21世纪高等学校教材

初等积分中的常见问题

邓乐斌 编著

科学出版社

www.sciencep.com

21 世纪高等学校教材

初等积分中的常见问题

邓乐斌　编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书以积分学（主要包括不定积分、定积分、反常积分、重积分、曲线积分、曲面积分等）中容易出现的问题为素材，从众多的教材、教辅或期刊等图书资料中精选出一些具有代表性的典型问题，针对每个问题都作了深入细致的探讨. 在分析问题时，注重了引导性和启迪性，其目的是想让同学们在学习数学分析或高等数学的时候，学习到正确的知识，少走些弯路.

本书可作为理工科学生学习数学分析或高等数学等课程的参考书，也可作为硕士研究生的考试复习资料.

图书在版编目（CIP）数据

初等积分中的常见问题/邓乐斌编著. 一北京：科学出版社，2009

21世纪高等学校教材

ISBN 978-7-03-025968-4

Ⅰ.初… Ⅱ.邓… Ⅲ.积分学一高等学校一教材 Ⅳ.O172.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 200731 号

责任编辑：王雨舸/责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

京山德兴印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 11 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2009 年 11 月第一次印刷 印张：12

印数：1—4 000 字数：281 000

定价：19.80 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

本书所谓的"初等积分",是指大学数学分析和高等数学课程中有关积分学的内容,是相对于近代分析数学中勒贝格(Lebesgue)积分理论的一种说法.

笔者在 20 多年的教学工作中,每学期除了要写教案之外,还准备了一个"集错本"——专门收集学生作业中出现的带有普遍性的问题. 一是为了分析自己教学中存在什么问题可以立即纠正,二是在辅导中马上给同学们讲清楚,以免同学们将错就错,三是有了这些资料,在教下一届同学们的时候有个借鉴:知道这个地方同学们容易出错,应该讲仔细一点,把问题讲清讲透. 多年来,笔者收集了大量的有关数学分析、高等数学等图书、期刊资料,这些资料尤其是一千多篇期刊论文中,有很多文章谈到了现行的数学分析、高等数学教材、考研辅导书等图书资料中出现的一些问题,这些反映出作者真知灼见的文章,像一粒粒珍珠,隐藏于一个个珠蚌之中,我的责任就是把这些"珍珠"收集串联起来,使同学们在本书中就可以很轻易地找到自己感兴趣的问题.

笔者在书中所列举的问题,绝大多数都是一些数学分析、高等数学教材、考研辅导书等图书资料中出现的错误,也有一些问题是历届学生容易出现的. 其用意是想让同学们在学习时不再出现类似的错误、少走些弯路. 目前绝大多数图书资料都是教同学们如何解题即"走什么样的路",而什么样的解题方法是错误的即"什么样的路不能走"却告诉的很少,笔者想在这方面做一个尝试. 本书中所列举的问题正像美玉上的瑕疵一样,我们的责任就是把这些瑕疵去掉,使美玉无瑕,光彩照人.

数学大师们建筑了数学分析这座"大厦",我们没有能力去添砖加瓦,但我们可以做些力所能及的事,那就是去把这座"大厦"上的一点点"灰尘"擦去,使她永远熠熠生辉、更加富丽堂煌.

笔者真心希望同学们在学习数学分析或高等数学的时候,看看本书所讲的问题你是不是也出现了,为什么会出现呢? 书中的问题讲清楚没有? 对你学习有没有帮助? 倘若对你的学习有所帮助的话,那将是笔者最大的欣慰了.

在本书的编写过程中,校长杨立志教授始终给予了热情支持与帮助,科学出版社编辑同志们给予了很多指导和建设性的意见,在此表示衷心的感谢.

书后所列出的参考书目,只是笔者 20 多年来查阅和借鉴的诸多资料中很少的一部分,原因一是篇幅所限;二是很多资料在数次搬家中业已丢失、无从查找,在此表示最真诚的歉意. 在工作和学习中,教我者固然是恩师,这些书刊杂志中的作者,也给予了我知识和智慧,理应也是我的恩师,借此机会,请允许我向这些恩师们

致以最诚挚的感谢.

由于水平所限,笔者在指出别人所犯错误的时候,自己可能自觉或不自觉的出现了不少错误,希望同仁和同学们批评指正;如果同志们有好的问题烦请来信指出,以免有遗珠之憾.

