中山大学自然科学论文选

SELECTED RESEARCH WORKS ON NATURAL SCIENCES OF SUN YATSEN UNIVERSITY

1955——1978

中 山 大 学 学 报 编 辑 部

THE EDITORIAL STAFF OF THE JOURNAL OF SUN YATSEN UNIVERSITY

1 9 7 9

目　录

（分学科按发表年月先后排列）

CONTENTS

一类微分方程組在一个临界情形中的解的稳定条件*

许 淞 庆

（数学力学系）

1．考虑下列扰动运动微分方程组：

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{\sigma=1}^{n}\left(p_{s\sigma}+\frac{1}{t^{\gamma}}q_{s\sigma}(t)\right)x_{\sigma}+X_s^{(1)}\ (x_1\cdots,x_n)+$$

$$\frac{1}{t^{\gamma}}X_s^{(2)}\ (x_1,\cdots,x_n,t),\qquad (s=1,\cdots,n)\tag{1}$$

其中 γ 及 $p_{s\sigma}\ (s,\sigma=1,\cdots,n)$ 为实常数，且$\gamma>0$，而$q_{s\sigma}(t)\quad (s,\sigma=1,\cdots,n)$为实变数 t 之实函数，当一切$t\geqslant T>0$时定义、连续及有界；$X_s^{(1)}\ (s=1,\cdots,n)$为$x_1,\cdots x_n$之正则函数，其展开式不含低于二次之项，并具实常数系数；至于$X_s^{(2)}\ (s=1,\cdots,n)$为$x_1,\cdots,\ x_n$之正则函数，其按$x_1\cdots,\ x_n$之幂的展开式为：

$$X_s^{(2)}(x_1,\cdots,x_n,t)=\sum_{m_1+\cdots+m_n\geqslant 2}R_s^{(m_1,\cdots,m_n)}\ x_1^{m_1}\cdots\ x_n^{m_n}$$

此处系数 $R_s^{(m_1,\cdots,m_n)}$ 为t之连续函数，当一切$t\geqslant T>0$时有界，并使得对于一切$t\geqslant T>0$ 函数 $X_s^{(2)}$为$x_1,\cdots,\ x_n$ 之一致正则函数[1]。

为了叙述方便，今后将称这样的函数$X_s^{(2)}$为满足条件(L)。

本文目的在于研究组(1)的平凡解即未被扰动运动$x_1=\cdots=x_n=0$ 在下述情形中的稳定性：设对应于矩阵$\|p_{s\sigma}\|$的特征方程有一个零根而其余一切根均具有负实数部分。

如所周知，在所作的假定下，利用非奇异的常数实系数线性变换，永远可以把组(1)变成另一个方程组，使有等式[1]

$$p_{s1}=p_{1s}=0\quad (s=1,\cdots,n)。$$

---

* 原载数学学报第10卷第2期(1960年)。

设这变换已经完成，则组(1)可写成下列形式。

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{1}{t^r}\sum_{\sigma=1}^{n}q_{1\sigma}(t)x_\sigma+X_1^{(1)}(x_1,\cdots,x_n)+\frac{1}{t^r}X_1^{(2)}(x_1,\cdots,x_n,t),$$

$$\frac{dx_s}{dt}=\frac{1}{t^r}q_{s1}(t)x_1+\sum_{\sigma=2}^{n}\left(p_{s\sigma}+\frac{1}{t^r}q_{s\sigma}(t)\right)x_\sigma+X_s^{(1)}(x_1,\cdots,x_n)+$$

$$+\frac{1}{t^r}X_s^{(1)}(x_1,\cdots,x_n,t).\quad (s=2,\cdots,n) \tag{2}$$

此时特征方程

$$\begin{vmatrix} p_{22}-\mathfrak{H}\cdots p_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n2}\cdots p_{nn}-\mathfrak{H} \end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

的根均将具有负实数部分。如果把这 些 根表为$\mathfrak{H}_s=-\lambda_s+i\mu_s(s=2,\cdots,n)$， 则有$\lambda_s>0\quad(s=2,\cdots n)$。

