

微積分習題詳解

(選自台北工專微積分課本)

曉園出版社

微積分習題詳解

（適用於各級中學數學分組教材）

曉園出版社

版權所有·翻印必究

再版

1988年3月第三次印刷發行

微積分習題詳解

平裝本定價：新臺幣 180 元 港幣 60 元

發行人：黃 旭
 發行人：曉 園 出 版 社 有 限 公 司
 發行所：HSIAO-YUAN PUBLICATION COMPANY LIMITED
 臺北市青田街7巷5號
 電話：394-9931 三線
 郵接：1075734-4號
 台大店：臺北市新生南路三段96號之三
 電話：3917012 3947375
 重南店：臺北市重慶南路一段115號
 電話：3313360 3149580
 工專店：臺北市新生南路一段6之9號
 電話：三九六八六六四
 逢甲店：臺中市西屯區文華路113號
 電話：2512759 2546663
 淡江店：臺北市淡水鎮英專路71號
 電話：六二一七八四〇
 香港藝文：九龍又一村達之路30號地下後座
 圖書公司：電話：3-805807 3-805705
 印刷所：遠 大 印 刷 廠
 臺北市武成街36巷16弄15號

出版登記：局版臺業字第1244號

著作執照：臺內著字第 號

前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

微 積 分 習 題 詳 解

(目 錄)

第一章 基本複習

1-1 集合與區間	1
1-2 函數與反函數	4
1-3 數學歸納法	6
總習題 1	8

第二章 極限與連續

2-1 極限定義	15
2-2 極限定理	17
2-3 連 續	20
2-4 無窮極限	22
總習題 2	25

第三章 導函數

3-1 導函數的定義	32
3-2 可微分函數的連續性	35
3-3 微分的基本公式	36
3-4 導數在幾何及物理上的意義	38
3-5 鏈鎖律	40
3-6 隱函數的微分法	42
3-7 高階導函數	48
總習題 3	51

第四章 導數的應用

4-1 切線與法線	60
4-2 極大與極小, 均值定理	63
4-3 單調函數	66

4-4 極值的判定法	69
4-5 曲線的彎曲方向與反曲點	71
4-6 函數圖形的描繪	76
4-7 極值的應用問題	83
4-8 時間變率	87
4-9 微分, 近似值	92
總習題 4	95

第五章 不定積分

5-1 不定積分的定義	112
5-2 不定積分性質	112
5-3 代換積分法	114
5-4 不定積分的應用	118
總習題 5	121

第六章 定積分

6-1 定積分的定義及其性質	127
6-2 微積分的基本定理	130
6-3 變數變換求定積分與上下限的變換	132
6-4 積分的均值定理	137
6-5 曲線所圍區域的面積	139
6-6 體積	144
總習題 6	147

第七章 對數函數與指數函數

7-1 自然對數函數	163
7-2 自然指數函數	164
7-3 以 a 為底的指數函數與對數函數	165
7-4 對數函數的微分法	166
7-5 與對數函數有關的積分法	171
7-6 指數函數的微分法	173

7-7 與指數函數有關的積分法	177
7-8 應 用	179
總習題 7	182

第八章 三角函數與雙曲線函數

8-1 θ 趨於 0 時 $\frac{\sin \theta}{\theta}$	193
8-2 三角函數的微分法	194
8-3 與三角函數有關的積分法	197
8-4 反三角函數及其微分法	200
8-5 與反三角函數有關之積分法	203
8-6 雙曲線函數	206
8-7 雙曲線函數的微分法與積分法	207
總習題 8	209

第九章 平面曲線

9-1 參數方程式	220
9-2 極坐標方程式	223
9-3 弧長的微分法	227
9-4 曲率及曲率圓	230
總習題 9	236

第十章 積分法則

10-1 代換積分法	248
10-2 三角函數的積分法	251
10-3 分部積分法	255
10-4 三角代換法	262
10-5 配方法	266
10-6 有理函數的積分	268
10-7 積分近似值的求法	276
總習題 10	279

第十一章 不定型、廣義積分

11-1 不定型 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$	305
11-2 不定型 $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0° , ∞° 及 1°	307
11-3 廣義積分	310
總複習 11	314

第十二章 定積分的應用

12-1 極坐標曲線所圍成的面積	324
12-2 旋轉體的體積	330
12-3 弧 長	335
12-4 旋轉曲面的面積	340
12-5 質心與形心	348
12-6 功	358
總複習 12	360