编　者

2009 年 9 月

目　录

第一章 不定积分

第一节 不定积分的基本概念与理论

一、原函数与不定积分

定义 1 设函数 f 与 F 在区间 I 上都有定义，若 $F'(x)=f(x)\ (x\in I)$，则称 F 为 f 在区间 I 上的一个原函数.

例如，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3\ (x\in\mathbf{R})$，$g(x)=x^2\ (x\in\mathbf{R})$ 因为 $f'(x)=g(x)\ (x\in\mathbf{R})$，所以 f 为 g 在实数轴上的一个原函数.

又如，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3\ (x\in\mathbf{R})$，$h(x)=\dfrac{1}{3}x^3+C$（$C$ 为任意实数，$x\in\mathbf{R}$)，由于 $f'(x)=h'(x)=g(x)\ (x\in\mathbf{R})$，所以 f 和 h 都是 g 在实数轴上的原函数.

在原函数定义中，有两点必须要满足：一是 F 与 f 这两个函数在区间 I 都要有定义，这里要强调的是“都要有”；二是在区间 I 上满足

$$F'(x)=f(x)\quad(x\in I).$$

需要注意这个等式成立的条件是：等式左右两边函数的定义区间恰是区间 I，也就是说，等式要在区间 I 上处处成立.

定义 2 函数 f 在区间 I 上的全体原函数为 f 在 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$. 其中，$\int$ 为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，x 为积分变量.

由定义 2 可见，不定积分与原函数之间的关系是总体与个体的关系，是集合与元素之间的关系. 也就是说，若 F 是在 f 区间 I 上的一个原函数，则 f 的不定积分就是一个原函数簇，即 f 的不定积分就是一个函数的集合，即 $\{F+C\,|\,F'(x)=f(x),x\in I\}$，其中 C 为积分常量函数，有的时候，把它作为该常量函数的函数值，在不致混淆时，也常说“C 为任意常数”. 因此，函数 f 在区间 I 上的不定积分应写为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\{F+C\,|\,F'(x)=f(x),x\in I\}. \tag{$*$}$$

为了方便起见,常把 f 的不定积分写为

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

注:"$\int$"是"summa"(和)第一个字母"s"拉长以后的写法,是由莱布尼茨 1684 年创造使用的.

由(*)式可知:对于 f 来说,如果它的不定积分存在,则在其不定积分表达式中,应只含有一个积分常数;而且在(*)式中的函数 F 一定是可导的,当然更是连续的.

这里需要说明的是,在数学分析或高等数学教材中通常所说的"求不定积分",是指用初等函数的形式把这个不定积分表示出来.在此意义下,并不是任意初等函数的不定积分都能"求出来".例如,$\int e^{x^2}\mathrm{d}x$,$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$,$\int(\ln x)^{-1}\mathrm{d}x$,$\int x^{-1}\sin x\mathrm{d}x$,$\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\mathrm{d}x\ (0<k^2<1)$ 等,都无法用初等函数来表示.因此,初等函数的原函数不一定是初等函数,当然这类非初等函数可用积分形式来表示.

二、基本积分公式

1. $\int 0\mathrm{d}x = C$;

2. $\int 1\mathrm{d}x = \int\mathrm{d}x = x + C$;

3. $\int x^\alpha\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha\neq -1, x>0)$;

4. $\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C \quad (x\neq 0)$;

5. $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$;

6. $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a\neq 1, a>0)$;

7. $\int\cos ax\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\sin ax + C \quad (a\neq 0)$;

8. $\int\sin ax\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cos ax + C \quad (a\neq 0)$;

9. $\int\sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$;

10. $\int\csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$;

11. $\int\sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$;

12. $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$；

13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$；

14. $\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C_1$.

需要强调的是：

(1) 在公式 4 中，$x \neq 0$ 是指本公式适用于不含 $x = 0$ 的任何区间. 这是因为，当 $x > 0$ 时，有

$$(\ln|x| + C)' = (\ln x + C)' = \frac{1}{x};$$

当 $x < 0$ 时，有

$$(\ln|x| + C)' = [\ln(-x) + C]' = \frac{1}{x},$$

所以 $\ln|x| + C$ 是函数 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 或 $(-\infty, 0)$ 内的原函数或者是它们子区间上的原函数.

