微積分習題詳解

（選自台北工專微積分課本）

曉園出版社

漁權分[illegible][illegible]詳解

[illegible]

[illegible][illegible]出版社

再版 1988年3月第三次印刷發行

微積分習題詳解

平裝本定價：新臺幣 180元 港幣 60元

發行人：黃旭政
發行所：曉園出版社有限公司
HSIAO-YUAN PUBLICATION COMPANY LIMITED
臺北市青田街7巷5號
電話：394-9931 三線
郵撥：1075734-4號
台大店：臺北市新生南路三段96號之三
電話：3917012 3947375
重南店：臺北市重慶南路一段115號
電話：3313360 3149580
工專店：臺北市新生南路一段6之9號
電話：三九六八六六四
逢甲店：臺中市西屯區文華路113號
電話：2512759 2546663
淡江店：臺北縣淡水鎮英專路71號
電話：六二一七八四〇
香港藝文圖書公司：九龍又一村達之路30號地下後座
電話：3-805807 3-805705
印刷所：遠大印刷廠
臺北市武成街36巷16弄15號
出版登記：局版臺業字第1244號
著作執照：臺內著字第 號

前　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精徽的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

微 積 分 習 題 詳 解

（目　　錄）

第一章　基本複習

第二章　極限與連續

第三章　導函數

第四章　導數的應用

第五章 不定積分

第六章 定積分

第七章 對數函數與指數函數

第八章　三角函數與雙曲線函數

第九章　平面曲線

第十章　積分法則

第十一章　不定型、廣義積分

第十二章　定積分的應用

第十三章　序列與數列

第十四章　無窮級數

第十五章　立體解析幾何

第十六章　偏導函數

第十七章　重積分

第十八章　一階常微分方程式

第十九章　常係數之線性常微分方程式

習題1·1

1. 設$A=\{x \mid x^2-4x+3=0\}$，$B=\{x \mid x^2\leq 4\}$，$C=\{x \mid$ 存在有一整數 n，使 $x=2n\}$，

試求(1) $A\cup B$，(2) $A\cap B$，(3) $C-B$

解：$A=\{x \mid x^2-4x+3=0\}=\{x \mid (x-1)(x-3)=0\}=\{1,3\}$

$B=\{x \mid x^2\leq 4\}=\{x \mid -2\leq x\leq 2\}$

$C=\{x \mid$ 存在有一整數 n，使得 $x=2n\}=\{2k \mid k\in Z$（整數）$\}$

故(1) $A\cup B=\{1,3\}\cup\{x \mid -2\leq x\leq 2\}=\{x \mid -2\leq x\leq 2\}\cup\{3\}$

(2) $A\cap B=\{1,3\}\cap\{x \mid -2\leq x\leq 2\}=\{1\}$

(3) $C-B=\{2k \mid k$ 爲整數，$k\neq -1,0,1\}$

2. 設$A=[3,5]$，$B=[0,3)$，試求

(1) $A\cup B$，(2) $A\cap(B\cup A)$，(3) $(A\cap B)'$，(4) $A\cup B'$

解：$A=[3,5]=\{x \mid 3\leq x\leq 5\}$

$B=[0,3)=\{x \mid 0\leq x<3\}$

故(1) $A\cup B=\{x \mid 3\leq x\leq 5\}\cup\{x \mid 0\leq x<3\}=\{x \mid 0\leq x\leq 5\}$

(2) $A\cap(B\cup A)=\{x \mid 3\leq x\leq 5\}\cap\{x \mid 0\leq x\leq 5\}$

$=\{x \mid 3\leq x\leq 5\}=A$

(3) $(A\cap B)'=\phi'=\{x \mid x\in R\}$

(4) $A\cup B'=\{x \mid 3\leq x\leq 5\}\cup\{x \mid 0\leq x<3\}'$

$=\{x \mid 3\leq x\leq 5\}\cup\{x \mid x<0\}\cup\{x \mid x\geq 3\}$

$=\{x \mid 3\leq x\}\cup\{x \mid x<0\}$

3. 同上題，但$A=(-\infty,7]$及$B=[7,15]$

解：(1) $A\cup B=(-\infty,15]$

(2) $A\cap(B\cup A)=A=(-\infty,7]$

(3) $(A\cap B)'=\{7\}'=\{x \mid x\in R, x\neq 7\}$

(4) $A\cup B'=(-\infty,7]\cup(-\infty,7)\cup(15,\infty)=(-\infty,7]\cup(15,\infty)$

