

# 中山大学自然科学论文选

SELECTED RESEARCH WORKS ON NATURAL  
SCIENCES OF SUN YATSEN UNIVERSITY

1955—1978



中山大学学报编辑部

THE EDITORIAL STAFF OF THE JOURNAL  
OF SUN YATSEN UNIVERSITY

1979

# 目 录

(分学科按发表年月先后排列)

|                                                                 |                   |
|-----------------------------------------------------------------|-------------------|
| 一类微分方程组在一个临界情形中的解的稳定条件 .....                                    | 许淞庆 (1)           |
| 测度的弱收敛与强马氏过程 .....                                              | 郑曾同 (21)          |
| 关于条件马氏过程 .....                                                  | 梁之舜 (29)          |
| 辛群与动力系统典型式的稳定域 .....                                            | 胡金昌 (45)          |
| 滑行板的纵摇与升沉运动 .....                                               | 苏钧麟等 (59)         |
| $\delta$ 函数、格林函数与样条函数 .....                                     | 李岳生 (73)          |
| 二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组<br>.....                              | 华罗庚 吴兹潜 林 伟 (87)  |
| 砷在锗中的扩散 .....                                                   | 彭少麒 姚 杰 (111)     |
| Al-0.5% Cu合金中表现反常振幅效应的低频位错内耗<br>.....                           | 葛庭燧 张进修 (117)     |
| 测定半导体扩散层表面浓度、p-n结深度及扩散系数的霍耳效应法<br>.....                         | 谢 党 (131)         |
| 关于非亚贝尔规范群的对偶荷(磁单极)问题<br>.....                                   | 李华钟 沈鼎昌 郭硕鸿 (140) |
| 砜类化合物与三氧化二氮的反应<br>I. $\alpha$ -蒎烯亚氮氧化物的制备条件及其转变为香芹酮的研究<br>..... | 龙康侯等 (157)        |
| 吡啶环中N-原子的吸电效应 .....                                             | 徐贤恭 黄锦珂 英柏宁 (164) |
| 隐蔽剂在螯合滴定中的应用<br>I. 以乳酸隐蔽钛(IV)与钛的间接滴定<br>.....                   | 陈永兆 李煥然 (171)     |
| 昆虫保幼激素类似物——734-Ⅱ号的合成 .....                                      | 化学系有机化学教研室 (180)  |
| 硅漆的常温干燥问题<br>——常温干燥甲基硅漆的合成、性能及应用<br>.....                       | 林尚安等 (184)        |
| 碳链接枝共聚物: 少量天然橡胶与甲基丙烯酸-苯乙烯接枝共聚及其<br>产物的结构与性能关系 .....             | 曾汉民等 (186)        |

|                                                                                                               |                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| 腈类络合物的聚合作用 .....                                                                                              | 李曼孚等 (188)       |
| 液体光敏树脂紫外光交联反应历程的探讨<br>..... 化学系高分子化学教研室感光树脂研究小组 (190)                                                         |                  |
| 乙烯高效催化聚合 .....                                                                                                | 化学系高分子化学专业 (193) |
| 热处理对ABS改性聚碳酸酯注件结构与性能的影响 .....                                                                                 | 黄少慧等 (195)       |
| 利用赤眼蜂防治甘蔗螟虫 .....                                                                                             | 蒲蛰龙 (197)        |
| 广东植物区系的特点 .....                                                                                               | 张宏达 (208)        |
| 黄麻开花生理的研究 .....                                                                                               | 于志忱 傅家瑞 (223)    |
| 用换人血方法使恶性疟原虫 ( <i>Plasmodium falciparum</i> ) 在<br>猕猴和熊猴体内转种传代的研究 .....                                       | 疟疾猴模研究协作组 (234)  |
| 作物“三系”一些生物学特征的研究<br>——关于胞质—胞核遗传因子控制的雄性不育性状发生机理的探讨<br>..... 中山大学生物学系遗传学组、同位素室<br>..... 广东省农作物杂种优势利用研究协作组 (242) |                  |
| 下丘脑—垂体—肾上腺皮质系统在针刺镇痛中的作用<br>..... 中山大学生物学系针麻研究组<br>..... 暨南大学生物学系针麻研究组 (252)                                   |                  |
| 由平面地形地质图绘成块状立体图的新方法 .....                                                                                     | 李见贤 (255)        |
| 北江下游河道的变迁 .....                                                                                               | 叶 汇 (264)        |
| 关于自然条件经济评价的几个主要问题 .....                                                                                       | 曹廷藩 (275)        |
| 海南岛西南部生物化学地理 .....                                                                                            | 唐永馨等 (286)       |
| 农业土地类型的研究与制图<br>——以珠江三角洲中山、番禺县为例<br>..... 缪鸿基 陈华材 (296)                                                       |                  |
| 分型法和分段法 .....                                                                                                 | 李德成 (299)        |
| 关于大熊猫种的划分、地史分布及其演化历史的探讨 .....                                                                                 | 王将克 (301)        |
| 华南沿海应用长浪方法辅助台风暴雨预报的展望 .....                                                                                   | 沈灿燊 甘雨鸣 (313)    |
| 南海及其附近地区中层气旋的分析研究 .....                                                                                       | 梁必骥等 (316)       |
| 农业区划与农田基本建设 .....                                                                                             | 梁 溥 (319)        |
| 历史时期广州市区的水陆变迁初探 .....                                                                                         | 徐俊鸣 (325)        |
| 附录：1955—1978年本校自然科学论文要目 .....                                                                                 | (339)            |