为了研究组(2)的稳定性问题，让我们先考虑对应于组(2)的线性齐次微分方程组的解的结构。此方程组为

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{1}{t^r}\sum_{\sigma=1}^{n}q_{1\sigma}(t)x_\sigma,$$

$$\frac{dx_s}{dt}=\frac{1}{t^r}q_{s1}(t)x_1+\sum_{\sigma=2}^{n}\left(p_{s\sigma}+\frac{1}{t^r}q_{s\sigma}(t)\right)x_\sigma\quad(s=2,\cdots,n)。\tag{2'}$$

巴索夫证明组(2′)有如下形式的解[2,2]:

$$x_1^{(1)}=e^{\phi(t)}(1+v_1(t)),\quad x_s^{(1)}=t^{-r}e^{\phi(t)}v_s(t)\quad(s=2,\cdots n),\tag{4}$$

此处$v_1(t)=t^{-[(k+1)r-1]}w_1(t)$，$v_s(t)$及$w_1(t)\quad(s=2,\cdots,n)$均为 t 之有界函数，

$$\phi(t)=\begin{cases}0 & \text{当}\gamma>1\\ \displaystyle\int_T^t\frac{q_{11}(t)}{t^r}dt & \text{当}\tfrac{1}{2}<\gamma\leqslant 1,\\ \displaystyle\int_T^t\frac{1}{t^r}\left[q_{11}(t)+\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{\sigma=2}^{n}q_{1\sigma}(t)\frac{a_\sigma^{(l)}(t)}{t^{lr}}\right]dt & \text{当}0<\gamma\leqslant\tfrac{1}{2},\end{cases}\tag{5}$$

此处 k 为整数，满足不等式

$$k\gamma\leqslant 1<(k+1)\gamma,\tag{6}$$

而 $a_\sigma^{(l)}(t)$为 t 之有界函数，其构造方法见论文[2,3]。

从表示式(4)看到，当$t\to+\infty$时$v_1(t)\to 0$，故总可以选取这样大的数 $t_0\geqslant T$，使当 $t\geqslant t_0$时有$|v_1(t)|>\frac{1}{2}$。今后将只考虑这些 t 值。

至于组(2′)的稳定性问题，已为巴索夫*解决[4]。

2．在过渡到研究被提出的问题之前，让我们先建立一些引理。

引理1．设扰动运动微分方程组有如下形式：

$$\frac{dx_1}{dt}=q_{12}x_2+\cdots+q_{1n}x_n+X_1(x_1,\cdots,x_n,t),$$

$$\frac{dx_s}{dt}=\gamma_{s2}x_2+\cdots\gamma_{sn}x_n+X_s(x_1,\cdots,x_n,t),\qquad(s=2,\cdots,n)\tag{7}$$

此处$X_s(s=1,\cdots,n)$为满足条件(L)的函数，且

$$X_s(x_1,0,\cdots,0,t)\equiv0;\tag{8}$$

而$\gamma_{s\sigma}=p_{s\sigma}+\frac{1}{t^{\gamma}}q_{s\sigma}$，其中$\gamma>0$，$p_{s\sigma}$为那样的常数，使

$$\begin{vmatrix} p_{22}-\mathfrak{H}\cdots p_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ p_{n2}\cdots p_{nn}-\mathfrak{H}\end{vmatrix}=0\tag{3}$$

的一切根均具有负实数部分者，$q_{1\sigma},q_{s\sigma}$ $(s,\sigma=2,\cdots,n)$为t之连续函数，当$t\geqslant t_0$时有界。那末，对于组(7)未被扰动运动为稳定，且组(7)确定一连续系列的驻定运动：

$$x_1=C,x_2=\cdots=x_n=0,$$

此处C为任意常数，未被扰动运动亦属于这一系列。该系列中凡充分接近于未被扰动运动的一切运动均将为稳定的。此时如果扰动充分小，任何被扰动运动均将渐近地各趋于该系列驻定运动中的一支。

证　考虑方程组

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{\sigma=2}^{n}p_{s\sigma}x_\sigma,\quad(s=2,\cdots,n)\tag{*}$$

