

3. 用定义证明 $\lim\limits_{x\to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$.

1.3　极限存在准则与两个重要极限

一、重点与难点

夹逼准则: 若 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

单调有界原理: 单调有界数列必有极限.

两个重要极限: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

注 1　在应用夹逼准则求极限时, 有时要求能够观察出 x_n 的极限 a, 这样才能找到"两边夹"的 y_n 与 z_n.

注 2　在应用单调有界原理求极限时, 一般是先证明有界性, 再证单调性 (因为证单调性时常用到有界性). 如何判断数列单调上升还是单调下降呢? 先形式上求出数列的极限, 再与数列的前 2 项比较.

注 3　在应用极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 求极限时, 要注意"$x \to 0$"这个条件.

注 4　对"1^∞"不定型极限, 才能使用 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$. 具体应用时, 可将 1^∞ 写成形式 $(1+\diamond)^{\frac{1}{\diamond}\cdot\diamond_1}$, 只要求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \diamond_1$ 即可.

二、典型例题

例 1　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n+3^n+4^n}$.

解　因为

$$4 < \sqrt[n]{1+2^n+3^n+4^n} \leqslant 4\cdot 4^{\frac{1}{n}} \to 4,$$

所以原极限为 4.

例 2　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

解　因为

$$\frac{1}{2} \leftarrow \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1} \to \frac{1}{2},$$

所以原极限为 $\frac{1}{2}$.

例 3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

证明 当 $n > 1$ 时, $n^{\frac{1}{n}} > 1$. 令 $n^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$ $(a_n > 0)$, 从而

$$n = (1+a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \cdots + a_n^n > \frac{n(n-1)}{2}a_n^2,$$

因此有 $0 < a_n < \sqrt{\dfrac{2}{n-1}} \to 0$.

例 4 设 $x_0 = a > 0, x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

证明 显然 $x_n > 0$, $x_{n+1} \geqslant \sqrt{x_n \cdot \dfrac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$.

同时 $x_{n+1} - x_n = \dfrac{a - x_n^2}{2x_n} \leqslant 0$. 因此 $\{x_n\}$ 单调下降有下界. 由单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 在等式 $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$ 两边同时取极限得到

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right),$$

求解得到 $A = \sqrt{a}$ (因为 $A \geqslant \sqrt{a}$, $A = -\sqrt{a}$ 被舍去).

例 5 设 $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \dfrac{a_n}{1+a_n}$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在并求此极限.

证明 显然 $1 < a_{n+1} < 2$. 由

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})},$$

以及 $a_2 - a_1 > 0$, 用数学归纳法证得: 对任意 n, 都有 $a_{n+1} - a_n > 0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在. 易求得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

评注 例 4 与例 5 证明单调性的方法不同, 例 4 用的方法为证明 $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n < 0$ (用到 $\{x_n\}$ 的有界性); 而例 5 用的方法为 $a_{n+1} - a_n = f(a_n) - f(a_{n-1}) > 0$, 其中运用了数学归纳法.

例 6 设实数列 $\{x_n\}$ 满足 $(2 - x_n)x_{n+1} = 1, n = 1, 2, \cdots$.

(1) 证明必存在自然数 k, 使得 $x_k \leqslant 1$;

(2) 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明 (1) 反证法. 假设对任意 n, $x_n>1$. 从而 $x_n=2-\dfrac{1}{x_{n+1}}<2$ 有上界. 同时

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2-x_n}-x_n=\frac{(1-x_n)^2}{2-x_n}\geqslant 0.$$

由单调有界原理知, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在. 由 $\{x_n\}$ 的单调上升性, 推得 $a\geqslant x_1>1$. 但是在等式 $(2-x_n)x_{n+1}=1$ 两边令 $n\to\infty$ 求得 $a=1$, 矛盾!

