21世纪普通高等教育应用型规划教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学

（下册） 宋礼民 杜洪艳 主编

复旦大学出版社

高等数学

21世纪普通高等教育应用型规划教材

—9

高等数学

（下册）

宋礼民　杜洪艳　主编

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/宋礼民,杜洪艳主编.—上海:复旦大学出版社,2008.1
ISBN 978-7-309-05619-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.①宋…②杜…　Ⅲ.高等数学　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第120247号

高等数学
宋礼民　杜洪艳　主编

出版发行　复旦大学出版社　上海市国权路579号　邮编200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购)　86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com

责任编辑　白国信
总 编 辑　高若海
出 品 人　贺圣遂

印　　刷　上海第二教育学院印刷厂
开　　本　787×960　1/16
印　　张　38
字　　数　763千
版　　次　2008年1月第一版第一次印刷
印　　数　1—6050

书　　号　ISBN 978-7-309-05619-8/O·402
定　　价　48.00元(上、下册)

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。

内 容 提 要

本教材是以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准，以培养学生的专业素质为目的，充分吸收编者们多年来教学实践与教学改革成果编写而成的.

本书分为上、下册.上册含函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等内容.下册含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容.每节均配有习题，每章配有综合练习题，书末附有习题参考答案，便于教与学.

本书可供高等本专科院校工科各专业使用，也可供其他专业参考.

前　言

《高等数学》是以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准，以培养学生的专业素质为目的，充分吸收多年来教学实践和教学改革成果而编写的.

在编写中，力求贯彻“够用、管用、会用”的三用原则，删去传统本科教材中难而繁的内容，保留在工、农、医、管各本科专业的最基本内容，达到满足本科高校所必需的最低限度，够用即可. 增添以往传统教材中没有的同时又是必须的知识内容，尤其是精选了一批各学科领域中的应用型例题和习题，使教材适合各专业的需要. 淡化传统本科教材偏重理论的倾向，删去理论性较强的内容，强调数学知识的应用，会用为本.

在编写中，注重强调数学的方法和技巧，注重培养学生的数学思维能力，注重提高学生的数学素质，体现出数学既是一种工具，同时也是一种文化的思想. 本书基本概念和原理讲解通俗易懂，同时又兼顾数学的科学性和严谨性；数学的基本技能和技巧叙述准确清晰，每节后有练习题，围绕本节知识内容进行学习和训练，每章后有综合练习，供学有余力的学生进一步提高数学水平选用，本书可供高等本科院校各专业使用，也可供各专科专业选用.

参加《高等数学》(下)编写人员有周学良、谭莉、胡满姑、杜洪艳、张家莲等. 全书的框架结构、统稿定稿由主编宋礼民、杜洪艳负责. 另外，还要感谢复旦大学竺秀山老师对本书的审读工作作出了一定贡献.

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请专家读者批评指正.

编者

2007.10

目　录

第 8 章　向量代数与空间解析几何

学习向量的概念以及向量的代数运算的定义和规则是向量代数的主要内容，这是研究许多数学、力学、电学的必备知识，也是学习工程技术科学和管理科学的有力工具. 向量代数也是研究本章的空间解析几何以及后续的多元函数微积分学的必不可少的基础知识.

空间解析几何也像平面解析几何一样，通过建立空间坐标系，使空间的每一个点与一个有顺序的三元数组对应，把空间的几何图形与方程或方程组对应起来，从而可以用代数方法解决几何问题. 空间解析几何学的知识对于学习多元函数微积分和其他数学知识以及力学、电学等其他自然科学知识来说，也是必不可少的基础知识.

8.1　空间直角坐标系

在平面解析几何中，通过坐标法，把平面上的点与一对有顺序的数组对应起来，使平面上的几何图形与方程(或代数关系式)对应起来，从而达到可以用代数方法研究几何问题的目的. 这种将数学中的两大研究对象"数"与"形"统一起来的作法，是由法国哲学家、数学家笛卡儿首先提出来的，这种使数与形相结合，并用代数方法以及微积分的方法研究几何问题的数学方法和数学思想是数学发展史上的一次划时代的变革.

为了用代数方法研究空间的几何问题，首先必须将空间中的点与有顺序的数组对应起来. 为此，必须建立这种对应的桥梁即空间的坐标系，本章中只介绍下述的空间直角坐标系.

8.1.1　空间直角坐标系的建立

过空间某一点 O 作 3 条两两互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且一般具有相同的长度单位. 点 O 称为坐标原点，这 3 条数轴分别称为 x 轴、y 轴、z 轴，这 3 条轴统称为坐标轴. 通常把 x 轴和 y 轴放置在水平面上，而 z 轴则是沿铅垂线，并规定这 3 条轴的次序和正方向要符合"右手法则"，即以右手握住 z 轴，当右手的

除大拇指外的其他 4 个手指从 x 轴的正方向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转至 y 轴的正方向时，大拇指的指向就是 z 轴的正方向，见图 8－1. 这时，我们便在空间建立了一个空间直角坐标系，并称其为 $O-xyz$ 坐标系，如图 8－2 所示. 习惯上，x 轴、y 轴、z 轴分别称为横轴、纵轴、竖轴.