## CONTENTS

|                                                                                                                                                                                 |                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Условия устойчивости решений для некоторого класса систем<br>дифференциальных уравнений в одном сомнительном случае<br>.....                                                    | <i>Xu Songqing</i> ( 1 )                                  |
| Weak Convergence of Measures and Strong Markov Processes<br>.....                                                                                                               | <i>Zheng Zengtong</i> ( 21 )                              |
| On Conditional Markov Processes .....                                                                                                                                           | <i>Liang Zhishun</i> ( 29 )                               |
| On the Symplectic Group and the Regions of Stability<br>of Hamiltonian Systems.....                                                                                             | <i>Hu Jinchang</i> ( 45 )                                 |
| Pitching and Heaving of a Planing Plate .....                                                                                                                                   | <i>Su Junlin et al.</i> ( 59 )                            |
| $\delta$ Distribution, Green Function and Splines .....                                                                                                                         | <i>Li Yuesheng</i> ( 73 )                                 |
| The Systems of Partial Differential Equations of Second Order<br>with Two Independent Variables and Two Unknown Functions<br>.....                                              | <i>Hua Luogeng, Wu Ciqian and Lin Wei</i> ( 87 )          |
| The Diffusion of Arsenic in Germanium<br>.....                                                                                                                                  | <i>Peng Shaogqi and Yao Jie</i> (111)                     |
| Low Frequency Dislocation Internal Friction Peaks with<br>Anomalous Amplitude Effect in Al-0.5% Cu Alloy<br>.....                                                               | <i>Ge Tingsui and Zhang Jingxiu</i> (117)                 |
| Метод эффекта холла по определению поверхностной<br>концентрации на диффузионном слое полупроводника,<br>глубины электронно-дырочного перехода и коэффициента<br>диффузии ..... | <i>Xie Dang</i> (131)                                     |
| On the Problem of Dual Charge (Magnetic Monopole) in<br>Non-Abelian Gauge Groups<br>.....                                                                                       | <i>Guo Shuohong, Li Huazhong and Xian Dingchang</i> (140) |
| Reaction of Some Monoterpenes and Nitrogen Trioxide<br>I. Studies on the Conditions for Prepration of $\alpha$ -Pinene<br>Nitrosite and its Conversion into Carvone<br>.....    | <i>Long Kanghou et al.</i> (157)                          |
| The Electron-withdrawing Effect of the Nitrogen Atom of<br>Pyridine.....                                                                                                        | <i>Xu Xiangong, Huang Jinke and Ying Baining</i> (164)    |



- The Uses of Masking Agents in Chelatometry  
 I. The Masking of Titanium (IV) with Lactic Acid and the  
 Indirect Titration of Titanium  
 ..... *Chen Yongzhao and Li Huanran* (171)
- Synthesis of the Mimic of Insect Juvenile Hormone 734- I  
 ..... *Division of Organic Chemistry, Department of Chemistry* (180)
- Studies on the Cure at Room Temperature of Silicone  
 Coating Resins  
 Synthesis and Properties of Room Curing Polymethylsiloxane  
 Resins and Their Application  
 ..... *Lin Shangan et al.* (184)
- Carbonic Chain Graft Copolymer: the Graft Copolymerization of  
 Little Natural Rubber with Methacrylic Acid-styrene and  
 the Relation between Structure and Properties of its Product  
 ..... *Zeng Hanmin et al.* (186)
- The Polymerization of Complexes of Nitriles  
 ..... *Li Manfu et al.* (188)
- Investigations on the Mechanism of UV-crosslinking of  
 Light-sensitive Resin in Liquid State  
 ..... *Photosensitive Resins Research  
 Group, Highpolymer Chemistry  
 Division, Department of Chemistry* (190)
- Ethylene Catalytical Polymerization with Highly Active  
 Catalyst ..... *Highpolymer Chemistry Specialty,  
 Department of Chemistry* (193)
- The Effect of Heat-treatment on the Structure and  
 Properties of Polycarbonate Modified with ABS  
 ..... *Huang Shaohui et al.* (195)
- The Utilization of *Trichogramma* Sp. for the Control of  
 Sugarcane Borers ..... *Pu Zhelong* (197)
- The Characteristics of Guangdong Flora ..... *Zhang Hongda* (208)
- The Physiology of Flowering in Jute  
 ..... *Yu Zhichen and Fu Jiarui* (223)

- The Successive Passages and Heavy Infections of *Plasmodium falciparum* in the Two Species of Macaques, the Blood of which being Partly Replaced by Human Blood  
.....*Joint Research Group for Experimental Hosts of Human Malaria Parasites* (234)
- Investigation of Some Biological Characteristics of the "Three Lines" in Crop Plants  
A Survey on the Mechanism of the Development of the Male Sterility Characteristics Controlled by the Cytoplasmic Nuclear Genes  
.....*The Genetics Group and Isotope Laboratory of the Department of Biology, Sun Yatsen University, The Cooperative Investigation Group of Utilization of Heterosis in Crops Guangdong Province* (242)
- The Possible Role of Hypothalamus-Pituitary-Adrenal System on Acupuncture Analgesia  
.....*Research Group of Acupuncture Analgesia, Department of Biology, Sun Yatsen University, Research Group of Acupuncture Analgesia, Department of Biology, Jinan University* (252)
- A New Method in Making Block Diagram from the Topographic Geological Maps ..... *Li Jianxian* (255)
- Shifting River Courses of the Lower Beijiang in Guangdong Province ..... *Ye Hui* (261)
- К некоторым основным вопросам об экоэкономической оценке природных условий ..... *Cao Tingfan* (275)
- Биогеохимический ландшафт юго-западной части о. Hainan  
.....*Tang Yongluan et al.* (286)
- A Study and Mapping of the Agricultural Land Types With the Work in the Zhongshan and Panyu Counties, the Pearl River Delta as an Example  
..... *Miao Hongji and Chen Huacai* (296)
- Type-dividing and Segment-dividing Methods  
..... *Li Decheng* (299)
- On the Taxonomic Status of Species, Geological Distribution and Evolutionary History of *Ailuropoda* ..... *Wang Jiangke* (301)

