10种思路

高效解所有题型

用数学思想方法速解高考题

徐有标　刘治平　编著

方程与函数的思想方法
数与形结合的思想方法
转化与变换的思想方法
分析与综合的思想方法
特殊与一般的思想方法
分类与归纳的思想方法
对称与对偶的思想方法
构造与建模的思想方法
统计与概率的思想方法
算法与程序（框图）的思想方法

中国青年出版社

用数学思想方法速解高考题

徐有标　刘治平 编著

中国青年出版社

（京）新登字083号

图书在版编目（CIP）数据

用数学思想方法速解高考题/徐有标，刘治平编著.
北京：中国青年出版社，2009
(高考高效教辅丛书)
ISBN 978-7-5006-8945-4
Ⅰ.用… Ⅱ.①徐…②刘… Ⅲ.数学课-高中-解题-升学参考资料 Ⅳ.G634.605
中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第159745号

出版发行 中国青年出版社
社　　址：北京东四十二条21号
邮政编码：100708
网　　址：www.cyp.com.cn
编辑电话：(010) 64007495
责任编辑：宣逸玲 xuanyiling@yahoo.com.cn
组稿编辑：庄伟
营　　销：北京中青人出版物发行有限公司
电　　话：(010) 64017809　64066441（北京区）
印　　刷：聚鑫印刷有限责任公司
经　　销：新华书店

开　　本：700×1000　1/16
印　　张：17.5
插　　页：2
字　　数：300千字
版　　次：2009年10月北京第1版
印　　次：2009年10月第1次印刷
印　　数：1-10000册
定　　价：25.00元

本图书如有印装质量问题，请与出版部联系调换
联系电话：(010) 84035821

编者的话

数学思想，是人们对数学内在规律的理性认识；数学方法是人们在数学活动中，求解数学问题的具体途径.数学思想方法是人们在数学活动中对数学内在规律的理性认识及求解数学问题时具体途径的总称.

数学思想和数学方法既有联系又有区别.思想是方法的升华，方法是思想的体现.

数学思想方法，是人们在数学活动时，展示数学能力的重要平台，也是为快速解题指明了正确方向.

解题实践表明：在解题过程中，若能准确地抓住数学问题隐含的数学思想方法，则就抓住了求解数学问题的牛鼻子，解题就会水到渠成之事.

随着教育改革的深入发展，人们把学习数学知识，渗透数学思想方法的教育，作为数学教育的出发点和落脚点.目前不少数学教育家将学生对数学思想方法的理解、掌握与运用的水平，作为评价学生数学修养的重要指标.

近来我国的高考大纲已明确提出，除考查学生“数学知识和思维能力”外，还要考查学生“数学思想方法”的掌握和运用能力，这一思想在近几年的高考试题中有明显的体现.如2007～2009年全国统一高考试题中(理科含卷Ⅰ、Ⅱ)考查运用数学思想方法解题的频数分布表如下：

思想方法 / 考查频数 / 试题年份	方程与函数的思想方法	数与形结合的思想方法	转化与变换的思想方法	分析与综合的思想方法	特殊与一般的思想方法	分类与归纳的思想方法	对称与对偶的思想方法	构造与建模的思想方法	统计与概率的思想方法	算法与程序的思想方法 / 实施新课标的地区试卷
2009年	19	9	11	10	6	5	6	12	3	8
2008年	18	9	10	15	4	4	3	3	4	7
2007年	19	10	11	17	7	5	5	8	5	3

说明：有的试题运用几种数学思想方法求解，这几种数学思想方法也统计在内.

笔者近几年对全国统一高考数学试卷的分析研究表明，不少考生对数学思想方法认识模糊，理解肤浅，运用不畅，方略呆板，解题盲目、随意，结果造成解题失误，严重影响了高考的成绩.

为了满足广大考生参加高考的实际需要，针对当前学生在解题实践中存在的问题，笔者特撰写了这本书，书中提出的十种数学思想方法，基本上涵盖了中学数学的全部内容．对每一种数学思想方法怎样运用，我们结合近两年来的270多道高考试题的实例，作了详细的分析和具体的解答．在解答过程中，我们力争思路清析、步骤具体、注重通性通法、深入浅出、易读易懂，并对每题作了详细的“点评”．这对帮助同学们更好地确立数学思想方法意识，学会运用数学思想方法去处理数学问题能起到启迪的作用，我们相信，读完这本书后，对提高高考的数学成绩，一定会起到积极的作用．

参加本书编写的还有：杨福玲、刘爱军、张传海、孙枫、李怀峰等老师．

目　录

一、方程与函数的思想方法

重点、难点

重点　什么是方程？方程具有哪些性质？如何将一个形式上是非方程的问题转化为方程问题？什么是函数？函数具有哪些性质？如何将一个形式上是非函数的问题转化为函数问题？

难点　如何灵活准确地运用方程与函数的思想方法进行解题.