由于$p_{s\sigma}$的上述性质，显然有定正的二次型$V(x_2,\cdots,x_n)$存在[1]，使根据(*)计算得来的V的全导数

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{s=2}^{n}\sum_{\sigma=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}p_{s\sigma}x_\sigma=-W(x_2,\cdots,x_n),$$

其中$W(x_2,\cdots,x_n)$为定正二次型。

现在根据(7)的第二个方程的对应线性齐次方程计算V的全导数，得：

$$\sum_{s=2}^{n}\sum_{\sigma=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}r_{s\sigma}x_\sigma=-W(x_2,\cdots,x_n)+\frac{1}{t^{r}}\sum_{s=2}^{n}\sum_{\sigma=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}q_{s\sigma}x_\sigma.$$

容易看见这是一个定负二次型[1)]，因为当t足够大时，后一个和不影响它的符号。

注意到$X_s(s=1,\cdots,n)$满足条件(L)及(8)，知道组(7)满足马尔金论文[5]中§11的定理的一切条件，于是本引理成立。

引理 2. 设有微分方程组

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{1}{t^{\sigma}}X_1(x_1,\cdots,x_n,t),\ a>1。$$

$$\frac{dx}{dt}=\mathscr{H}_s x_s+X_s(x_1,\cdots x_n,t),\ (s=2,\cdots,n) \tag{9}$$

此处$\mathscr{H}_s=-\lambda_s+i\mu,\lambda>0\ (s=2,\cdots,n)$；而$X_s(x_1,\cdots,x_n,t)\ (s=1,\cdots,n)$具下列性质：

1° X_s定义并连续于区域：

$|x_s|\leqslant A,\quad t\geqslant t_0>1$ 。

2° 在该区域中有

$|X_s|\leqslant M\ (M>0)$，且$M\leqslant\lambda A,\ \lambda=min(\lambda_2,\cdots,\lambda_n)(s=1,\cdots,n)$。

3° $|X_s(x_1',\cdots,x_n',t)-X_s(x_1'',\cdots,x_n'',t)|\leqslant l\{|x_1'-x_1''|+\cdots+|x_n'-x_n''|\}$，$(s=1,\cdots,n)$ 其中 $|x_\sigma'|\leqslant A,|x_\sigma''|\leqslant A\ (\sigma=1,\cdots,n),l>0$为常数。

4° $lnN<1$，其中$N=\max\left(\frac{1}{a-1},\ \frac{1}{\lambda}\right)$，

则组(9)有如下形式的解：

$$x_1=c+\frac{1}{t^{a-1}}\varphi_1(c,t),x_s=\varphi_s(c,t),\ (s=2,\cdots,n)$$

此处c为任意常数，而在区域

$|c|<C\leqslant A\ (C>0),1<t_0\leqslant t$

中函数$\varphi_s(c,t)\ (s=1,\cdots,n)$为有界，且当$t\to t_0$时，有$\varphi_s(c,t)\to 0(s=2,\cdots,n)$

证 取初值条件如下：

当$t=+\infty$时，$x_1=x_1^{(0)}=c$；当$t=t_0$时，$x_s=x_s^{(0)}=0\ (s=2,\cdots,n)$。

于是具有这初值的微分方程组(9)相当于下列积分方程组：

$$x_1=c+\int_{+\infty}^{t}\frac{1}{\tau^a}X_1(x_1,\cdots,x_n,\tau)\,d\tau,$$

$$x_s=e^{\mathscr{H}_s t}\int_{t_0}^{t}e^{-\mathscr{H}_s\tau}X_s(x_1,\cdots,x_n,\tau)d\tau,\quad(s=2,\cdots,n) \tag{10}$$

按迭代法求(10)的解，得

---

1) 在 $t\geqslant t_0>0$ 之下，我們可以取更普遍的定正二次型$\overline{V}=(1+e^{-t})V$代替V，因而得 定正二次型$\overline{W}=(1+e^{-t})W+e^{-t}V$代替$W$。于是对应的$\overline{V}$ 的导数为

$$\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}+\sum_{s=2}^{n}\sum_{\sigma=2}^{n}\frac{\partial\overline{V}}{\partial x_s}r_{\sigma s}x_\sigma=-\overline{W}+\frac{1}{t^r}\sum_{s=2}^{n}\sum_{\sigma=2}^{n}\frac{\partial\overline{V}}{\partial x_s}q_{s\sigma}x_\sigma$$