試求下列不等式之解集合（ 4－8 ）

4. $-3<1-2x<4$

解：$-4<-2x<3$

$\Leftrightarrow 4>2x>-3$

$\Leftrightarrow 2>x>\dfrac{-3}{2}$

故解集合爲 $\left\{x \mid 2>x>\dfrac{-3}{2}\right\}$

5. $\left|\dfrac{1}{x}-0.01\right|<0.01$

解：$\left|\dfrac{1}{x}-0.01\right|<0.01$

$\Leftrightarrow -0.01<\dfrac{1}{x}-0.01<0.01$

$\Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{x}<0.02$

$\Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{50}$

$\Leftrightarrow 50<x$

故解集合爲 $\{x \mid 50<x\}$

6. $|x-3|<2|x+5|$

解：$|x-3|<2|x+5|$

$\Leftrightarrow (x-3)^2<4(x+5)^2$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9<4(x^2+10x+25)$

$\Leftrightarrow \quad 0 \quad <3x^2+46x+91$

$\Leftrightarrow (3x+7)(x+13)>0$

$\Leftrightarrow x>-\dfrac{7}{3}$ 或 $x<-13$

故解集合爲 $\{x \mid x>-\frac{7}{3}$ 或 $x<-13\}$

7. $|x-1|-|x+3| \leq 6$

解：$\because |a|=|(a-b)+b| \leq |a-b|+|b|$（由三角不等式）

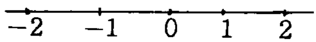
故 $|a|-|b| \leq |a-b|$

令 $a=x-1$，$b=x+3$

故 $|x-1|-|x+3| \leq |(x-1)-(x+3)|=4 \leq 6$，$\forall x \in R$

故本題解集合爲 $\{x \mid x \in R\}$

8. $4|x^2-1|+|x^2-4| \geq 6$

解：

分下列情形討論

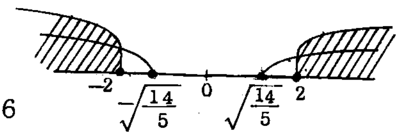
(1)當 $x \leq -2$ 或 $x \geq 2$

則原式即爲

$4(x^2-1)+(x^2-4) \geq 6$

$\Leftrightarrow 5x^2-8 \geq 6$

$\Leftrightarrow \quad x^2 \geq \frac{14}{5}$



(一)

由右圖解集合爲 $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

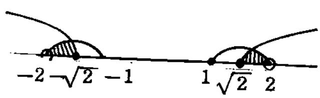
(2)當 $-2<x \leq -1$ 或 $1 \leq x<2$

則原式即爲

$4(x^2-1)-(x^2-4) \geq 6$

$\Leftrightarrow 3x^2 \geq 6$

$\Leftrightarrow \quad x^2 \geq 2$



(二)

由右圖(二)知解集合爲 $(-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2)$

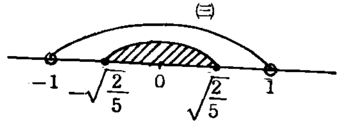
(3)當 $-1<x<1$

則原式即爲

$-4(x^2-1)-(x^2-4) \geq 6$

$\Leftrightarrow -5x^2+8 \geq 6$

(三)



$\Leftrightarrow \quad x^2 \leq \dfrac{2}{5}$

由右圖(三)知解集合為 $\left[-\sqrt{\dfrac{2}{5}}, \sqrt{\dfrac{2}{5}}\right]$

總括(1)(2)(3)得本題之解集合為

$$(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty) \cup \left[-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right]$$

習題 1.2

1 若函數 $y=f(x)$ 的定義域，未被指明時，則能使 $f(x)$ 有意義的所有 x 的集合，即為其定義域，依此規定求下列函數的定義域。

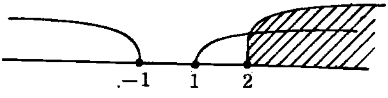
解：(1) $f(x)=(x^2-1)^{-1}=\dfrac{1}{x^2-1}$