知 识 点

在解决数学问题时，对于一些从形式上看是以非方程或非函数的问题出现的，但经过一定的数学变换或构造，使这一非方程或非函数的问题转化为方程和函数的形式，并运用方程和函数的有关性质来处理这一问题，进而使原数学问题得到很好的解决.这一思想方法，我们称之为“方程与函数的思想方法”.

那么什么是方程？含有未知数的等式叫做方程.在中学里我们已经学过的方程有以下几类表达式：

一元方程的一般表达式：$f(x)=0$；二元方程的一般表达式：$f(x,y)=0$；多元方程的一般表达式：$f(x,y,z,\cdots)=0$.

方程有以下一些性质：

使方程等号两边相等的未知数的值叫做方程的解.只含有一个未知数的方程的解，也叫做方程的根.如 $f(a)=0$，a 就是方程 $f(x)=0$ 的解.其几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴交点的横坐标.

能使方程组中每一个方程都适合的未知数的值，叫做方程组的解.

求方程(或方程组)的解，或确定其无解的过程叫做解方程(或解方程组).

一元二次方程的一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，常用的解法有：

①因式分解法；②配方法；③公式法(求根法)：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

根的判别式：$\Delta=b^2-4ac$，它的作用是：

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根.几何意义是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个不同交点；

当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根.几何意义是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与

x 轴相切；

当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根，而有一对共轭的虚数根. 几何意义是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有公共点.

根与系数的关系(韦达定理).

设 x_1、x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个根，则有

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$$

反之，如果有

$$\begin{cases}x_1+x_2=-p,\\ x_1\cdot x_2=q.\end{cases}$$

那么 x_1、x_2 是一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根.

如果两数是某一已知方程的根，在求这两数的差、平方和(差)、立方和(差)等一类问题时，运用根与系数的关系来解较为简便.

那么什么是函数?

如果两个变量 x 和 y，按照某一个法则联系着，当变量 x 在它的可取值的范围里每取一个确定的值时，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，那么变量 y 叫做变量 x 的函数. x 叫自变量，y 叫因变量，并用符号 $y=f(x)$来表示"y 是 x 的函数".

函数有以下的一些基本性质：

函数的定义域：即自变量可取值的范围.

函数的值域：即函数值可取值的范围.

函数奇偶性：如果 $f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$是偶函数；如果 $f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$是奇函数.

函数单调性：在某一区间内递增或者递减的函数，叫做这一区间的单调函数. 这个性质叫做函数的单调性.

函数有界性：设有一个数 $m>0$，如果 x 在允许值的范围内，函数 $y=f(x)$的值的范围适合不等式$|f(x)|\leqslant m$，这种函数就叫做有界函数. 这个性质叫做函数的有界性.

函数周期性：设有正数 l(至少一个)，如果在自变量 x 允许值范围内，有 $f(x)=f(x\pm l)=f(x\pm2l)=\cdots=f(x\pm kl)-\cdots$($k$ 是任意正整数)，这种函数叫做周期函数，最小的正数 l 叫做函数的周期. 这个性质叫做函数的周期性.

如果函数 $f(x)$其周期为 $T=2a$，则$\Leftrightarrow f(x+a)=f(x-a)$；若函数 $f(x)$为奇函数，且关于 $x=a$ 对称，则 $f(x)$以 $T=4a$ 为周期的周期函数，若函数 $f(x)$为偶函数，且关于 $x=a$ 对称，则 $f(x)$以 $T=2a$ 为周期的周期函数.

我们还知道，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，由其图象可知，有如下五条性质：

性质 1：顶点坐标$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$；对称轴：$x=-\dfrac{b}{2a}$.

性质 2：若 $a>0$，且 $\Delta=b^2-4ac\leqslant 0$，那么 $f(x)\geqslant 0$.