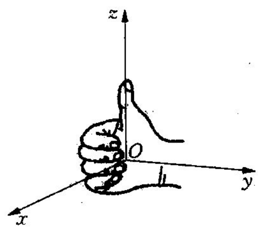

图 8－1

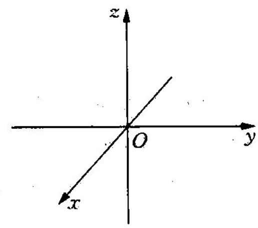

图 8－2

8.1.2　点的坐标的确定

建立了空间直角坐标系 $O-xyz$ 之后，就可以建立空间中的点与 3 个有顺序的数构成的一个数组(以下简称三元有序数组)之间的对应关系.

设 M 为空间中一已知点，过点 M 作 3 个平面分别垂直于 3 个坐标轴，该平面与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别为 P、Q、R，如图 8－3 所示. 设这 3 点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次分别为 x、y、z. 这样空间中一点 M 就唯一地确定了一个三元有序数组，记为 (x, y, z). 反之，对于任何一个给定的三元有序数组 (x, y, z)，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，再过点 P、Q、R 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂面，这 3 个垂面的交点 M 便是由三元有序数组 (x, y, z) 所确定的唯一的一个点. 这样就建立了空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的点 M 与一个三元有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应的关系. x、y、z 分别称为点 M 的 x 坐标、y 坐标、z 坐标，或者分别称为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标，并将点 M 表示为 $M(x, y, z)$.

显然原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$.

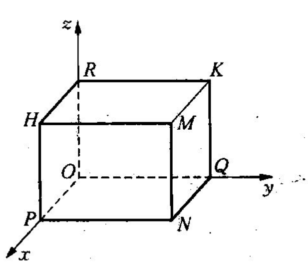

图 8－3

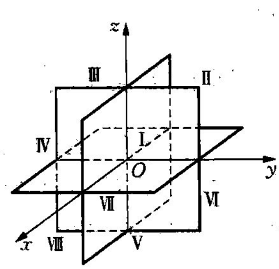

图 8－4

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中,每两条坐标轴所在的平面称为坐标平面,如 x 轴与 y 轴所在的平面称为 xOy 平面,简称 xy 平面.

3 个坐标平面将空间分为 8 个部分,每一个部分叫做一个卦限,在 xy 平面的 4 个象限即第一、第二、第三、第四象限的上方(即 Oz 轴的正方向所指的方向)的 4 部分空间分别为第一、第二、第三、第四卦限,这 4 个卦限的下方依次分别是第五、第六、第七、第八卦限.这 8 个卦限内的点的坐标的正负号由下列表格所确定(见图 8-4).

卦限	第一	第二	第三	第四	第五	第六	第七	第八
坐标的正负号	(+, +, +)	(−, +, +)	(−, −, +)	(+, −, +)	(+, +, −)	(−, +, −)	(−, −, −)	(+, −, −)

坐标平面与坐标轴上的点有一定的特征. xOy 平面、yOz 平面、zOx 平面上的点分别为 $(x, y, 0)$、$(0, y, z)$、$(x, 0, z)$;x 轴、y 轴、z 轴上的点分别为 $(x, 0, 0)$、$(0, y, 0)$、$(0, 0, z)$.

8.1.3 空间中两点间的距离

空间中两个点之间的距离公式是空间解析几何里的重要公式.

设已给两个点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$,则此两点之间的距离 $|M_1M_2|$ 可由勾股定理得到(参阅图 8-5).

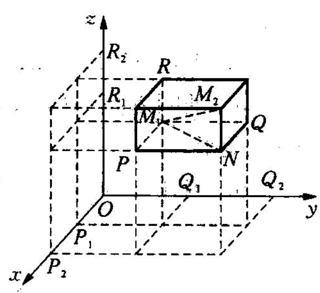

图 8-5

$$
\begin{aligned}
|M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\
&= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 \\
&= |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2 \\
&= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2,
\end{aligned}
$$

所以点 M_1 与 M_2 之间的距离 d 为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (8-1)$$

例 1 求点 $M(2, 3, -4)$ 与坐标原点 O 之间的距离 $|OM|$.

解 由公式(1)知点 M 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 之间的距离为

$$|OM| = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{29}.$$

例 2 证明以点 $A(4, 1, 9)$、$B(10, -1, 6)$ 和 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是

等腰直角三角形.

证 因为

$$|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49,$$
$$|BC|^2=(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2=98,$$
$$|AC|^2=(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2=49.$$

所以
$$|AB|=|AC|=7,$$
$$|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2.$$

因此 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

习题 8.1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$A(1,-2,-3)$; $B(-2,-1,3)$; $C(-2,1,-3)$; $D(2,1,-3)$.

2. 坐标平面上的点和坐标轴上的点的坐标各有什么特征?指出下列各点所在的位置:

$A(0,0,-2)$; $B(2,-1,0)$; $C(0,2,0)$; $D(0,1,-2)$.

3. 自点 $P(a,b,c)$分别作各坐标平面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

4. 求点 $M(1,-2,3)$到各坐标轴的距离.

5. 证明以点 $A(4,3,1)$、$B(5,2,3)$、$C(7,1,2)$为顶点的三角形是一个等腰三角形.

6. 求在 z 轴上且与两点 $A(-4,1,7)$和 $B(3,5,-2)$等距离的点.

8.2 向量及其线性运算

8.2.1 向量的概念

在力学、物理学以及一些应用学科中,通常会遇到两类量,其中一类是只有大小的量,称为数量(也称纯量或标量),如时间、质量、长度、面积等;而另一类量不仅具有大小而且还具有方向,称这种既有方向又有大小的量为向量(也称矢量),如力、速度、加速度、位移、力矩等.

在数学上,往往用一条有方向的线段,即有向线段来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 A 为起点、B 为终点的有