亦仍为定負二次型。

$$x_1^{(k)}=c+\int_{+\infty}^{t}\frac{1}{\tau}X_1\left(x_1^{(k-1)},\cdots,x_n^{(k1)},\tau\right)d\tau,$$

$$x_s^{(k)}=e^{\mathfrak{H}_s t}\int_{t_0}^{t}e^{-\mathfrak{H}_s\tau}X\left(x_1^{(k-1)},\cdots,x_n^{(k-1)},\tau\right)d\tau\quad(s=2,\cdots,n)。\qquad(11)$$

我们要证明 $x_s^{(k)}$ $(s=1,\cdots,n)$在所有$t\geqslant t_0$下一致收敛于极限函数x_s $(s=1,n,\cdots)$，而后者满足组(10)及已给的初值条件。为此目的，须证明级数：

$$x_1=c+\left(x_1^{(1)}-c\right)+\left(x_1^{(2)}-x_1^{(1)}\right)+\cdots+\left(x_1^{(k)}-x_1^{(k-1)}\right)+\cdots,$$

$$x_s=x_s^{(1)}+\left(x_s^{(2)}-x_s^{(1)}\right)+\cdots+\left(x_s^{(k)}-x_s^{(k-1)}\right)+\cdots(s=2,\cdots,n)\qquad(12)$$

绝对一致收敛，当$t\geqslant t_0$.

让我们先证明在假定$|c|<C\leqslant A$之下，当t_0相当大，使

$$|c|+\frac{M}{a-1}\cdot\frac{1}{t_0^{-1}}\leqslant A$$

时，有

$$|x_s^{(k)}|\leqslant A\quad(s=1,\cdots,n;k=1,2\cdots)\ .\qquad(13)$$

事实上，根据初值条件，即知$|x_s^{(0)}|<A$，现在假定$|x_s^{(k-1)}|\leqslant A$，求证$|x_s^{(k)}|\leqslant A$.

从(11)得估值

$$|x_1^{(k)}|\leqslant|c|+M\left|\int_{+\infty}^{t}\frac{1}{\tau^a}d\tau\right|=|c|+M\cdot\frac{1}{a-1}\cdot\frac{1}{t^{-1}}\leqslant$$

$$\leqslant|c|+M\cdot\frac{1}{a-1}\ \frac{1}{t_0^{-1}}\leqslant A,$$

$$|x_s^{(k)}|\leqslant Me^{-\lambda_s t}\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_s\tau}d\tau=M\cdot\frac{1}{\lambda_s}\left(1-e^{-\lambda_s(t-t_0)}\right)<\frac{M}{\lambda_s}\leqslant\frac{M}{\lambda}\leqslant A.$$

$$(s=2,\cdots,n)$$

故在所作假定下，不等式(13)恒成立。

其次，由(11)得

$$|x_1^{(1)}-c|\leqslant\int_t^{+\infty}\frac{1}{\tau^a}|X_1(c,0,\cdots,0,\tau)|d\tau\leqslant M\int_t^{+\infty}\frac{1}{\tau^a}d\tau=$$

$$=M\cdot\frac{1}{a-1}\cdot\frac{1}{t^{a-1}}\leqslant\frac{MN}{t^{a-1}},$$

$$|x_s^{(1)}|\leqslant e^{-\lambda_s t}\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_s\tau}|X_s(c,0,\cdots,0,\tau)|d\tau\leqslant Me^{-\lambda_s t}\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_s\tau}d\tau=$$

$$=\frac{M}{\lambda_s}\left(1-e^{-\lambda_s(t-t_0)}\right)<\frac{M}{\lambda_s}\leqslant MN\quad(s=2,\cdots,n).$$