第十三章 序列與數列

13-1 序 列	386
13-2 數列的收斂與發散	387
13-3 數列的性質	388
13-4 單調數列與有界數列	391
總複習 13	393

第十四章 無窮級數

14-1 無窮級數的和，收斂，發散	398
14-2 正項級數	400
14-3 正負項級數	404
14-4 冪級數	409
14-5 泰勒定理與泰勒級數	413
14-6 函數的展開與無窮級數的應用	415

14-7 冪級數間的運算	417
14-8 冪級數的微分與積分	420
總複習 14	424

第十五章 立體解析幾何

15-1 空間的直角坐標系	441
15-3 兩點間的距離，分點坐標	445
15-4 有向線的方向餘弦，線的方向數	447
15-5 兩線間的關係	449
15-6 空間的平面方程式	450
15-7 兩平面的夾角	454
15-8 空間的直線方程式	457
15-9 曲面方程式	460
15-10 柱面坐標，球面坐標	466
總複習 15	468

第十六章 偏導函數

16-1 偏導函數的定義	472
16-2 偏導函數的幾何意義	474
16-3 鏈鎖律	475
16-4 高階偏導函數	479
16-5 全微分，近似值	482
16-6 切面及法線	484
16-7 極大與極小	486
總複習 16	488

第十七章 重積分

17-1 二重積分	500
17-2 極坐標面上的二重積分	516
17-3 應用二重積分求薄片的質心	523

17-4 三重積分	533
17-5 柱面坐標及球面坐標上的三重積分	540
總複習 17	547

第十八章 一階常微分方程式

18-1 微分方程式之產生及其解	558
18-2 一階常微分方程式，分離變數法	560
18-3 正合微分方程式	567
18-4 一階線性常微分方程式	572
18-5 一階常微分方程式之應用	577
總複習 18	580

第十九章 常係數之線性常微分方程式

19-1 二階齊次線性方程式	593
19-2 常係數之齊次二階微分方程式	593
19-3 非齊次線性微分方程式	597
19-4 應用問題	601
總複習 19	606

習題 1.1

1. 設 $A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 \leq 4\}$, $C = \{x \mid \text{存在有一整數 } n, \text{ 使 } x = 2n\}$,

試求(1) $A \cup B$, (2) $A \cap B$, (3) $C - B$

$$\text{解: } A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{x \mid (x-1)(x-3) = 0\} = \{1, 3\}$$

$$B = \{x \mid x^2 \leq 4\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

$$C = \{x \mid \text{存在有一整數 } n, \text{ 使得 } x = 2n\} = \{2k \mid k \in \bar{Z}(\text{整數})\}$$

$$\text{故(1) } A \cup B = \{1, 3\} \cup \{x \mid -2 \leq x \leq 2\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\} \cup \{3\}$$

$$(2) A \cap B = \{1, 3\} \cap \{x \mid -2 \leq x \leq 2\} = \{1\}$$

$$(3) C - B = \{2k \mid k \text{ 爲整數}, k \neq -1, 0, 1\}$$

2. 設 $A = [3, 5]$, $B = [0, 3)$, 試求

(1) $A \cup B$, (2) $A \cap (B \cup A)$, (3) $(A \cap B)'$, (4) $A \cup B'$

$$\text{解: } A = [3, 5] = \{x \mid 3 \leq x \leq 5\}$$

$$B = [0, 3) = \{x \mid 0 \leq x < 3\}$$

$$\text{故(1) } A \cup B = \{x \mid 3 \leq x \leq 5\} \cup \{x \mid 0 \leq x < 3\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$$

$$(2) A \cap (B \cup A) = \{x \mid 3 \leq x \leq 5\} \cap \{x \mid 0 \leq x \leq 5\} \\ = \{x \mid 3 \leq x \leq 5\} = A$$

$$(3) (A \cap B)' = \phi' = \{x \mid x \in R\}$$

$$(4) A \cup B' = \{x \mid 3 \leq x \leq 5\} \cup \{x \mid 0 \leq x < 3\}' \\ = \{x \mid 3 \leq x \leq 5\} \cup \{x \mid x < 0\} \cup \{x \mid x \geq 3\} \\ = \{x \mid 3 \leq x\} \cup \{x \mid x < 0\}$$