|                                                                                                                                          |                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| The Prospect of Applying the Long-waves in Helping<br>Forecasting the Typhoon Surge Along the South China Coast<br>.....                 | <i>Shen Canxin and Gan Yuming</i> (313) |
| A Study of Mid-tropospheric Cyclones over and near the<br>South China Sea .....                                                          | <i>Liang Biqu et al.</i> (316)          |
| Agricultural Regionalization and Capital Construction<br>of Fields under Crops.....                                                      | <i>Liang Pu</i> (319)                   |
| A Preliminary Study of Relative Changes of the River<br>Channel and Landforms in Guangzhou (Canton) during<br>the Historical Period..... | <i>Xu Junming</i> (325)                 |
| APPENDIX: Main Contents of <i>Acta Scientiarum Naturalium</i><br><i>Universitatis Sun Yatseni</i> (1955—1978) .....                      | (330)                                   |

# 一类微分方程组在一个临界情形中的解的稳定条件\*

许 淞 庆  
(数学力学系)

1. 考虑下列扰动运动微分方程组:

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^n \left( p_{s\sigma} + \frac{1}{t^Y} q_{s\sigma}(t) \right) x_\sigma + X_s^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{t^Y} X_s^{(2)}(x_1, \dots, x_n, t), \quad (s=1, \dots, n) \quad (1)$$

其中  $Y$  及  $p_{s\sigma}$  ( $s, \sigma=1, \dots, n$ ) 为实常数, 且  $Y>0$ , 而  $q_{s\sigma}(t)$  ( $s, \sigma=1, \dots, n$ ) 为实变数  $t$  之实函数, 当一切  $t \geq T>0$  时定义、连续及有界;  $X_s^{(1)}$  ( $s=1, \dots, n$ ) 为  $x_1, \dots, x_n$  之正则函数, 其展开式不含低于二次之项, 并具实常数系数; 至于  $X_s^{(2)}$  ( $s=1, \dots, n$ ) 为  $x_1, \dots, x_n$  之正则函数, 其按  $x_1, \dots, x_n$  之幂的展开式为:

$$X_s^{(2)}(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{m_1 + \dots + m_n \geq 2} R_s^{(m_1, \dots, m_n)} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$$

此处系数  $R_s^{(m_1, \dots, m_n)}$  为  $t$  之连续函数, 当一切  $t \geq T>0$  时有界, 并使得对于一切  $t \geq T>0$  函数  $X_s^{(2)}$  为  $x_1, \dots, x_n$  之一致正则函数<sup>(1)</sup>。

为了叙述方便, 今后将称这样的函数  $X_s^{(2)}$  为满足条件(L)。

本文目的在于研究组(1)的平凡解即未被扰动运动  $x_1 = \dots = x_n = 0$  在下述情形中的稳定性: 设对应于矩阵  $\|p_{s\sigma}\|$  的特征方程有一个零根而其余一切根均具有负实数部分。

如所周知, 在所作的假定下, 利用非奇异的常数实系数线性变换, 永远可以把组(1)变成另一个方程组, 使有等式<sup>(1)</sup>

$$p_{s1} = p_{1s} = 0 \quad (s=1, \dots, n)。$$



设这变换已经完成, 则组(1)可写成下列形式。

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{t^r} \sum_{\sigma=1}^n q_{1\sigma}(t)x_{\sigma} + X_1^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{t^r} X_1^{(2)}(x_1, \dots, x_n, t), \\ \frac{dx_s}{dt} &= \frac{1}{t^r} q_{s1}(t)x_1 + \sum_{\sigma=2}^n \left( p_{s\sigma} + \frac{1}{t^r} q_{s\sigma}(t) \right) x_{\sigma} + X_s^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \\ &\quad + \frac{1}{t^r} X_s^{(1)}(x_1, \dots, x_n, t). \quad (s=2, \dots, n)\end{aligned}\quad (2)$$

此时特征方程

$$\begin{vmatrix} p_{22} - \mathfrak{H}^0 & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n2} & \dots & p_{nn} - \mathfrak{H}^0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

的根均将具有负实数部分。如果把这 些 根表为  $\mathfrak{H}_s^0 = -\lambda_s + i\mu_s (s=2, \dots, n)$ , 则有  $\lambda_s > 0 \quad (s=2, \dots, n)$ 。

为了研究组(2)的稳定性问题, 让我们先考虑对应于组(2)的线性齐次微分方程组的解的结构。此方程组为

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{t^r} \sum_{\sigma=1}^n q_{1\sigma}(t)x_{\sigma}, \\ \frac{dx_s}{dt} &= \frac{1}{t^r} q_{s1}(t)x_1 + \sum_{\sigma=2}^n \left( p_{s\sigma} + \frac{1}{t^r} q_{s\sigma}(t) \right) x_{\sigma} \quad (s=2, \dots, n).\end{aligned}\quad (2')$$

巴索夫证明组(2')有如下形式的解<sup>[2,2]</sup>:

$$x_1^{(1)} = e^{\phi(t)}(1 + v_1(t)), \quad x_s^{(1)} = t^{-r} e^{\phi(t)} v_s(t) \quad (s=2, \dots, n), \quad (4)$$

此处  $v_1(t) = t^{-[(k+1)r-1]} w_1(t)$ ,  $v_s(t)$  及  $w_1(t) \quad (s=2, \dots, n)$  均为  $t$  之有界函数,