同样，计及$t \geqslant t_0 > 1$，得

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| \leqslant \int_t^{+\infty} \frac{1}{\tau^\alpha} |X_1(x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}, \tau) - X_1(c, 0, \cdots, 0, \tau)| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant l \int_t^{+\infty} \frac{1}{\tau^\alpha} \{ |x_1^{(1)} - c| + |x_2^{(1)}| + \cdots + |x_n^{(1)}| \} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant l \int_t^{+\infty} \frac{1}{\tau^\alpha} \left[\frac{MN}{\tau^{\alpha-1}} + (n-1)MN \right] d\tau < MlnN \int_t^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^\alpha} =$$

$$= MlnN \cdot \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}} \leqslant MlnN^2 \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}},$$

$$|x_s^{(2)} - x_s^{(1)}| \leqslant e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s t} |X_s(x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}, \tau) - X(c, 0, \cdots, 0, \tau)| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant l e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s t} \left[\frac{MN}{\tau^{\alpha-1}} + (n-1)MN \right] d\tau <$$

$$< MlnN e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s \tau} d\tau = MlnN \cdot \frac{1 - e^{-\lambda_s (t-t_0)}}{\lambda_s} <$$

$$< MlnN \cdot \frac{1}{\lambda_s} \leqslant MlnN^2 \quad (s = 2, \cdots, n).$$

应用数学归纳法，可以证实当k为任何正整数时，下列估值成立.

$$|x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}| < Ml^{k-1}n^{k-1}N^k \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}}, \tag{14}$$

$$|x_s^{(k)} - x_s^{(k-1)}| < Ml^{k-1}n^{k-1}N^k. \quad (s = 2, \cdots, n)$$

因此，级数(12)在一切$|c| < C, t \geqslant t_0$之下，分别以下列几何级数为其优级数：

$$c + \frac{1}{t^{\alpha-1}} [MN + MlnN^2 + \cdots + Ml^{k-1}n^{k-1}N^k + \cdots],$$

$$MN + MlnN^2 + \cdots + Ml^{k-1}n^{k-1}N^k + \cdots.$$

而当l充分小，使$lnN < 1$时，这些级数是收敛的，所以级数(12)对于一切$t \geqslant t_0$(t_0足够大，且大于1)为绝对一致收敛，并当$t \geqslant t_0$时表示组(10)的解，因而也就是具有给定初值的组(9)的解，从估值(14)推知，这解可写成如下形式：

$$x_1 = c + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_1(c, t), x_s = \varphi_s(c, t), \quad (s = 2, \cdots, n)$$

其中$\varphi_s(c,t)$ $(s = 1, \cdots, n)$在区域$|c| < C$, $t \geqslant t_0$中为有界，且当$t \to t_0$时，有$\varphi_s(c,t) \to 0$ $(s = 2, \cdots, n)$.引理证毕.

现在考虑下列形式的微分方程组：

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{t^\alpha} [q_{12}x_2 + \cdots + q_{1n}x_n + X_1(x_1, \cdots, x_n, t)],$$

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + \frac{1}{t^\beta}(q_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n) + \tag{15}$$

$$+X_s(x_1,\cdots,x_n,t),\quad (s=2,\cdots,n)$$

此处$X_s(x_1,\cdots,x_n,t)(s=1,\cdots,n)$为满足条件$(L)$的函数，$\alpha,\beta$及$p_{s\sigma}(s,\sigma=2,\cdots,n)$为实常数，而且$p_{s\sigma}$使方程式

$$\begin{vmatrix} p_{22}-\mathfrak{K}\cdots p_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n2}\cdots P_{nn}-\mathfrak{K} \end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

的根均具有负实数部分；$q_{s\sigma}(s=1,\cdots,n;\ \sigma=2,\cdots,n)$为$t$的连续实函数，当一切$t\geqslant t_0$时为有界.

引理 3　如果$\alpha>1,\beta>0$,则组(15)有如下形式的解：

$$x_1=c+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1(c,t),\quad x_s=\varphi_s(c,t)\quad (s=2,\cdots,n) \tag{16}$$

此处c为任意常数，函数$\varphi_s(c,t)(s=1,\cdots,n)$在区域$|c|<C,t\geqslant t_0>1$中为有界，且当$t\to t_0$时，$\varphi_s(c,t)\to 0\ (s=2,\cdots,n)$.