当 $x=-\dfrac{b}{2a}$时，$[f(x)]_{\text{最小值}}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

性质 3：若 $a>0$，且 $f(x)\geqslant 0$，那么 $\Delta=b^2-4ac\leqslant 0$.

性质 4：若 $a>0$，且存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(x_0)\leqslant 0$，那么 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$.

性质 5：若 $a<0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$时，$[f(x)]_{\text{最大值}}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

同时，我们还学习了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反函数等重要函数，这些函数的概念、图象和有关性质在解题中也是经常要用到的，应予以掌握.

解题方法指导

用方程与函数的思想方法解题，就是对所给出的数学问题，经过从不同的角度的仔细审视，看看此数学问题的解决，与方程或函数是否有关联，若有关联，就可用方程或函数的有关性质来求解；若给出的数学问题从表面上看是非方程或非函数的问题，如经过一番改造（转化）乃属于方程或函数的问题，此时就可用方程或函数的有关性质来求解.

1. 以方程的意识，解求值的问题

有些求值或化简题，如果纳入方程的思想方法来处理，往往方法巧妙，过程简捷.

[例 1]　(2009 年全国高考试题Ⅰ，理，)已知直线 $y=x+1$ 与曲线 $y=\ln(x+a)$相切，则 a 的值为

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

能力要求　考查求函数的导数的能力；用导数表示切线的斜率与切线方程的能力；求曲线方程中参数值的能力.

解析　方程与函数思想，求函数的导数，用导数表示切线方程.

由 $y'=\dfrac{1}{x_0+a}$，设切点为$(x_0,\ln(x_0+a))$.

则切线方程为 $y-\ln(x_0+a)=\dfrac{1}{x_0+a}(x-x_0)$.

化简为 $y=\dfrac{1}{x_0+a}\cdot x+\ln(x_0+a)-\dfrac{x_0}{x_0+a}$，就是 $y=x+1$，

可知$\begin{cases}\dfrac{1}{x_0+a}=1,\\ \ln(x_0+a)-\dfrac{x_0}{x_0+a}=1.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x_0=-1,\\ a=2.\end{cases}$

选 B.

点评 解方程组，用整体 $x_0+a=1$ 代入求得 $x_0=-1$，方可求 a.

[例 2] **(2009 年全国高考试题Ⅱ，文$_{13}$)** 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n。若 $a_1=1, s_6=4s_3$，则 $a_4=$ ________.

能力要求 考查求等比数列指定项的能力；由"和"关系求公比的能力.

解析 方程思想. 由"和"关系，列方程求公比 q.

由 $a_1=1$，知 $1+q+q^2+q^3+q^4+q^5=4(1+q+q^2)$，

则 $q^3(1+q+q^2)=3(1+q+q^2)$，$q^3=3$，$a_4=a_1q^3=3$.

填 3.

点评 这里，实际上不必求公比，若用求和公式列式，则要讨论 $q\neq1$.

[例 3] **(2009 年全国高考试题Ⅰ，(文、理)$_{14}$)** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n。若 $S_9=72$，则 $a_2+a_4+a_9=$ ________.

能力要求 考查由等差数列指定的前 n 项和求某些项的和的能力.

解析 方程思想. 列方程求 a_1+4d 的值.

注意到 $a_2+a_4+a_9=3a_1+d+3d+8d=3(a_1+4d)$，

而 $S_9=9a_1+9\times8\times\frac{1}{2}d=9(a_1+4d)=72$，则 $a_1+4d=8$.

所以，所求值为 $3\times8=24$. 填 24.

点评 也可由 $S_9=\frac{(a_1+a_9)\times9}{2}=72$，得 $a_1+a_9=2a_5=16$.

$\therefore a_5=8$，$a_2+a_4=a_1+a_5$是位置对称，数值对偶关系

$a_2+a_4+a_9=(a_1+a_5)+a_9=a_5+(a_1+a_9)=3a_5=24$.

这种解法"太技巧"了. 因而选用上面的"通性通法"求解.

[例 4] **(2009 年北京市高考试题，文$_{12}$)** 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^x, x\leqslant1,\\ -x, x>1,\end{cases}$ 若 $f(x)=2$，则 $x=$ ________.

能力要求 考查已知分段函数的函数值求解相应自变量值的能力；解指数方程的能力.

解析 方程与函数思想，注意到 $x>1$ 时，$f(x)<0$，

只能是 $\begin{cases}x\leqslant1,\\ 3^x=2.\end{cases}$ 解得 $x=\log_3^2<1$.