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } \gamma > 1 \\ \int_x^t \frac{q_{11}(t)}{t^r} dt & \text{当 } \frac{1}{2} < \gamma \leq 1, \\ \int_x^t \frac{1}{t^r} \left[ q_{11}(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\sigma=2}^n q_{1\sigma}(t) \frac{a_{\sigma}^{(i)}(t)}{t^{lr}} \right] dt & \text{当 } 0 < \gamma \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (5)$$

此处  $k$  为整数, 满足不等式

$$k\gamma \leq 1 < (k+1)\gamma, \quad (6)$$

而  $a_{\sigma}^{(i)}(t)$  为  $t$  之有界函数, 其构造方法见论文[2,3]。

从表示式(4)看到, 当  $t \rightarrow +\infty$  时  $v_1(t) \rightarrow 0$ , 故总可以选取这样大的数  $t_0 \geq T$ , 使当  $t \geq t_0$  时有  $|v_1(t)| > \frac{1}{2}$ 。今后将只考虑这些  $t$  值。

至于组(2')的稳定性问题, 已为巴索夫\*解决<sup>[4]</sup>。

2. 在过渡到研究被提出的问题之前, 让我们先建立一些引理。

**引理1.** 设扰动运动微分方程组有如下形式:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= q_{12}x_2 + \dots + q_{1n}x_n + X_1(x_1, \dots, x_n, t), \\ \frac{dx_s}{dt} &= Y_{s2}x_2 + \dots + Y_{sn}x_n + X_s(x_1, \dots, x_n, t), \quad (s = 2, \dots, n)\end{aligned}\quad (7)$$

此处 $X_s(s = 1, \dots, n)$ 为满足条件(L)的函数, 且

$$X_s(x_1, 0, \dots, 0, t) \equiv 0, \quad (8)$$

而 $Y_{s\sigma} = p_{s\sigma} + \frac{1}{t^r} q_{s\sigma}$ , 其中 $r > 0$ ,  $p_{s\sigma}$ 为那样的常数, 使

$$\begin{vmatrix} p_{22} - \frac{1}{t^r} q_{22} & \dots & p_{2n} - \frac{1}{t^r} q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n2} - \frac{1}{t^r} q_{n2} & \dots & p_{nn} - \frac{1}{t^r} q_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

的一切根均具有负实数部分者,  $q_{1\sigma}, q_{s\sigma} (s, \sigma = 2, \dots, n)$ 为 $t$ 之连续函数, 当 $t \geq t_0$ 时有界。那末, 对于组(7)未被扰动运动为稳定, 且组(7)确定一连续系列的驻定运动:

$$x_1 = C, x_2 = \dots = x_n = 0,$$

此处 $C$ 为任意常数, 未被扰动运动亦属于这一系列。该系列中凡充分接近于未被扰动运动的一切运动均将为稳定的。此时如果扰动充分小, 任何被扰动运动均将渐近地各趋于该系列驻定运动中一支。

**证** 考虑方程组

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\sigma=2}^n p_{s\sigma} x_{\sigma}, \quad (s = 2, \dots, n) \quad (*)$$

由于 $p_{s\sigma}$ 的上述性质, 显然有定正的二次型 $V(x_2, \dots, x_n)$ 存在<sup>[1]</sup>, 使根据(\*)计算得来的 $V$ 的全导数

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=2}^n \sum_{\sigma=2}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} p_{s\sigma} x_{\sigma} = -W(x_2, \dots, x_n),$$

其中 $W(x_2, \dots, x_n)$ 为定正二次型。

现在根据(7)的第二个方程的对应线性齐次方程计算 $V$ 的全导数, 得:

$$\sum_{s=2}^n \sum_{\sigma=2}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} r_{s\sigma} x_{\sigma} = -W(x_2, \dots, x_n) + \frac{1}{t^r} \sum_{s=2}^n \sum_{\sigma=2}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} q_{s\sigma} x_{\sigma}.$$

容易看见这是一个定负二次型<sup>[1]</sup>, 因为当 $t$ 足够大时, 后一个和不影响它的符号。

注意到 $X_s(s = 1, \dots, n)$ 满足条件(L)及(8), 知道组(7)满足马尔金论文<sup>[5]</sup>中§11的定理的一切条件, 于是本引理成立。

引理 2. 设有微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{t^a} X_1(x_1, \dots, x_n, t), \quad a > 1. \\ \frac{dx_s}{dt} &= \mathfrak{H}_s^e x_s + X_s(x_1, \dots, x_n, t), \quad (s = 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (9)$$

此处  $\mathfrak{H}_s^e = -\lambda_s + i\mu$ ,  $\lambda > 0$  ( $s = 2, \dots, n$ ); 而  $X_s(x_1, \dots, x_n, t)$  ( $s = 1, \dots, n$ ) 具下列性质:

1°  $X_s$  定义并连续于区域:

$$|x_s| \leq A, \quad t \geq t_0 > 1.$$

2° 在该区域中有

$$|X_s| \leq M \quad (M > 0), \quad \text{且 } M \leq \lambda A, \quad \lambda = \min(\lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (s = 1, \dots, n).$$

3°  $|X_s(x'_1, \dots, x'_n, t) - X_s(x''_1, \dots, x''_n, t)| \leq l \{ |x'_1 - x''_1| + \dots + |x'_n - x''_n| \}$ , ( $s = 1, \dots, n$ ) 其中  $|x'_\sigma| \leq A$ ,  $|x''_\sigma| \leq A$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ),  $l > 0$  为常数。

4°  $\ln N < 1$ , 其中  $N = \max\left(\frac{1}{a-1}, \frac{1}{\lambda}\right)$ ,

则组(9)有如下形式的解:

$$x_1 = c + \frac{1}{t^{a-1}} \varphi_1(c, t), \quad x_s = \varphi_s(c, t), \quad (s = 2, \dots, n)$$