(2) 上述 14 个公式是求积分的基本公式，必须牢牢记住. 它们是求不定积分中最常用的公式，其他函数的不定积分，经过运算变形后，最后归结为这些不定积分，所以必须牢记；否则既学不好不定积分，也无法学好定积分以及重积分等内容. 当然，仅有这些公式是远远不够用的，还有一些积分公式也要尽量熟记，这对求不定积分将会起到较好的作用.

三、基本结论

定理 1　若函数 f 在区间 I 上连续，则 f 在 I 上存在原函数 F，即

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in I).$$

定理 2　设 F 是函数 f 在区间 I 上的一个原函数，其中 C 为任意常量函数，则：

(1) $F + C$ 也是 f 在 I 上的原函数；

(2) f 在 I 上的任意两个原函数之间，只可能相差一个常量函数.

定理 3(达布定理)　若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$，k 为介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任一实数，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = k$.

定理 4　若函数 f 在区间 I 上存在原函数，k 为非零常数，则 kf 在 I 上也存在原函数，且 $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$.

若函数 f 在区间 I 上存在原函数，则当 $k = 0$ 时，kf 在 I 上也存在原函数，且有

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = \int 0\mathrm{d}x = C.$$

定理 5 若函数 f 与 g 在区间 I 上都存在原函数，则 $f \pm g$ 在 I 上也存在原函数，且

$$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 6(第一换元积分法或称为凑微分法) 设 $g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有定义，$u=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta \ (x \in [a,b])$，并记

$$f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x) \quad (x \in [a,b]),$$

若 $g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在原函数 $G(u)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也存在原函数 $F(x) = G[\varphi(x)] + C$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int g(u)\mathrm{d}u$$
$$= G(u) + C = G[\varphi(x)] + C.$$

注：上式可简记为

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int g[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) \xlongequal{u=\varphi(x)} \int g(u)\mathrm{d}u$$
$$= G(u) + C \xlongequal{\text{换回}} G[\varphi(x)] + C.$$

定理 7(第二换元积分法) 设 $g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有定义，$u=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta, x \in [a,b]$，并记 $f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x), x \in [a,b]$，若 $\varphi'(x) \neq 0, x \in [a,b]$，则当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数 $F(x)$，$g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上也存在原函数 $G(u)$ 时，且 $G(u) = F[\varphi^{-1}(u)] + C$，即

$$\int g(u)\mathrm{d}u = \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C = F[\varphi^{-1}(u)] + C.$$

定理 8(分部积分法) 若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导，不定积分 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在，则不定积分 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 也存在，并有

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

注：上式常称为不定积分的分部积分公式，简记为

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

定理 9 若函数 f 在区间 (a,b) 内含有第一类间断点，则 f 在 (a,b) 内不存在原函数.

第二节 不定积分中常见的问题

问题 1 不定积分有哪些不同的定义？

答 不定积分是数学分析或高等数学中的一个非常基本且又十分重要的概念，它是整个积分学的初始篇、基础篇，也是关键篇. 对于不定积分概念理解的深浅，掌握的好坏不仅关系到不定积分本身的学习，而且会影响到积分学后续内容的学习和掌握. 但令人惊讶的是，在现行的一些教材中，对于不定积分的概念各有各的说法，而且是大相径庭，各执一词.

第一种定义：函数 f 在区间 I 上的全体原函数称为 f 在 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

从此定义可以看出，若 $F'(x)=f(x)\ (x\in I)$，则 f 的不定积分是一个函数簇

$$\{F(x)+C\,|\,F'(x)=f(x),x\in I\}\quad (C\text{ 为任意常数}).$$

第二种定义：Goursat(古莎) 所著的《A course in Mathematical Analysis》关于不定积分的定义为：

Every function whose derivative is $f(x)$ is called an indefinite integral of $f(x)$ or a primitive of $f(x)$, and is represented by the symbol $\int f(x)\mathrm{d}x$(导数是 $f(x)$ 的每个函数，称为 $f(x)$ 的不定积分，或称为 $f(x)$ 的原函数，记为$\int f(x)\mathrm{d}x$).

这里，记号$\int f(x)\mathrm{d}x$ 表示 $f(x)$ 的每一个原函数，即表示 $f(x)$ 全体原函数中的每一个，并且 $f(x)$ 的不定积分与 $f(x)$ 任意一个原函数涵义完全相同.