填 $\log_3^2$.

点评 也可以再试解 $\begin{cases}x>1,\\ -x=2.\end{cases}$ 无解.

［例5］（2008年江苏省高考试题，（文，理），）如图1-1，在平面直角坐标系 xOy 中，设三角形 ABC 的顶点分别为 $A(0,a)$，$B(b,0)$，$C(c,0)$；点 $P(0,p)$ 为线段 AO 上的一点（异于端点），这里 a,b,c,p 为非零常数. 设直线 BP、CP 分别与边 AC、AB 交于点 E、F. 某同学已正确求得直线 OE 的方程：$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$，请你完成直线 OF 的方程：（______）$x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$.

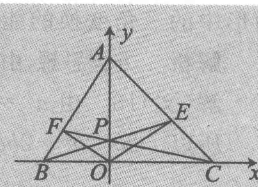

图1-1

能力要求 考查审题、观察与类比推理的能力.

解析 用方程思想方法求解. 从已知条件，我们注意到，直线 OE 的方程就是直线 BE 的方程与直线 AC 的方程的差：

即 $\frac{1}{b}x+\frac{1}{p}y=1$ 与 $\frac{1}{c}x+\frac{1}{a}y=1$ 的差，即 $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$.

类比，直线 OF 的方程是直线 CF 的方程与直线 AB 的方程的差.

即 $\frac{1}{c}x+\frac{1}{p}y=1$ 与 $\frac{1}{b}x+\frac{1}{a}y=1$ 的差，即 $\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$.

故填 $\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$.

点评 此题，也可用方程思想方法直接求直线 OF 的方程.

设点 F 坐标为 $F(x_0,y_0)$，则 $k_{OF}=\frac{y_0}{x_0}$.

点 F 在直线 CP 上，有 $\frac{1}{c}x_0+\frac{1}{p}y_0=1$. ①

点 F 在直线 AB 上，有 $\frac{1}{b}x_0+\frac{1}{a}y_0=1$. ②

①－②，得 $\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)x_0+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y_0=0$，则 $k_{OF}=\frac{y_0}{x_0}=-\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{a}}$.

用 k_{OF} 代入直线 OF 的方程 $y=B_{OF}x$，整理，得

直线 OF 方程为 $\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$.

［例6］（2009年全国高考试题Ⅰ，文$_{18}$理$_{17}$）（文）18. 在△ABC 中，内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c. 已知 $a^2-c^2=2b$，且 $\sin B=4\cos A\sin C$，求 b.

（理）17. 在△ABC 中，内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c，已知 $a^2-c^2=2b$，且 $\sin A\cos C=3\cos A\sin C$，求 b.

能力要求 考查已知三角形中边的关系、角的三角函数关系求边长的能力；三

角形中的三角变换的能力.

解析　方程思想,由已知两个相等关系列方程组求 b,注意 a^2-c^2 与余弦定理有关.

解(文)18　由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow a^2-c^2=b^2-2bc\cos A$

所以　$2b=b^2-2bc\cos A\Rightarrow b=2+2c\cos A.$　①

又由 $\sin B=4\cos A\sin C\Rightarrow\dfrac{\sin B}{\sin C}=4\cos A=\dfrac{b}{c}.$

所以 $4c\cos A=b.$　②

解方程组①和②,消 $c\cos A=\dfrac{b}{4}$ 代入①

得　$b=2+\dfrac{b}{2}$,解得 $b=4.$

解(理)17　由已知,$\sin A\cos C=3\cos A\sin C$,

可得 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\cdot\sin C=4\cos A\cdot\sin C$

同(文)　解得 $b=4.$

点评　这是解三角形问题,综合运用了余弦定理和正弦定理以及三角函数中的诱导公式.本题特点是不知边长求边长,边长隐含在 $a^2-c^2=2b$ 中.

[例 7]　**(2009 年全国高考试题Ⅰ,文$_{17}$)**设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,公比是正数的等比数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,已知 $a_1=1,b_1=3,a_3+b_3=17,T_3-S_3=12$,求$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式.

能力要求　考查求等差与等比数列的公差 d 与公比 q 的能力;求通项的能力.

解析　方程思想,列方程组求公差与公比.