此处  $c$  为任意常数, 而在区域

$$|c| < C \leq A \quad (C > 0), \quad 1 < t_0 \leq t$$

中函数  $\varphi_s(c, t)$  ( $s = 1, \dots, n$ ) 为有界, 且当  $t \rightarrow t_0$  时, 有  $\varphi_s(c, t) \rightarrow 0$  ( $s = 2, \dots, n$ )

证 取初值条件如下:

当  $t = +\infty$  时,  $x_1 = x_1^{(0)} = c$ ; 当  $t = t_0$  时,  $x_s = x_s^{(0)} = 0$  ( $s = 2, \dots, n$ )。

于是具有这初值的微分方程组(9)相当于下列积分方程组:

$$\begin{aligned} x_1 &= c + \int_{+\infty}^t \frac{1}{\tau^a} X_1(x_1, \dots, x_n, \tau) d\tau, \\ x_s &= e^{\mathfrak{H}_s^e t} \int_{t_0}^t e^{-\mathfrak{H}_s^e \tau} X_s(x_1, \dots, x_n, \tau) d\tau, \quad (s = 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (10)$$

按迭代法求(10)的解, 得

1) 在  $t \geq t_0 > 0$  之下, 我们可以取更普遍的定正二次型  $\bar{V} = (1 + e^{-t})V$  代替  $V$ , 因而得 定正二次型  $\bar{W} = (1 + e^{-t})W + e^{-t}V$  代替  $W$ 。于是对应的  $\bar{V}$  的导数为

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \sum_{s=2}^n \sum_{\sigma=2}^n \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_s} r_{s\sigma} x_\sigma = -\bar{W} + \frac{1}{t^a} \sum_{s=2}^n \sum_{\sigma=2}^n \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_s} q_{s\sigma} x_\sigma$$

亦仍为定正二次型。

$$x_1^{(k)} = c + \int_{+\infty}^t \frac{1}{\tau} X_1(x_1^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}, \tau) d\tau,$$

$$x_s^{(k)} = e^{\mathcal{H}_s t} \int_{t_0}^t e^{-\mathcal{H}_s \tau} X_s(x_1^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}, \tau) d\tau \quad (s=2, \dots, n). \quad (11)$$

我们要证明  $x_s^{(k)}$  ( $s=1, \dots, n$ ) 在所有  $t \geq t_0$  下一致收敛于极限函数  $x_s$  ( $s=1, n, \dots$ ), 而后者满足组(10)及已给的初值条件。为此目的, 须证明级数:

$$x_1 = c + (x_1^{(1)} - c) + (x_1^{(2)} - x_1^{(1)}) + \dots + (x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}) + \dots,$$

$$x_s = x_s^{(1)} + (x_s^{(2)} - x_s^{(1)}) + \dots + (x_s^{(k)} - x_s^{(k-1)}) + \dots \quad (s=2, \dots, n) \quad (12)$$

绝对一致收敛, 当  $t \geq t_0$ 。

让我们先证明在假定  $|c| < C \leq A$  之下, 当  $t_0$  相当大, 使

$$|c| + \frac{M}{a-1} \cdot \frac{1}{t_0^{a-1}} \leq A$$

时, 有

$$|x_s^{(k)}| \leq A \quad (s=1, \dots, n, k=1, 2, \dots). \quad (13)$$

事实上, 根据初值条件, 即知  $|x_s^{(0)}| < A$ , 现在假定  $|x_s^{(k-1)}| \leq A$ , 求证  $|x_s^{(k)}| \leq A$ 。

从(11)得估值

$$|x_1^{(k)}| \leq |c| + M \left| \int_{+\infty}^t \frac{1}{\tau^a} d\tau \right| = |c| + M \cdot \frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{t^{a-1}} \leq$$

$$\leq |c| + M \cdot \frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{t_0^{a-1}} \leq A,$$

$$|x_s^{(k)}| \leq M e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s \tau} d\tau = M \cdot \frac{1}{\lambda_s} (1 - e^{-\lambda_s(t-t_0)}) < \frac{M}{\lambda_s} \leq \frac{M}{\lambda} \leq A.$$

$$(s=2, \dots, n)$$

故在所作假定下, 不等式(13)恒成立。

其次, 由(11)得

$$|x_1^{(1)} - c| \leq \int_t^{+\infty} \frac{1}{\tau^a} |X_1(c, 0, \dots, 0, \tau)| d\tau \leq M \int_t^{+\infty} \frac{1}{\tau^a} d\tau =$$

$$= M \cdot \frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{t^{a-1}} \leq \frac{MN}{t^{a-1}},$$

$$|x_s^{(1)}| \leq e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s \tau} |X_s(c, 0, \dots, 0, \tau)| d\tau \leq M e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s \tau} d\tau =$$

$$= \frac{M}{\lambda_s} (1 - e^{-\lambda_s(t-t_0)}) < \frac{M}{\lambda_s} \leq MN \quad (s=2, \dots, n).$$

同样, 计及  $t \geq t_0 > 1$ , 得

$$\begin{aligned}
 |x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| &\leq \int_t^{+\infty} \frac{1}{\tau^a} |X_1(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \tau) - X_1(c, 0, \dots, 0, \tau)| d\tau \leq \\
 &\leq l \int_t^{+\infty} \frac{1}{\tau^a} \{|x_1^{(1)} - c| + |x_2^{(1)}| + \dots + |x_n^{(1)}|\} d\tau \leq \\
 &\leq l \int_t^{+\infty} \frac{1}{\tau^a} \left[ \frac{MN}{\tau^{a-1}} + (n-1)MN \right] d\tau < M \ln N \int_t^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^a} = \\
 &= M \ln N \cdot \frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{t^{a-1}} \leq M \ln N^2 \cdot \frac{1}{t^{a-1}}, \\
 |x_s^{(2)} - x_s^{(1)}| &\leq e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s \tau} |X_s(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \tau) - X_s(c, 0, \dots, 0, \tau)| d\tau \leq \\
 &\leq l e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s \tau} \left[ \frac{MN}{\tau^{a-1}} + (n-1)MN \right] d\tau < \\
 &< M \ln N e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s \tau} d\tau = M \ln N \cdot \frac{1 - e^{-\lambda_s(t-t_0)}}{\lambda_s} < \\
 &< M \ln N \cdot \frac{1}{\lambda_s} \leq M \ln N^2 \quad (s=2, \dots, n).
 \end{aligned}$$