在第一种定义下，$\int f(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 的全体原函数，则有些推导将很难解释，如用分部积分法计算

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x &= \int\cos x\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\cdot\cos x+\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^x\cdot\cos x+\mathrm{e}^x\cdot\sin x-\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x \qquad (1)\end{aligned}$$

于是

$$2\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)+C_1, \qquad (2)$$

$$\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)+C_1.$$

一个问题是：(1) 式中左右两边中的$\int f(x)\mathrm{d}x$ 是同一个函数集合，两个相同的函数集合的并，应该是同一个函数集合，这样(2) 式中的$\int f(x)\mathrm{d}x$ 的系数 2 将无法解释.

另一个问题是:(2) 式中的C_1 是如何加上去的?在大多数的数学分析教材中都这样解释,同一个函数的两个原函数之间彼此相差一个常数,因此应加上一个常数C_1,但是这里$\int f(x)\mathrm{d}x$ 是集合,而不是函数,如果不加C_1,则(2) 式的右边只有一个函数,又不是函数集合,所以也不行.

问题 2 原函数与不定积分的关系如何?

答 不定积分与原函数的关系是总体与个体的关系,即若$F(x)$为$f(x)$在区间 I 上的一个原函数,则 $f(x)$ 在 I 上的不定积分是一个函数簇$\{F(x)+C \mid F'(x)=f(x),x\in I\}$,其中 C 是任意常量函数.

问题 3 分部积分公式有什么用途?怎样应用?

答 分部积分公式是由两个函数乘积的导数公式反转过来的,即

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u,$$

它表示等号两边的原函数集合相等. 这种形式的分部积分公式,既便于记忆,又便于应用.

分部积分法是求不定积分不可缺少的方法之一,例如,在求对数函数 $\ln x$ 的不定积分$\int \ln x\mathrm{d}x$ 时,必须使用分部积分公式,由此可见分部积分法的重要性.

应用分部积分公式的关键是把被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 改写为 u 与 $\mathrm{d}v$ 的乘积 $u\mathrm{d}v$,改写的原则是 $v\mathrm{d}u$ 要比$u\mathrm{d}v$ 简单,即不定积分$\int v\mathrm{d}u$ 更好求,甚至可应用不定积分表中的公式直接得到结果. 应用分部积分公式的困难在此,技巧也在于此. 例如

$$\int \ln x\mathrm{d}x = (\ln x)x - \int x\mathrm{d}\ln x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$$

显然,$v\mathrm{d}u = x\mathrm{d}\ln x = \mathrm{d}x$ 要比$u\mathrm{d}v = \ln x\mathrm{d}x$ 简单,而 $v\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ 的不定积分由不定积分公式表可直接得出结果.

问题 4 在较多的高等数学、数学分析教材或者一些参考资料中,对不定积分的运算法则给出了如下的两个定理,是否正确?

定理 1:若函数 f 在区间 I 上存在原函数,k 为任意实数,则 kf 在 I 上也存在原函数,且有

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

定理 2:若函数 f 和 g 在区间 I 上都存在原函数,k_1 与 k_2 为任意常数,则$k_1 f + k_2 g$ 在 I 上也存在原函数,且有

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1\int f(x)\mathrm{d}x + k_2\int g(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

答 在定理 1 中,因为 k 是任意常数,故 k 当然可以取常数 0,于是有:(1) 式左

边为

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = \int 0\mathrm{d}x = C \quad (C\text{ 为任意常数}),$$

(1) 式右边为

$$k\int f(x)\mathrm{d}x = 0\int f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

这样就有了:任意常数为 0 的错误了.

因此在定理 1 中,k 应为任意非零的常数. 在定理 2 中,取$k_1 = k_2 = 0$时会出现上述同样的错误. 显然在定理 2 中,k_1 和k_2 是两个不同时为零的常数.

问题 5　应用变量代换公式应注意什么问题?

答　变量代换公式是求不定积分经常应用的公式. 变量代换公式是由复合函数的导数公式反转过来的,因此变量代换公式对求不定积分的重要性就和复合函数的导数公式对求导运算的重要性是一样的. 可以这样说,熟练掌握变量代换公式是求不定积分的关键.

变量代换公式有两种用法:① 将函数代换为变量,即第一换元积分法;② 将变量代换为函数,即第二换元积分法.