证　首先要注意到可以把$q_{s\sigma}$看成为当$t\to+\infty$时趋于零,因为如果设α_1,β_1是这样的数，使$1<\alpha_1<\alpha,0<\beta_1<\beta$,便有

$$\frac{1}{t^{\alpha}}=\frac{1}{t^{\alpha_1}}\cdot\frac{1}{t^{\alpha-\alpha_1}},\quad \frac{1}{t^{\beta}}=\frac{1}{t^{\beta_1}}\cdot\frac{1}{t^{\beta-\beta_1}}.$$

如果把因子$\dfrac{1}{t^{\alpha-\alpha_1}}$归入系数$q_{1\sigma}$,把$\dfrac{1}{t^{\beta-\beta_1}}$归入系数$q_{s\sigma}$,则新系数

$$\bar{q}_{1\sigma}=\frac{1}{t^{\alpha-\alpha_1}}q_{1\sigma},\ \bar{q}_{s\sigma}=\frac{1}{t^{\beta-\beta_1}}q_{s\sigma},\ (s,\sigma=2,\cdots,n)$$

当$t\to+\infty$时将趋于零，而组(15)的形式依旧，盖因$\alpha_1>1,\beta_1>0$.

所以对于任意给定$l>0$,永远可取t_0足够大，使当$t\geqslant t_0$时，有

$$|q_{s\sigma}|\leqslant\frac{l}{3}(s=1,\cdots,n;\sigma=2,\cdots,n).$$

其次,我们只须证明本引理当(15)取下列形式时成立：

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=\frac{1}{t^{\alpha}}[q_{12}x_2+\cdots+q_{1n}x_n+X_1(x_1,\cdots,x_n,t)],\\ \frac{dx_s}{dt}&=\sigma_{s-1}x_{s-1}+\mathfrak{K}_sx_s+\frac{1}{t}(q_{s2}x_2+\cdots+q_{sn}x_n)\\ &\quad+X_s(x_1,\cdots,x_n,t),\qquad(s=2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{17}$$

此处$\mathfrak{K}_s=-\lambda_s+i\mu_s\ (\lambda_s>0)(s=2,\cdots,n)$为方程式(3)的根，$\sigma_{s-1}$或等于1或等于0(但$\sigma_1=0$).因为经过关于变数$x_2\cdots,x_n$的带常系数的非奇异线性变换，永远可以把组(15)化为形式(17).

还有，我们可以变换组(17)，令

$$x_1=y_1,\quad x_s=\xi^{n-s+1}y,\quad(s=2,\cdots,n)$$

此处ξ为常数，如果选择ξ充分小，将可使变换后的方程组中，y_{s-1}的对应系

数$\overline{\sigma}_{s-1}(=\xi\sigma_{s-1})$为任意小，而$q_{s\sigma}$及$X_s$保持原来的性质。

因此可以假定在(17)中σ_{s-1}满足条件：

$$|\sigma_{s-1}|\leqslant\frac{l}{3},\ (s=2,\cdots,n)$$

而l为任意给定的正数。

现在，令

$$\overline{X}_1(x_1,\cdots,x_n,t)=q_{12}x_2+\cdots+q_{1n}x_n+X_1(x_1,\cdots,x_n,t),$$

$$\overline{X}_s(x_1,\cdots,x_n,t)=\sigma_{s-1}x_{s-1}+\frac{1}{t^\beta}(q_{s2}x_2+\cdots+q_{sn}x_n)+$$

$$+X_s(x_1,\cdots,x_n,t)\quad(s=2,\cdots,n),$$

则(17)取形式

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{1}{t^a}\overline{X}_1(x_1,\cdots x_n,t),\tag{17'}$$

$$\frac{dx_s}{dt}=\mathscr{H}_s x_s+\overline{X}_s(x_1,\cdots,x_n,t)\quad(s=2,\cdots,n).$$

由于$X_s(s=1,\cdots,n)$满足条件(L)，它按$x_1,\cdots,x_n$的幂的展开式不含低于二次之项，故对应于正数$\frac{\lambda}{2\sqrt{n}}$总可以选取$A>0$足够小，使当

$$|x_s|\leqslant A,\ t\geqslant t_0$$

时有

$$|X_s|\leqslant\frac{\lambda}{2\sqrt{n}}\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\leqslant\tfrac{1}{2}\lambda A\quad(s=2,\cdots,n).$$