应用数学归纳法, 可以证实当  $k$  为任何正整数时, 下列估值成立.

$$\begin{aligned}
 |x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}| &< M l^{k-1} n^{k-1} N^k \cdot \frac{1}{t^{a-1}}, \\
 |x_s^{(k)} - x_s^{(k-1)}| &< M l^{k-1} n^{k-1} N^k \cdot (s=2, \dots, n)
 \end{aligned} \tag{14}$$

因此, 级数(12)在一切  $|c| < C, t \geq t_0$  之下, 分别以下列几何级数为其优级数:

$$\begin{aligned}
 c + \frac{1}{t^{a-1}} [MN + M \ln N^2 + \dots + M l^{k-1} n^{k-1} N^k + \dots], \\
 MN + M \ln N^2 + \dots + M l^{k-1} n^{k-1} N^k + \dots
 \end{aligned}$$

而当  $l$  充分小, 使  $\ln N < 1$  时, 这些级数是收敛的, 所以级数(12)对于一切  $t \geq t_0$  ( $t_0$  足够大, 且大于 1) 为绝对一致收敛, 并当  $t \geq t_0$  时表示组(10)的解, 因而也就是具有给定初值的组(9)的解, 从估值(14)推知, 这解可写成如下形式:

$$x_1 = c + \frac{1}{t^{a-1}} \varphi_1(c, t), x_s = \varphi_s(c, t), \quad (s=2, \dots, n)$$

其中  $\varphi_s(c, t)$  ( $s=1, \dots, n$ ) 在区域  $|c| < C, t \geq t_0$  中为有界, 且当  $t \rightarrow t_0$  时, 有  $\varphi_s(c, t) \rightarrow 0$  ( $s=2, \dots, n$ ). 引理证毕.

现在考虑下列形式的微分方程组:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{t^a} [q_{12}x_2 + \dots + q_{1n}x_n + X_1(x_1, \dots, x_n, t)], \\
 \frac{dx_s}{dt} &= p_{s2}x_2 + \dots + p_{sn}x_n + \frac{1}{t^b} (q_{s2}x_2 + \dots + p_{sn}x_n) +
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$+ X_s(x_1, \dots, x_n, t), \quad (s=2, \dots, n)$$

此处  $X_s(x_1, \dots, x_n, t) (s=1, \dots, n)$  为满足条件(L)的函数,  $\alpha, \beta$  及  $p_{s\sigma} (s, \sigma=2, \dots, n)$  为实常数, 而且  $p_s$  使方程式

$$\begin{vmatrix} p_{22} - \mathcal{H}_2^p \cdots p_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ p_{n2} \cdots p_{nn} - \mathcal{H}_n^p \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

的根均具有负实数部分;  $q_{s\sigma} (s=1, \dots, n; \sigma=2, \dots, n)$  为  $t$  的连续实函数, 当一切  $t \geq t_0$  时为有界.

**引理 3** 如果  $\alpha > 1, \beta > 0$ , 则组(15)有如下形式的解:

$$x_1 = c + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_1(c, t), \quad x_s = \varphi_s(c, t) \quad (s=2, \dots, n) \quad (16)$$

此处  $c$  为任意常数, 函数  $\varphi_s(c, t) (s=1, \dots, n)$  在区域  $|c| < C, t \geq t_0 > 1$  中为有界, 且当  $t \rightarrow t_0$  时,  $\varphi_s(c, t) \rightarrow 0 (s=2, \dots, n)$ .

**证** 首先要注意到可以把  $q_{s\sigma}$  看成为当  $t \rightarrow +\infty$  时趋于零, 因为如果设  $\alpha_1, \beta_1$  是这样的数, 使  $1 < \alpha_1 < \alpha, 0 < \beta_1 < \beta$ , 便有

$$\frac{1}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha_1}} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-\alpha_1}}, \quad \frac{1}{t^\beta} = \frac{1}{t^{\beta_1}} \cdot \frac{1}{t^{\beta-\beta_1}}.$$

如果把因子  $\frac{1}{t^{\alpha-\alpha_1}}$  归入系数  $q_{1\sigma}$ , 把  $\frac{1}{t^{\beta-\beta_1}}$  归入系数  $q_{s\sigma}$ , 则新系数

$$\bar{q}_{1\sigma} = \frac{1}{t^{\alpha-\alpha_1}} q_{1\sigma}, \quad \bar{q}_{s\sigma} = \frac{1}{t^{\beta-\beta_1}} q_{s\sigma}, \quad (s, \sigma=2, \dots, n)$$

当  $t \rightarrow +\infty$  时将趋于零, 而组(15)的形式依旧, 盖因  $\alpha_1 > 1, \beta_1 > 0$ .