(2) 由 (1), 存在 k, 使得 $x_k\leqslant 1$, 可以得到 $x_{k+1}=\dfrac{1}{2-x_k}\leqslant 1$ 以及 $x_{k+1}-x_k=\dfrac{(1-x_k)^2}{2-x_k}\geqslant 0$, 即当 $n>k$ 时, $\{x_n\}$ 单调递增且有上界 1. 由单调有界原理知, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 易求得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

评注 例 6 中 $\{x_n\}$ 单调性的证明依赖于 $\{x_n\}$ 的有界性.

例 7 设 $a>0$, $x_1=\sqrt[3]{a}, x_{n+1}=\sqrt[3]{ax_n}$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求此极限.

证明 $a\geqslant 1$ 时, $x_1=\sqrt[3]{a}<\sqrt{a}$, 用归纳法可以证明 $x_n\leqslant\sqrt{a}$.
同时可以得到

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt[3]{\frac{a}{x_n^2}}\geqslant 1,$$

即得 $\{x_n\}$ 单调递增, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

$a<1$ 时, 同理可以证明 $\{x_n\}$ 有下界 $\sqrt{a}$, 并且单调下降, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 易求得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

评注 在 $x_{n+1}=\sqrt[3]{ax_n}$ 两边 “形式上” 求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$. 再将此极限值 $\sqrt{a}$ 与 $x_1=\sqrt[3]{a}$ 比较知: $a\geqslant 1$ 时, $\sqrt{a}>x_1$; 而 $a<1$ 时, $\sqrt{a}<x_1$. 从而推知: $a\geqslant 1$ 时, 要证明 $\{x_n\}$ 单调上升 (所以要证明 $\{x_n\}$ 有上界 $\sqrt{a}$); 而 $a<1$ 时, 要证明 $\{x_n\}$ 单调下降 (所以要证明 $\{x_n\}$ 有下界 $\sqrt{a}$).

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{\sin x}}$, 而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin x}=2$, 因此原极限为 e^2.

例 9 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=4$, 求 c.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}\cdot\frac{2cx}{x-c}}=\mathrm{e}^{2c}=4,$$

推得 $c=\ln 2$.

例 10 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^2\right]^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}=\mathrm{e}.$$

评注 本题难点在于如何把原极限化为 $(1+\diamond)^{\frac{1}{\diamond}\cdot\diamond_1}$ 的形式.

三、习题

1. 设 $x_n=\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}_{n\text{个}}$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求此极限.

2. 设 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=a,x_2=b\ (a,b\neq 0)$, $x_n=\dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}, n=3,4,\cdots$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin[\sqrt{n^2+1}\pi]$.

1.4 无穷小的比较

一、重点与难点

无穷小: 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, 那么称 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小.

注 1 无穷小是个变量 (0 除外).

等价无穷小: 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$, 并且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, 那么称当 $x\to x_0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)\ (x\to x_0)$.

常用等价无穷小: 当 $x\to 0$ 时, $\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $\mathrm{e}^x-1\sim x$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, $a^x-1\sim x\ln a\ (a>0)$.

注 2 对于 $\dfrac{0}{0}$ 型极限, 如果分子 (或分母) 是 “因式乘积”$(f_1(x)\cdot f_2(x))$ 的形式, 则 $f_1(x),f_2(x)$ 可以用相应的等价无穷小来替代. 如果分子 (或者分母) 是 “因式加法”$(f_1(x)+f_2(x))$ 的形式, $f_1(x),f_2(x)$ 用相应的等价无穷小替代后, 若原来的 $\dfrac{0}{0}$ 型成为 “确定” 型 $\left(\text{即不是 }\dfrac{0}{0}\text{ 型}\right)$, 则替换是正确的; 若替代后的极限仍是 $\dfrac{0}{0}$ 型, 则不能进行上述无穷小替代 (要弄清注 2 的理论依据, 要学完后面的泰勒公式才行: 等价无穷小实际是一阶近似, 而用泰勒公式可进行高阶近似运算).

二、典型例题

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

解 利用性质“有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小”. $\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界量, 因此 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

评注 注意 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0} x \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$, 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{\tan\pi x}$.