设,公差与公比分别为 d 与 q,由已知,列方程组;

$\begin{cases}1+2d+3q^2=17,\\3+3q+3q^2-1-(1+d)-(1+2d)=12.\end{cases}$ 化简为 $\begin{cases}1+2d+3q^2=17,\\q^2+q-d=4.\end{cases}$

解得 $q=2$(舍 $q=-\dfrac{12}{5}$),$d=2.$

所以数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项分别为

$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1,b_n=3\cdot2^{n-1}.$

点评　这是等差与等比数列的基本综合问题,通项与前 n 项和知识交汇在第 3 项的和与前 3 项和的差上.

[例 8]　**(2008 年全国高考试题Ⅱ,文$_{21}$)**设 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=ax^3-3x^2.$

(Ⅰ)若 $x=2$ 是函数 $y=f(x)$的极值点,求 a 的值;

(Ⅱ)若函数 $g(x)=f(x)+f'(x),x\in[0,2]$,在 $x=0$ 处取得最大值,求 a 的取值范围.

能力要求　考查用导数研究极值相关问题的能力;求函数在闭区间端点取

最大值的条件的能力（这里有字母参数取值范围）；解不等式与反证推理能力.

解析　（Ⅰ）方程与函数，兼用分析与综合法．求导数列方程解之．

由 $f'(x)=3ax^2-6x$ 及 $x=2$ 是极值点，

得　$f'(2)=3a\times4-6\times2=0$，解之　$a=1$.

（Ⅱ）分析与综合

由已知得 $g(x)=ax^3-3x^2+3ax^2-6x=a(x^3+3x^2)-3(x^2+2x)$.

若 $g(0)$ 是函数 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值.

必有 $g(2)=a\cdot8-3\times4+3a\cdot4-6\times2\leqslant g(0)=0$，解得 $a\leqslant\dfrac{6}{5}$，必要条件

反之，当 $a\leqslant\dfrac{6}{5}$ 时，对 $x\in[0,2]$，总有 $x^3+3x^2\geqslant0$.

所以，$g(x)=a(x^3+3x^2)-3(x^2+2x)$

$$\leqslant\frac{6}{5}(x^3+3x^2)-3(x^2+2x)$$

$$=\frac{3}{5}(2x^3+x^2-10x).$$ 证在[0, 2] $\varphi(x)=2x^3+x-10\leqslant0$

设 $\varphi(x)=2x^3+x^2-10x$，令 $\varphi'(x)=6x^2+2x-10=0$.

解得，$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{61}}{b}<0<x_2=\dfrac{-1+\sqrt{61}}{6}<2$.

可知，$x\in[0,x_2]$ 时，$\varphi'(x)\leqslant0$. $\varphi(x)$ 为减函数，

$x\in[x_2,2]$ 时，$\varphi'(x)\geqslant0$，$\varphi(x)$ 为增函数.

又 $\varphi(0)=\varphi(2)=0$. 则 $\varphi(x)$ 在 $x\in[0,2]$ 的最大值为 $\varphi(0)=\varphi(2)=0$.

$\therefore$ 当 $a\leqslant\dfrac{6}{5}$ 时，$x\in[0,2]$，$g(x)\leqslant\dfrac{3}{5}\varphi(x)\leqslant\dfrac{3}{5}\varphi(0)=0=g(0)$. 充分条件

a 的取值范围是 $a\in\left(-\infty,\dfrac{6}{5}\right]$.

点评　由 $g(0)\geqslant g(2)$ 解得 $a\leqslant\dfrac{6}{5}$ 是必要条件，反之当 $a\leqslant\dfrac{6}{5}$ 时 $x\in[0,2]$ $g(x)\leqslant g(0)$，也是 $g(0)$ 在 $[0,2]$ 的最大值的充分条件.

也可以数形结合证明 $\varphi(x)=2x^3+x-10x$ 在 $[0,2]$ 上的最大值是 $g(0)=g(2)=0$，由 $\varphi(x)=x(2x+5)(x-2)$. 当 $x<-\dfrac{5}{2}$ 时，$\varphi(x)<0$　$\varphi(x)$ 在 R 上连续，$\varphi(x)$ 的图象大致如图 1-2 可知在 $[0,2]$ 上，$\varphi(x)$ 的最大值是 $g(0)=g(2)=0$.