第二换元积分法与第一换元积分法的换元过程是相反的.

问题 6　有理函数的不定积分在理论上有什么意义?

答　通过求有理函数的不定积分,在理论上证明了有理函数的不定积分(或原函数)总是存在的,而且它的不定积分总是有理函数、对数函数和反正切函数的有限次四则运算或者复合运算所构成的初等函数. 因此,不论是什么样函数的不定积分,只要通过适当的变量代换,都能将被积函数变成有理函数,那么这个不定积分总能用初等函数表示出来. 这在理论上是很有意义的. 例如,有些无理函数和三角函数的形式很复杂,如果通过适当的变量代换,能将它化为有理函数,原则上求这些函数的不定积分问题就算解决了.

从理论上说,求有理函数的不定积分总能用部分分式的方法求得结果,但不能绝对化,有些特殊类型的有理函数的不定积分不用部分分式的方法更为简便.

问题 7　初等函数的原函数是否一定还是初等函数?

答　不一定. 学习过数学分析或高等数学的读者都知道:连续函数都是可积的,即存在原函数. 例如,连续函数e^{-x^2},$\dfrac{\sin x}{x}$,$\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\quad(0<k^2<1)$,$\dfrac{1}{\ln x}$,$\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$,$\sin x^2$ 都存在原函数,但是它们的原函数却不是初等函数,这一点不同于有理函数的原函数仍是有理函数.

换句话说,诸如上述列举的函数都是初等函数,它们的原函数虽然是存在的,但是却不能用初等函数的形式表现出来,或者说,初等函数通过不定积分运算后有

可能不是初等函数. 也正是因为这一现象,人们认识到初等函数的局限性,进而推广初等函数为更一般的函数形式.

问题 8 周期函数的原函数还是周期函数吗?

答 不一定. 例如,$f(x)=1+\cos x$ 是以 2π 为周期的函数,但是它的原函数 $F(x)=x+\sin x+C$ 却不是周期函数,但是可以证明的是,如果 $F(x)$ 是以 T 为周期的可导函数,则其导函数 $f(x)=F'(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

问题 9 如果函数 f 的定义域是几个分离的区间,那么 f 的原函数之间是否仅相差一个常数?

答 不一定. 例如:$f(x)=\cos x$,定义域若为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,函数 $F(x)=\sin x$ 是函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 内的一个原函数,而函数

$$G(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in(-\infty,-1),\\ \sin x+1, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

也是函数 f 在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 内一个原函数,但是

$$G(x)-F(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,-1),\\ 1, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 内却不是一个常数.

从此例可以看到,我们所说的一个函数的原函数是针对某一个区间而言的. 在此意义下,同一个函数的两个原函数之间仅相差一个常数.

问题 10 单调函数的原函数仍是单调函数吗?

答 不一定. 例如,$f(x)=2x\ (-\infty<x<+\infty)$ 是严格单调增加函数,但是它的原函数 $F(x)=x^2+C\ (-\infty<x<+\infty)$ 却不是单调函数.

问题 11 连续奇函数(偶函数)的原函数是否仍为奇函数(偶函数)?

答 (1) 奇函数的原函数一定是偶函数. 简证如下:

设 $f(-x)=-f(x)$,其原函数为 $F(x)$,则有 $F'(x)=f(x)$,且有 $f(x)+f(-x)=0$,由于

$$\begin{aligned}[F(x)-F(-x)]'&=F'(x)-[F(-x)]'\\&=f(x)+F'(-x)=f(x)+f(-x)=0,\end{aligned}$$

所以 $F(x)-F(-x)=C$.

又因为 $C=F(0)-F(0)=0$,从而 $F(x)=F(-x)$,这就证明了 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 为偶函数.

学习过变限积分的知识后,关于本结论可另证如下:

设 $f(-x)=-f(x)$,其原函数为 $F(x)$,则有

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C,$$

于是有

$$
\begin{aligned}
F(-x)&=\int_a^{-x}f(t)\mathrm{d}t+C=\int_{-a}^{x}f(-u)\mathrm{d}(-u)+C\\
&=\int_{-a}^{a}f(u)\mathrm{d}u+\int_a^x f(u)\mathrm{d}u+C\\
&=\int_a^x f(u)\mathrm{d}u+C=F(x).
\end{aligned}
$$

由于 $F(x)$ 是 $f(x)$ 任意一个原函数，所以连续的奇函数的一切原函数均为偶函数.