3. 同上題, 但 $A = (-\infty, 7]$ 及 $B = [7, 15]$

$$\text{解: (1) } A \cup B = (-\infty, 15]$$

$$(2) A \cap (B \cup A) = A = (-\infty, 7]$$

$$(3) (A \cap B)' = \{7\}' = \{x \mid x \in R, x \neq 7\}$$

$$(4) A \cup B' = (-\infty, 7] \cup (-\infty, 7) \cup (15, \infty) = (-\infty, 7] \cup (15, \infty)$$

試求下列不等式之解集合 (4-8)

4. $-3 < 1 - 2x < 4$

解: $-4 < -2x < 3$

$$\Leftrightarrow 4 > 2x > -3$$

$$\Leftrightarrow 2 > x > \frac{-3}{2}$$

故解集合為 $\left\{ x \mid 2 > x > \frac{-3}{2} \right\}$

5. $\left| \frac{1}{x} - 0.01 \right| < 0.01$

解: $\left| \frac{1}{x} - 0.01 \right| < 0.01$

$$\Leftrightarrow -0.01 < \frac{1}{x} - 0.01 < 0.01$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < 0.02$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{50}$$

$$\Leftrightarrow 50 < x$$

故解集合為 $\{ x \mid 50 < x \}$

6. $|x-3| < 2|x+5|$

解: $|x-3| < 2|x+5|$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 < 4(x+5)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 < 4(x^2 + 10x + 25)$$

$$\Leftrightarrow 0 < 3x^2 + 46x + 91$$

$$\Leftrightarrow (3x+7)(x+13) > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{7}{3} \text{ 或 } x < -13$$

故解集為 $\{x \mid x > -\frac{7}{3} \text{ 或 } x < -13\}$

7. $|x-1| - |x+3| \leq 6$

解：∵ $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$ (由三角不等式)

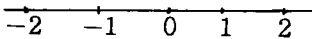
故 $|a| - |b| \leq |a-b|$

令 $a=x-1, b=x+3$

故 $|x-1| - |x+3| \leq |(x-1)-(x+3)| = 4 \leq 6, \forall x \in R$

故本題解集為 $\{x \mid x \in R\}$

8. $4|x^2-1| + |x^2-4| \geq 6$

解： 

分下列情形討論

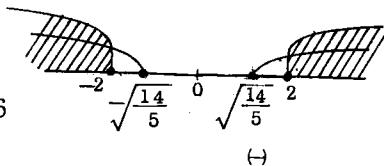
(1) 當 $x \leq -2$ 或 $x \geq 2$

則原式即為

$$4(x^2-1) + (x^2-4) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 8 \geq 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq \frac{14}{5}$$



由右圖解集為 $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

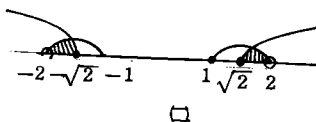
(2) 當 $-2 < x \leq -1$ 或 $1 \leq x < 2$

則原式即為

$$4(x^2-1) - (x^2-4) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 \geq 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 2$$



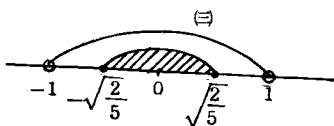
由右圖知解集為 $(-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2)$

(3) 當 $-1 < x < 1$

則原式即為

$$-4(x^2-1) - (x^2-4) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow -5x^2 + 8 \geq 6$$



$$\Leftrightarrow x^2 \leq \frac{2}{5}$$

由右圖可知解集合為 $\left[-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right]$

總括(1)(2)(3)得本題之解集合為

$$(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty) \cup \left[-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right]$$

習題 1.2

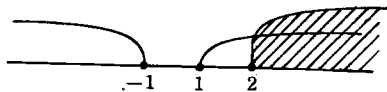
1 若函數 $y=f(x)$ 的定義域，未被指明時，則能使 $f(x)$ 有意義的所有 x 的集合，即為其定義域，依此規定求下列函數的定義域。

解：(1) $f(x) = (x^2 - 1)^{-1} = \frac{1}{x^2 - 1}$

其定義域為 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 1\}$

(2) $g(x) = \sqrt{x-2} \sqrt{x^2-1}$

其定義域為 $\{x \mid x-2 \geq 0\} \cap \{x \mid x^2-1 \geq 0\}$
 $= \{x \mid x \geq 2\} \cap \{x \mid x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1\}$