此外，根据$X_s(s=1,\cdots,n)$的同样性质，对于任意给定的$l>0$，只要取A相当小，当$t\geqslant t_0$及

$$|x'_\sigma|\leqslant A,\quad|x''_\sigma|\leqslant A,\ (\sigma=1,\cdots,n)$$

时，一定可以产生不等式

$$|X_s(x'_1,\cdots,x'_n,t)-X_s(x''_1,\cdots,x''_n,t)|\leqslant\frac{l}{3}\{|x'_1-x''_1|+\cdots+|x'_n-x''_n|\}$$

$$(s=1,\cdots,n).$$

注意到$|\sigma_{s-1}|\leqslant\frac{l}{3}$，$|q_{s\sigma}|\leqslant\frac{l}{3}$，显见对应于任意给定的$l>0$可选取$t_0>1,A>0$，使当$t\geqslant t_0,|x'_\sigma|\leqslant A,|x''_\sigma|\leqslant A$时，$\overline{X}_s$满足下面条件：

$$|\overline{X}_s(x'_1,\cdots,x'_n,t)-\overline{X}_s(x''_1,\cdots,x''_n,t)|\leqslant l\{|x'_1-x''_1|+\cdots+|x'_n-x''_n|\}$$

$$(s=1,\cdots,n).$$

现在选l为足够小的正数，使$l_nN<1$，此处$N=\max\left(\frac{1}{a-1},\frac{1}{\lambda}\right)$，$\lambda=$

$\min(\lambda_2,\cdots\lambda_n)$则有$|\overline{X_s}|<\lambda A$,而组(17′)满足引理2中关于组(9)的一切条件，由此本引理得到证明.

附注 根据本引理关于X_s $(s=1,\cdots,n)$的假定，易见$\overline{X}_s(0,\cdots,0,t)\equiv0$,且$\overline{X_s}(c,0,\cdots0,t)$对于一切$t\geqslant t_0$为$c$的一致正则函数，且按$c$之幂的展开式不含低于二次之项。因此,在应用引理2的迭代法以证明(17′)有形式为$x_1=c+\frac{1}{t^{a-1}}\varphi_1(c,t)$, $x_s=\varphi_s(c,t)$ $(s=2,\cdots,n)$的解存在时，注意这一性质和级数(12)对于所有$t\geqslant t_0$的绝对一致收斂性，不难证明：$\varphi_s(c,t)$ $(s=1,\cdots,n)$对于一切$t\geqslant t_0$为c之一致正则函数，且可写为

$$\varphi_s(c,t)=u_s^{(2)}c^2+u_s^{(3)}c^3+\cdots\quad(s=1,\cdots,n)\tag{18}$$

此处$u_s^{(k)}$ $(s=1,\cdots,n;k=2,3,\cdots)$当一切$t\geqslant t_0$时为$t$之有界连续函数。事实上，因已知$\varphi_s(c,t)$有界，故有$|\varphi_s(c,t)|<L$, 又$\varphi_s(c,t)$对于一切$t\geqslant t_0$为$c$之一致正则函数，故有$|u_s^{(k)}|<\frac{L}{C^k}(|c|<C)$,即$u_s^{(k)}$有界。

引理4 如果扰动运动方程组有形式(15)，又如果$\alpha>1,\beta>0$，则未被扰动运动为稳定。此外，有一连续系列的有界运动(16)存在，未被扰动运动亦属于这一系列，而该系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动均为稳定。且在充分小的扰动下，任何扰动运动均将渐近地各趋于该系列有界运动中的一支。

证 取组(15)的解(16)，并在(15)中引入变换，令：

$$x_1=y_1+\frac{1}{t^{a-1}}\varphi_1(y_1,t),\ x_s=y_s+\varphi_s(y_1,t)\quad(s=2,\cdots,n).\tag{19}$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t^{a-1}}\varphi_1(y_1,t)\equiv\frac{1}{t^a}\Big[q_{12}\varphi_2(y_1,t)+\cdots+q_{1n}\varphi_n(y_1,t)+$$
$$+X_1\Big(y_1+\frac{1}{t^{a-1}}\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,t\Big)\Big],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_s(y_1,t)\equiv r_{s2}\varphi_2(y_1,t)+\cdots+r_{sn}\varphi_n(y_1,t)+$$
$$+X_s\Big(y_1+\frac{1}{t^{a-1}}\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,t\Big),\quad(s=2,\cdots,n)$$