(2) 偶函数的原函数不一定是奇函数. 例如，$f(x)=x^2$ $(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数，但是它的原函数 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ $(C\neq 0)$ 却不是奇函数，但是可以证明如下结论：偶函数 $f(x)$ 的原函数中只有一个是奇函数.

证 1 设 $f(-x)=f(x)$，$F'(x)=f(x)$，于是有

$$
\begin{aligned}
[F(x)+F(-x)]'&=F'(x)+[F(-x)]'\\
&=f(x)-F'(-x)=f(x)-f(-x)=0,
\end{aligned}
$$

所以 $F(x)+F(-x)=C$ (C 为任意常数).

若要 $F(-x)=-F(x)$，则必须满足 $C=0$，才有偶函数的原函数为奇函数.

证 2 设 $f(-x)=f(x)$，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ (C 为任意常数)，由于

$$
\begin{aligned}
F(-x)&=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t+C=\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C\\
&=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=-\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C\right]+2C\\
&=-F(x)+2C
\end{aligned}
$$

若要 $F(-x)=-F(x)$，则必须满足 $2C=0$，即 $C=0$，这也证明了偶函数的所有原函数中只有一个是奇函数.

问题 12 在 $[a,b]$ 上的可积函数 $f(x)$ 是否一定存在原函数?

答 不一定. 例如，符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上只有一个间断点，学习过数学分析的读者都知道这样一个定理：具有有限个间断点的有界函数一定可积，因而符号函数 $\operatorname{sgn}x$ 在 $[-1,1]$ 上肯定是可积的. 但是另一方面我们知道(本章第一节定理 9)，具有第一类间断点的函数不存在原函数，显然符号函数的间断点 $x=0$ 为第一类间断点，故符号函数在 $[-1,1]$ 上不存在原函数.

问题 13 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数，那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是否一定可积?

答 不一定. 例如

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$F(x)$在$[-1,1]$上可导，且有$F'(x)=f(x)$，即函数$F(x)$为$f(x)$在$[-1,1]$上的一个原函数，也即函数$f(x)$在$[-1,1]$上存在原函数，但是由于$f(x)$在$[-1,1]$上无界，所以$f(x)$在$[-1,1]$上不可积.

综合问题12与问题13可知，函数$f(x)$在$[a,b]$上可积和函数$f(x)$在$[a,b]$上存在原函数是两个不同的概念，它们之间没有什么必然的联系.

问题14 若$f(x)$在某区间内不连续，则在这个区间内$f(x)$一定不存在原函数，这句话对吗？

答 不正确. 例如

$$f(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$(-1,1)$内不连续，$x=0$为其第二类间断点，但是它存在原函数

$$F(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

我们说过连续函数一定存在原函数，这说明函数连续是其存在原函数的充分条件而非必要条件.

问题15 若$f(x)\leqslant g(x)$，则$\int f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int g(x)\mathrm{d}x$是否正确？

答 不正确. 错误的原因表现在两个方面：其一，$f(x)$与$g(x)$的原函数不一定存在，如果原函数都不存在，那么比较其大小也无从谈起；其二，即使两个原函数都存在，我们知道：$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$（$C$为任意常数），$\int g(x)dx=G(x)+C$（$C$为任意常数）、这里假设$F'(x)=f(x)\ (x\in I)$，$G'(x)=g(x)\ (x\in I)$，显然$\int f(x)\mathrm{d}x$与$\int g(x)\mathrm{d}x$分别表示两个函数簇，不能比较大小.

问题16 初等函数在其定义域内一定存在原函数的说法正确吗？

答 不正确. 因为初等函数的定义域可能是离散的点集，此时显然不存在原函数，例如，$f(x)=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\sin x}$的定义域为$D_1=\{x\,|\,x=k\pi,k\text{为整数}\}$；$g(x)=\sqrt{\sin x-1}$的定义域为$D_2=\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\text{为整数}\right\}$，$D_1$与$D_2$均为离散的孤立点集，故定义在$D_1$上的$f(x)$和定义在$D_2$上$g(x)$都不存在原函数.

问题17 $\int 0\mathrm{d}x=0$对吗？