其定義域為 $\{x \mid x \in R, x \neq \pm 1\}$

(2) $g(x)=\sqrt{x-2}\ \sqrt{x^2-1}$

其定義域為 $\{x \mid x-2 \geq 0\} \cap \{x \mid x^2-1 \geq 0\}$

$= \{x \mid x \geq 2\} \cap \{x \mid x \geq 1$ 或 $x \leq -1\}$



故其定義域為 $[2, \infty)$

2 設 $f(x)=a+bx$，求 $f(f(f(x)))$

解：$f(f(f(x)))=f(f(a+bx))$

$=f(a+b(a+bx))$

$=f(a+ab+b^2x)$

$=a+b(a+ab+b^2x)$

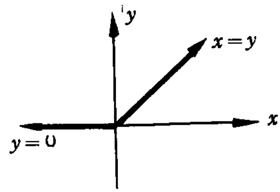
$=a+ab+ab^2+b^3x$

3. 求下列各函數的圖形

解：(1) $y=\dfrac{x+|x|}{2}$

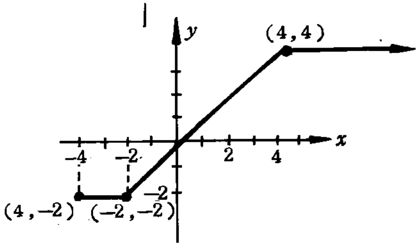
①若 $x\geq 0$ 則 $y=x$

②若 $x<0$ 則 $y=0$

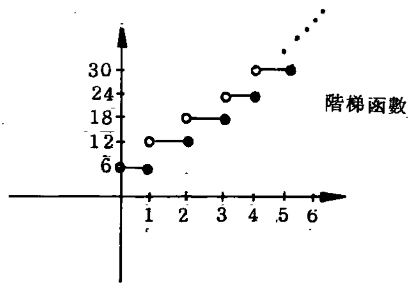


(2)

$$g(x)=\begin{cases}-2\ ,\ 若 -4\leq x<-2\\ x\ ,\ 若 -2\leq x\leq 4\\ 4\ ,\ 若\ 4<x<6\end{cases}$$



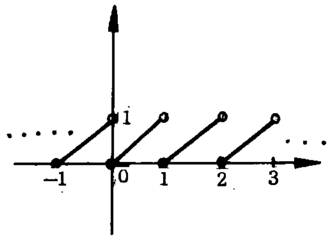
(3) $F(x)=6n$, $n-1<x\leq n$, 定義域為 $(0, 320]$



(4) $f(x)=x-[x]$

若 $[x]=n$ 則 $n\leq x<n+1$

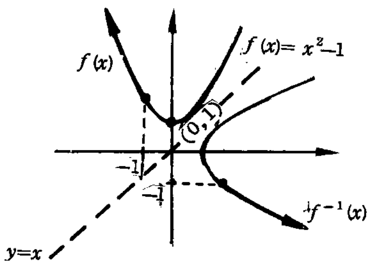
故 $0\leq f(x)=x-[x]<1$



4. 設 $f(x)=x^2-1$，$x\in(-\infty,-1]$，求 f 的反函數 f^{-1}，並求 f 及 f^{-1} 的圖形。

解：$\because x=f(f^{-1}(x))=(f^{-1}(x))^2-1$

$\therefore f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}\quad x\in[0,\infty)$



$\because f$ 及 f^{-1} 對稱於 $y=x$

習題 1.3

設 $n\in N$，試用數學歸納法，證明以下各題：

1. $1+2+3+\cdots\cdots n=\frac{1}{2}n(n+1)$。

解：(1)當 $n=1$ 則 $1=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(1+1)$ 成立

(2)令 $n=k$ 成立即 $1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$

(3)則 $n=k+1$ 時

$$1+2+3+\cdots+k+k+1=\frac{1}{2}k(k+1)+k+1$$

$$=(k+1)(\frac{1}{2}k+1)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$ 得證

2. $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$。

解：(1)當 $n=1$ 時 $1=1^2$ 成立

(2)令 $n=k$ 時成立

即 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

(3)則 $n=k+1$ 時

$1+3+5+\cdots+2k-1+(2k+1)$

$=k^2+2k+1=(k+1)^2$ 得證

3. $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$。

解：(1)當 $n=1$ 時 $1^3=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot(1+1)^2$ 成立

(2)令 $n=k$ 時成立

即 $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$

(3)則 $n=k+1$ 時

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$$=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2[k^2+4(k+1)]$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$ 得證