所以对于任意给定  $l > 0$ , 永远可取  $t_0$  足够大, 使当  $t \geq t_0$  时, 有

$$|q_{s\sigma}| \leq \frac{l}{3} (s=1, \dots, n; \sigma=2, \dots, n).$$

其次, 我们只须证明本引理当(15)取下列形式时成立:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{t^\alpha} [q_{12}x_2 + \dots + q_{1n}x_n + X_1(x_1, \dots, x_n, t)], \\ \frac{dx_s}{dt} &= \sigma_{s-1}x_{s-1} + \mathcal{H}_s^p x_s + \frac{1}{t} (q_{s2}x_2 + \dots + q_{sn}x_n) \\ &\quad + X_s(x_1, \dots, x_n, t), \quad (s=2, \dots, n) \end{aligned} \quad (17)$$

此处  $\mathcal{H}_s^p = -\lambda_s + i\mu_s (\lambda_s > 0) (s=2, \dots, n)$  为方程式(3)的根,  $\sigma_{s-1}$  或等于 1 或等于 0 (但  $\sigma_1 = 0$ ). 因为经过关于变数  $x_2, \dots, x_n$  的带常系数的非奇异性变换, 永远可以把组(15)化为形式(17).

还有, 我们可以变换组(17), 令

$$x_1 = y_1, \quad x_s = \xi^{n-s+1} y_s, \quad (s=2, \dots, n)$$

此处  $\xi$  为常数, 如果选择  $\xi$  充分小, 将可使变换后的方程组中,  $y_{s-1}$  的对应系



数  $\bar{\sigma}_{s-1} (= \xi \sigma_{s-1})$  为任意小, 而  $q_{s0}$  及  $X_s$  保持原来的性质。

因此可以假定在 (17) 中  $\sigma_{s-1}$  满足条件:

$$|\sigma_{s-1}| \leq \frac{l}{3}, \quad (s=2, \dots, n)$$

而  $l$  为任意给定的正数。

现在, 令

$$\begin{aligned} \bar{X}_1(x_1, \dots, x_n, t) &= q_{12}x_2 + \dots + q_{1n}x_n + X_1(x_1, \dots, x_n, t), \\ \bar{X}_s(x_1, \dots, x_n, t) &= \sigma_{s-1}x_{s-1} + \frac{1}{t^\beta} (q_{s2}x_2 + \dots + q_{sn}x_n) + \\ &\quad + X_s(x_1, \dots, x_n, t) \quad (s=2, \dots, n), \end{aligned}$$

则 (17) 取形式

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{t^\alpha} \bar{X}_1(x_1, \dots, x_n, t), \\ \frac{dx_s}{dt} &= \mathcal{H}_s x_s + \bar{X}_s(x_1, \dots, x_n, t) \quad (s=2, \dots, n). \end{aligned} \quad (17')$$

由于  $X_s (s=1, \dots, n)$  满足条件 (L), 它按  $x_1, \dots, x_n$  的幂的展开式不含低于二次之项, 故对应于正数  $\frac{\lambda}{\sqrt[n]{n}}$  总可以选取  $A > 0$  足够小, 使当

$$|x| \leq A, \quad t \geq t_0$$

时有

$$|X_s| \leq \frac{\lambda}{\sqrt[n]{n}} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \frac{1}{2} \lambda A \quad (s=2, \dots, n).$$

此外, 根据  $X_s (s=1, \dots, n)$  的同样性质, 对于任意给定的  $l > 0$ , 只要取  $A$  相当小, 当  $t \geq t_0$  及

$$|x'_\sigma| \leq A, \quad |x''_\sigma| \leq A, \quad (\sigma=1, \dots, n)$$

时, 一定可以产生不等式

$$\begin{aligned} |X_s(x'_1, \dots, x'_n, t) - X_s(x''_1, \dots, x''_n, t)| &\leq \frac{l}{3} \{ |x'_1 - x''_1| + \dots + |x'_n - x''_n| \} \\ &\quad (s=1, \dots, n). \end{aligned}$$

注意到  $|\sigma_{s-1}| \leq \frac{l}{3}$ ,  $|q_{s0}| \leq \frac{l}{3}$ , 显见对应于任意给定的  $l > 0$  可选取  $t_0 > 1$ ,  $A >$

0, 使当  $t \geq t_0$ ,  $|x'_\sigma| \leq A$ ,  $|x''_\sigma| \leq A$  时,  $\bar{X}_s$  满足下面条件:

$$\begin{aligned} |\bar{X}_s(x'_1, \dots, x'_n, t) - \bar{X}_s(x''_1, \dots, x''_n, t)| &\leq l \{ |x'_1 - x''_1| + \dots + |x'_n - x''_n| \} \\ &\quad (s=1, \dots, n). \end{aligned}$$

现在选  $l$  为足够小的正数, 使  $l_n N < 1$ , 此处  $N = \max\left(\frac{1}{a-1}, \frac{1}{\lambda}\right)$ ,  $\lambda =$

$\min(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$  则有  $|\bar{X}_s| < \lambda A$ , 而组(17')满足引理2中关于组(9)的一切条件, 由此本引理得到证明.

**附注** 根据本引理关于  $X_s (s=1, \dots, n)$  的假定, 易见  $\bar{X}_s(0, \dots, 0, t) \equiv 0$ , 且  $\bar{X}_s(c, 0, \dots, 0, t)$  对于一切  $t \geq t_0$  为  $c$  的一致正则函数, 且按  $c$  之幂的展开式不含低于二次之项. 因此, 在应用引理2的迭代法以证明(17')有形式为  $x_1 = c + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_1(c, t)$ ,  $x_s = \varphi_s(c, t) (s=2, \dots, n)$  的解存在时, 注意这一性质和级数(12)对于所有  $t \geq t_0$  的绝对一致收敛性, 不难证明:  $\varphi_s(c, t) (s=1, \dots, n)$  对于一切  $t \geq t_0$  为  $c$  之一致正则函数, 且可写为

$$\varphi_s(c, t) = u_s^{(2)} c^2 + u_s^{(3)} c^3 + \dots \quad (s=1, \dots, n) \quad (18)$$

此处  $u_s^{(k)} (s=1, \dots, n; k=2, 3, \dots)$  当一切  $t \geq t_0$  时为  $t$  之有界连续函数. 事实上, 因已知  $\varphi_s(c, t)$  有界, 故有  $|\varphi_s(c, t)| < L$ , 又  $\varphi_s(c, t)$  对于一切  $t \geq t_0$  为  $c$  之一致正则函数, 故有  $|u_s^{(k)}| < \frac{L}{C^k} (|c| < C)$ , 即  $u_s^{(k)}$  有界.