解 令 $t=x-1$, 则

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}-\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{\tan\pi t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\pi t}=-\frac{1}{2}.$$

评注 在应用等价无穷小时, 应注意 “$x\to 0$” 这个条件, 若 $x\to x_0$ $(|x_0|<\infty)$, 则令 $t=x-x_0\to 0$; 若 $x\to\infty$ 时, 则令 $t=\dfrac{1}{x}\to 0$.

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln(1+x)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{x^2}=1$.

例 4 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a_1,\cdots,a_n>0$.

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{n}\right]^{\frac{n}{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}\cdot\frac{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{nx}}$$
$$=e^{\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

评注 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\neq\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}$, 因为后者仍为 $\dfrac{0}{0}$ 型.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sqrt{1+x}+\cos x}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\left(1+\frac{1}{2}x\right)+1}{x}=\dfrac{1}{2}$.

评注 本例中分子部分是因式的和, 为什么能用等价无穷小替代呢? 因为替代后不定型 "0" 因子能消去.

例 7 已知当 $x\to 1^+$ 时, $\sqrt{3x^2-2x-1}\ln x$ 与 $(x-1)^n$ 为同阶无穷小, 求 n.

解 将 $\sqrt{3x^2-2x-1}\ln x$ 进行等价变形如下:

$$\begin{aligned}\sqrt{3x^2-2x-1}\ln x&=[(2x^2-2)+(x-1)^2]^{\frac{1}{2}}\ln[1+(x-1)]\\&=(x-1)^{\frac{1}{2}}[2(x+1)+(x-1)]^{\frac{1}{2}}\ln[1+(x-1)],\end{aligned}$$

当 $x\to 1^+$ 时, $(x-1)^{\frac{1}{2}}[2(x+1)+(x-1)]^{\frac{1}{2}}\ln[1+(x-1)]\sim 2(x-1)^{\frac{3}{2}}$, 因此 $n=\dfrac{3}{2}$.

三、习题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^x-1}{x^3}$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$.

4. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$.

5. 已知整数 $n>4$, 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^n+7x^4+2)^m-x]$ 存在且不为 0, 求 m.

1.5 连续与间断

一、重点与难点

连续性: 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

间断点: 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 不成立, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 有三种可能:

(1) $f(x_0)$ 无定义;

(2) $f(x_0)$ 有定义, 但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在;

(3) $f(x_0)$ 有定义, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 但是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

间断点类型: 设 x_0 为间断点. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 都存在, 则称 x_0 为第一类间断点; 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 中至少有一个不存在, 则称 x_0 为第二类间断点.

(1) 可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, x_0 为间断点.

(2) 跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 均存在, 但是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

(3) 无穷间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 至少有一个为无穷大.

最值定理：闭区间上的连续函数必有界, 并且一定能达到其最大值与最小值.

介值定理：设 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $f(a)\neq f(b)$, 则对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何实数 μ, 必存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)=\mu$.

注 1 要判断函数 $f(x)$ 的间断点, 关键是要弄清楚 $f(x)$ 的清晰表达式.

注 2 在应用介值定理时, 关键是要明确对哪个函数在哪个区间上应用, 即 $f(x)=?, [a,b]=?$.

注 3 介值定理对无穷区间也成立, 利用极限的保号性过渡到有限区间上证明.

二、典型例题

例 1 求函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{|x|}{x}$ 的间断点, 并判断其类型.

解 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & x>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x<0.\end{cases}$ 因此 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

例 2 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}$ 的间断点, 并判断其类型.

解

$$f(x)=\begin{cases}x, & x<0;\\ \dfrac{1}{2}, & x=0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$x=0$ 为第一类跳跃间断点.

例 3 设 $F(x,t)=\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$, $x\neq t, (x-1)(t-1)>0$; $f(x)=\lim\limits_{t\to x}F(x,t)$.

证明：$x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型.

证明

$$f(x)=\lim_{t\to x}\left[1+\frac{x-t}{t-1}\right]^{\frac{t-1}{x-t}\cdot\frac{t}{t-1}}=\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}},$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, $x=1$ 为第二类 (无穷) 间断点.

评注 例 1～ 例 3 求间断点时, 关键是要明确函数 $f(x)$ 的表达式.