故其定義域為 $[2, \infty)$

2 設 $f(x) = a + bx$ ，求 $f(f(f(x)))$

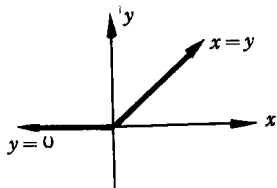
$$\begin{aligned} \text{解：} f(f(f(x))) &= f(f(a+bx)) \\ &= f(a+b(a+bx)) \\ &= f(a+ab+b^2x) \\ &= a+b(a+ab+b^2x) \\ &= a+ab+ab^2+b^3x \end{aligned}$$

3. 求下列各函數的圖形

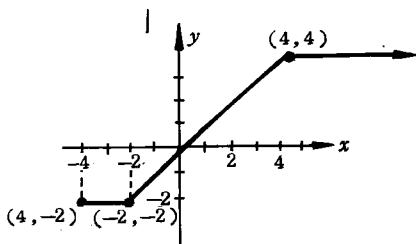
解：(1) $y = \frac{x + |x|}{2}$

① 若 $x \geq 0$ 則 $y = x$

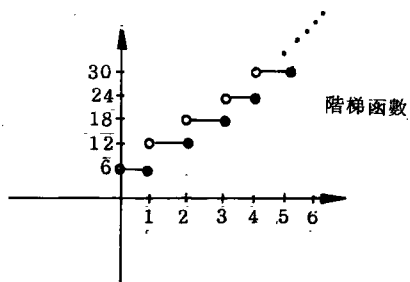
② 若 $x < 0$ 則 $y = 0$



(2)
$$g(x) = \begin{cases} -2, & \text{若 } -4 \leq x < -2 \\ x, & \text{若 } -2 \leq x \leq 4 \\ 4, & \text{若 } 4 < x < 6 \end{cases}$$



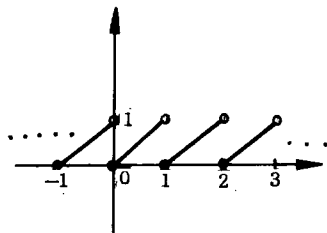
(3) $F(x) = 6n, n-1 < x \leq n$, 定義域為 $(0, 320]$



$$(4) f(x) = x - [x]$$

若 $[x] = n$ 則 $n \leq x < n+1$

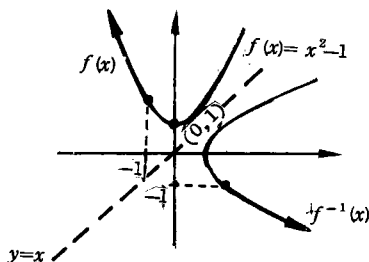
$$\text{故 } 0 \leq f(x) = x - [x] < 1$$



4. 設 $f(x) = x^2 - 1$, $x \in (-\infty, -1]$, 求 f 的反函數 f^{-1} , 並求 f 及 f^{-1} 的圖形。

$$\text{解: } \because x = f(f^{-1}(x)) = (f^{-1}(x))^2 - 1$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} \quad x \in [0, \infty)$$



$\therefore f$ 及 f^{-1} 對稱於 $y=x$

習題 1.3

設 $n \in N$, 試用數學歸納法, 證明以下各題:

1. $1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ 。

解: (1) 當 $n=1$ 則 $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$ 成立

(2) 令 $n=k$ 成立即 $1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$

(3) 則 $n=k+1$ 時

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+k+1 &= \frac{1}{2}k(k+1)+k+1 \\ &= (k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \text{ 得證}\end{aligned}$$

2 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 。

解：(1) 當 $n=1$ 時 $1=1^2$ 成立

(2) 令 $n=k$ 時成立

$$\text{即 } 1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

(3) 則 $n=k+1$ 時

$$\begin{aligned}1+3+5+\cdots+2k-1+(2k+1) \\ = k^2+2k+1=(k+1)^2 \text{ 得證}\end{aligned}$$

3 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ 。

解：(1) 當 $n=1$ 時 $1^3=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot(1+1)^2$ 成立

(2) 令 $n=k$ 時成立

$$\text{即 } 1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

(3) 則 $n=k+1$ 時

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 \\ = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3 \\ = \frac{1}{4}(k+1)^2[k^2+4(k+1)] \\ = \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2 \text{ 得證}\end{aligned}$$