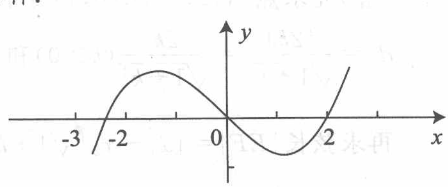

图 1-2

［例 9］ （2008 年全国高考试题Ⅱ、理$_{21}$、文$_{22}$）设椭圆中心在坐标原点，$A(2,0)$，$B(0,1)$是它的两个顶点．直线 $y=kx(k>0)$与 AB 相交于点 D，与椭圆相交于 E、F 两点．

（Ⅰ）若$\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$，求 k 的值；

（Ⅱ）求四边形 $AEBF$ 面积的最大值．

能力要求 考查求曲线上已知弦定比分另一弦弦所在直线方程（这里只求斜率）的计算能力和求椭圆内接四边形的最大值的能力．

解析 （Ⅰ）方程与函数，兼用构造法．解方程组求点坐标，代点列方程解之．图示已知椭圆及题意，如图 1-3，由已知可知椭圆为：

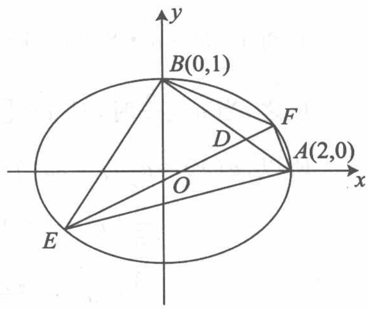

图 1-3

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1,\text{即 } x^2+4y^2=4. \quad ①$$

设点 E、F 坐标为 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，用 $y=kx$代入①，化简为$(1+4k^2)x^2=4$，解得 $x_1=-\dfrac{2}{\sqrt{1+4k^2}}$，$x_2=\dfrac{2}{\sqrt{1+4k^2}}=-x_1$．用$x_1$表示简化书写

又直线 AB 的方程为$\dfrac{x}{2}+y=1$．

解方程组$\begin{cases}y=kx,\\ \dfrac{x}{2}+y=1.\end{cases}$ 消 y，解得点 D 横坐标 $x_0=\dfrac{2}{2k+1}$．

由$\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$，得 $x_0-x_1=6(x_2-x_0)$，即 $7x_0=x_1+6x_2$．

用上面 x_1,x_2,x_0 的值代入上式，得

$\dfrac{14}{2k+1}=-\dfrac{2}{\sqrt{1+4k^2}}+\dfrac{12}{\sqrt{1+4k^2}}$，化简，整理，得 $24k^2-25k+6=0$．

解之，得 $k=\dfrac{2}{3}$或 $k=\dfrac{3}{8}$．

（Ⅱ）先求点 $A(2,0)$、$B(0,1)$分别到直线 EF：$kx-y=0$ 的距离．

$d_1=\dfrac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{2k}{\sqrt{1+k^2}}(k>0)$和 $d_2=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$．

再求弦长$|EF|=|x_1-x_2|\sqrt{1+k^2}=|2x_1|\sqrt{1+k^2}=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}}$．

则 $S_{AEBF}=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BEF}=\dfrac{1}{2}|EF|(d_1+d_2)=\dfrac{2(1+2k)}{\sqrt{1+4k^2}}$

$=2\sqrt{\dfrac{1+4k+4k^2}{1+4k^2}}=2\sqrt{1+\dfrac{4k}{1+4k^2}}\leqslant 2\sqrt{2}$．（当且仅当 $1=4k^2$，$k=\dfrac{1}{2}$取等号）

所以，四边形 $AEBF$ 的最大面积为 $2\sqrt{2}$.

点评 第(Ⅰ)问求解凸显方程思想，第(Ⅱ)问求解凸显构造思想，从计算距离、弦长到面积都在构造它们的表达式，最后构造均值不等式的条件：$\frac{4k}{1+4k^2}\leqslant\frac{4k}{2\sqrt{4k^2}}$为定值.

还可以：$S_{AEBF}=2\cdot S_{\triangle AOF}+2S_{\triangle BOF}=2\cdot\frac{1}{2}y_1\cdot 2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot 1=x_2+2y_2$

$=\sqrt{x_2^2+4y^2+4x_2y_2}\leqslant\sqrt{x_2^2+4y_2^2+(x_2^2+4y_2^2)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

2. 以方程的意识，求向量、复数的问题

向量、复数与方程有着千丝万缕的联系，用方程的思想方法处理向量、复数的问题容易奏效，也是通法.