**引理4** 如果扰动运动方程组有形式(15), 又如果  $\alpha > 1, \beta > 0$ , 则未被扰动运动为稳定. 此外, 有一连续系列的有界运动(16)存在, 未被扰动运动亦属于这一系列, 而该系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动均为稳定. 且在充分小的扰动下, 任何扰动运动均将渐近地各趋于该系列有界运动中之一支.

**证** 取组(15)的解(16), 并在(15)中引入变换, 令:

$$x_1 = y_1 + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_1(y_1, t), \quad x_s = y_s + \varphi_s(y_1, t) \quad (s=2, \dots, n). \quad (19)$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_1(y_1, t) &\equiv \frac{1}{t^{\alpha}} \left[ q_{12} \varphi_2(y_1, t) + \dots + q_{1n} \varphi_n(y_1, t) + \right. \\ &\quad \left. + X_1 \left( y_1 + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, t \right) \right], \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_s(y_1, t) &\equiv r_{s2} \varphi_2(y_1, t) + \dots + r_{sn} \varphi_n(y_1, t) + \\ &\quad + X_s \left( y_1 + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, t \right), \quad (s=2, \dots, n) \end{aligned}$$

得新方程组:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \frac{1}{t} [q_{12} y_2 + \dots + q_{1n} y_n + Y_1(y_1, \dots, y_n, t)] \cdot \frac{1}{D}, \\ \frac{dy_s}{dt} &= r_{s2} y_2 + \dots + r_{sn} y_n + Y_s(y_1, \dots, y_n, t), \quad (s=2, \dots, n) \end{aligned} \quad (20)$$

此处  $r_{s\sigma} = p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\sigma} q_{s\sigma} \quad (s, \sigma = 2, \dots, n)$ .

$$\begin{aligned} Y_1(y_1, \dots, y_n, t) &= X_1\left(y_1 + \frac{1}{t^{a-1}} \varphi_1, y_2 + \varphi_2, \dots, y_n + \varphi_n, t\right) - \\ &\quad - X_1\left(y_1 + \frac{1}{t^{a-1}} \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, t\right), \\ Y_s(y_1, \dots, y_n, t) &= X_s\left(y_1 + \frac{1}{t^{a-1}} \varphi_1, y_2 + \varphi_2, \dots, y_n + \varphi_n, t\right) - \\ &\quad - X_s\left(y_1 + \frac{1}{t^{a-1}} \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, t\right) - \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt}, \quad (s = 2, \dots, n) \\ D &= 1 + \frac{1}{t^{a-1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}. \end{aligned}$$

由此可见  $Y_s(y_1, 0, \dots, 0, t) \equiv 0 \quad (s = 1, \dots, n)$ .

注意到引理 3 的附注关于  $\varphi_s(y_1, t) \quad (s = 1, \dots, n)$  的性质(18), 可写:

$$\frac{1}{D} = 1 + y_1 \phi_1(y_1, t), \quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_1} = y_1 \phi_s(y_1, t), \quad (s = 2, \dots, n)$$

此处  $\phi_s(y_1, t) \quad (s = 1, \dots, n)$  对于一切  $t \geq t_0$  及  $|y_1|$  足够小时, 为  $y_1$  的一致正则函数。

所以(20)可写成:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \frac{1}{t^a} [q_{12}y_2 + \dots + q_{1n}y_n + \bar{Y}_1(y_1, \dots, y_n, t)], \\ \frac{dy_s}{dt} &= r_{s2}y_2 + \dots + r_{sn}y_n + Y_s(y_1, \dots, y_n, t), \quad (s = 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (21)$$

此处  $\bar{Y}_1(y_1, \dots, y_n, t) = Y_1 + [q_{12}y_2 + \dots + q_{1n}y_n + Y_1] \cdot y_1 \phi_1(y_1, t)$ .

显然,  $\bar{Y}_1$  及  $Y_s \quad (s = 2, \dots, n)$  对于一切  $t \geq t_0$  及  $|y_s| \quad (s = 1, \dots, n)$  足够小时为  $y_1, \dots, y_n$  的一致正则函数, 其按  $y_1, \dots, y_n$  的幂的展开式不含低于二次之项, 且

$$\bar{Y}_1(y_1, 0, \dots, 0, t) \equiv Y_s(y_1, 0, \dots, 0, t) \equiv 0 \quad (s = 2, \dots, n).$$

因此, 对于组(21), 引理 1 的一切条件均被满足。由此推知(21)的未被扰动运动为稳定, 且(21)有解:

$$y_1 = c, \quad y_2 = \dots = y_n = 0 \quad (22)$$

对应于一连续系列的驻定运动, 其中  $c$  为任意常数。未被扰动运动亦属于这一系列。该系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动均为稳定。此时, 如果扰动充分小, 任何被扰动运动均将渐近地各趋于该系列驻定运动的一支。

由此推知本引理论断的正确性, 因为在组(15)中, 对应于由表示式(22)所确定的运动是由表示式

$$x_1 = c + \frac{1}{t^{a-1}} \varphi_1(c, t), \quad x_s = \varphi_s(c, t)$$