得新方程组：

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{1}{t}[q_{12}y_2+\cdots+q_{1n}y_n+Y_1(y_1,\cdots y_n,t)]\cdot\frac{1}{D},\tag{20}$$

$$\frac{dy_s}{dt}=r_{s2}y_2+\cdots+r_{sn}y_n+Y_s(y_1,\cdots,y_n,t),(s=2,\cdots,n)$$

此处 $r_{s\sigma}=p_{s\sigma}+\frac{1}{t^{\alpha}}q_{s\sigma}$ $(s,\sigma=2,\cdots,n)$.

$$Y_1(y_1,\cdots y_n,t)=X_1\left(y_1+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1,y_2+\varphi_2\cdots y_n+\varphi_n,t\right)-$$

$$-X_1\left(y_1+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\ t\right),$$

$$Y_s(y_1,\cdots,y_n,t)=X_s\left(y_1+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1,y_2+\varphi_2,\cdots,y_n+\varphi_n,t\right)-$$

$$-X_s\left(y_1+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1\varphi_2,\cdots,\varphi_n,t\right)-\frac{\partial\varphi_s}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt},\ (s=2,\cdots,n)$$

$$D=1+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}.$$

由此可见 $Y_s(y_1,0,\cdots,0,t)\equiv0\quad(s=1,\cdots,n)$.

注意到引理 3 的附注关于 $\varphi_s(y_1,t)(s=1,\cdots,n)$ 的性质(18)，可写：

$$\frac{1}{D}=1+y_1\phi_1(y_1,t),\frac{\partial\varphi_s}{\partial y_1}=y_1\phi_s(y_1,t),(s=2,\cdots,n)$$

此处 $\phi_s(y_1,t)$ $(s=1,\cdots,n)$ 对于一切 $t\geqslant t_0$ 及 $|y_1|$ 足够小时，为 y_1 的一致正则函数。

所以(20)可写成：

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{1}{t^{\alpha}}[q_{12}y_2+\cdots+q_{1n}y_n+\bar{Y}_1(y_1,\cdots,y_n,t)],\tag{21}$$

$$\frac{dy_s}{dt}=r_{s2}y_2+\cdots+r_{sn}y_n+Y_s(y_1,\cdots,y_n,t),\ (s=2,\cdots,n)$$

此处 $\bar{Y}_1(y_1,\cdots,y_n,t)=Y_1+[q_{12}y_2+\cdots+q_{1n}y_n+Y_1]\cdot y_1\phi_1(y_1,t)$.

显然，$\bar{Y}_1$ 及 Y_s $(s=2,\cdots,n)$ 对于一切 $t\geqslant t_0$ 及 $|y_s|(s=1\cdots,n)$ 足够小时为 $y_1,\cdots,y_n$ 的一致正则函数，其按 $y_1,\cdots,y_n$ 的幂的展开式不含低于二次之项，且

$$\bar{Y}_1(y_1,0,\cdots,0,t)\equiv Y_s(y_1,0,\cdots,0,t)\equiv0\ (s=2,\cdots,n).$$

因此，对于组(21)，引理 1 的一切条件均被满足。由此推知(21)的未被扰动运动为稳定，且(21)有解：

$$y_1=c,\quad y_2=\cdots=y_n=0\tag{22}$$

对应于一连续系列的驻定运动，其中 c 为任意常数。未被扰动运动亦属于这一系列。该系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动均为稳定。此时，如果扰动充分小，任何被扰动运动均将渐近地各趋于该系列驻定运动的一支。

由此推知本引理论断的正确性，因为在组(15)中，对应于由表示式(22)所确定的运动是由表示式

$$x_1=c+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1(c,t),\quad x_s=\varphi_s(c,t)$$