[例 10] **(2009 年北京市高考试题，理$_2$)** 已知向量 a,b 不共线，$c=ka+b(k\in R)$，$d=a-b$ 如果 $c\parallel d$ 那么

A. $k=1$ 且 c 与 d 相同　　B. $k=1$ 且 c 与 d 反向

C. $k=-1$ 且 c 与 d 相同　　D. $k=-1$ 且 c 与 d 反向

能力要求 考查由向量的位置关系求解向量中参数的能力；并判断两平行向量是同向还是反向的能力.

解析 方程思想，由平行关系设参数列方程组求解.

由 $c\parallel d$，设 $c=\lambda d$，即 $ka+b=\lambda a-\lambda b\Rightarrow(1+\lambda)b=(k-\lambda)a$.

由 a 与 b 不共线，得$\begin{cases}1+\lambda=0,\\k-\lambda=0.\end{cases}$解得 $\lambda=-1$，$k=-1$，

此时，$c=-a+b$ 与 $d=a-b$ 反向，

选 D.

点评 也可设 $\lambda c=d$，得 $\lambda ka+\lambda b=a-b$.

由 a 与 b 不共线，得$\begin{cases}\lambda k=1,\\\lambda=-1.\end{cases}$ 解得 $k=\lambda=-1$.

[例 11] **(2009 年全国高考试题Ⅰ，(文、理)$_{12}$)** 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，右准线 l，点 $A\in l$，线段 AF 交 C 于点 B. 若 $\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$，则 $|\overrightarrow{AF}|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 3

能力要求 考查求椭圆的焦点与准线的能力；向量的运算能力；求向量终点坐标及向量的模的能力.

解析 方程思想，由向量关系列方程求向量终点坐标.

由已知，可知 $C=1$，则右焦点为 $F(1,0)$，右准线为 $x=2$.

则点 A、B 的坐标分别为 $A(2,y_A)$，$B(x_B,y_B)$.

则$\overrightarrow{FA}=(1,y_A)$，$\overrightarrow{FB}=(x_{B-1},y_B)$，由$\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$，

得$\begin{cases}1=3x_B-3,\\ y_A=3y_B.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x_B=\dfrac{4}{3},\\ y_A=3y_B.\end{cases}$

又点$B(\dfrac{4}{3},y_B)$在椭圆上，

则$y_B^{\ 2}=1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{9}=\dfrac{1}{9}$，所以$y_B=\pm\dfrac{1}{3}$，则$y_A=\pm1$.

所以$|\overrightarrow{FA}|=\sqrt{1^2+(\pm1)^2}=\sqrt{2}$.

选 A.

点评 也可数与形结合，解相似三角形求之.

由于只找选项，如图 1-4 所示. $\triangle ABC\backsim\triangle AFD$.

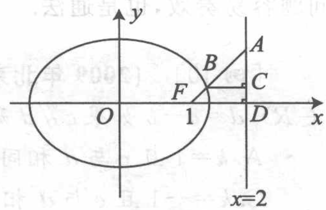

图 1-4

由已知可知$\dfrac{|AB|}{|AF|}=\dfrac{|BC|}{|FD|}=\dfrac{2}{3}$.

则$|BC|=\dfrac{2}{3}\times|FD|=\dfrac{2}{3}$，

又$|BF|=e|BC|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

所以$|\overrightarrow{AF}|=3|BF|=\sqrt{2}$.

其中省略了求焦点坐标、准线方程和推导$\dfrac{|AB|}{|AF|}=\dfrac{2}{3}$的过程.

[例 12] **(2008 年全国高考试题Ⅰ，理4)** 设$a\in R$，且$(a+i)^2i$为正实数，则a等于(　　)

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. -1

能力要求 考查复数的基本运算的能力和确定正实数的判断的能力.

解析 用方程思想方法求解.

$(a+i)^2i=(a^2-1+2ai)i=-2a+(a^2-1)i$.

$\because (a+i)^2i$为正实数，

$\therefore\begin{cases}-2a>0,\\ a^2-1=0.\end{cases}\Rightarrow a=-1$.

故选 D.

点评 复数域内的运算能力是考纲的要求应熟练掌握.

[例 13] **(2008 年北京市高考试题，理9)** 已知$(a-i)^2=2i$，其中i是虚数单位，那么实数$a=$________.

能力要求 考查复数的基本运算的能力及复数相等的定义的理解、记忆的能力.