

力学参考资料(十七)

断裂力学

(五)

贵州省图书馆

科学技术文献出版社重庆分社

目 录

非线性断裂力学的最新发展	(1)
弹性动态裂纹尖端应力场的分析	(10)
Griffith裂纹准静态扩展的热力学	(29)
断裂韧性及评价方法	(40)
应力奇异性与断裂力学	(62)
蠕变裂纹的扩展	(83)
有限元法分析	(83)
关于裂纹扩展速率的实验结果	(92)
论随机载荷下的疲劳可靠性	(99)
多幅载荷下的疲劳可靠性	(110)
对钢筋混凝土梁内裂纹的断裂分析	(119)
魏伯尔(Weibull)脆性断裂统计理论的一个新的应用方法	(130)
脆性断裂的统计方法	(138)
确定断裂韧性的方法	(143)
用于测定J积分值的一个简单方法	(147)
三角形四分点元素作为弹性和全塑性裂纹尖端元素的研究	(150)

非线性断裂力学的最新发展*

J. W. Hutchinson

引言

近几年来,非线性断裂力学的研究成果已开始得到实际的应用。我愿意谈谈这方面的某些新的进展。首先评述非线性裂纹问题的几个基本问题,然后讨论裂纹扩展的起始,接着再介绍在大范围屈服条件下一个分析裂纹少量扩展和稳定性的新方法。最后讨论在一般屈服条件下,应用单一的裂纹顶端附近的基本断裂准则来分析裂纹的起始和扩展所取得的有限的成就。关于类似的题目,已有 Carlsson^[1]、Paris^[2]和 Rice^[3]等的评述文章。虽然本文侧重于理论方面,但也将力图阐明理论和实验相辅相成的制约关系。这种理论和实验的相互影响一直是非线性断裂力学发展的重要特点。

J 积分和裂纹顶端的应力应变场

把线弹性断裂力学推广到大范围屈服领域中去的统一的理论基础,乃是 J 积分。 J 积分是 Rice 在 1968 年^[4]和 Cherepanov 在俄国^[5]分别讨论裂纹问题时引入的。

假定小应变非线性弹性(塑性力学的变形理论)材料的应变能密度为 $W(e)$, 由此可确定应力为

$$\sigma_{ij} = \partial W / \partial \epsilon_{ij} \quad (1)$$

而且还假定,图 1 所示的原型物体处于平面应变或平面应力状态。材料是均匀的及各向同性的。 P 是作用于物体的单位厚度的广义力, Δ 是相应的广义位移(即 P 通过 Δ 做功)。我们假定带裂纹的物体与一(单位厚度)柔度

为 C_M 的线性弹簧相串联(其原因下面自明),因此系统总的广义位移为

$$\Delta_T = \Delta + C_M P \quad (2)$$

PE 被定义为系统单位厚度的位能, J 是在 Δ_T 固定的情况下裂纹在其平面内扩展单位长度的(单位厚度)能量释放率,即

$$J = - \left\{ \frac{\partial PE}{\partial a} \right\}_{\Delta_T} \quad (3)$$

很容易证明,上面定义的能量释放率与弹簧柔度 C_M 无关。因为 $C_M \rightarrow \infty$ 相应于所指定的不变载荷 P , $C_M = 0$ 相应于指定位移 Δ , 因此,对于这些极端情况及介乎其间的所有

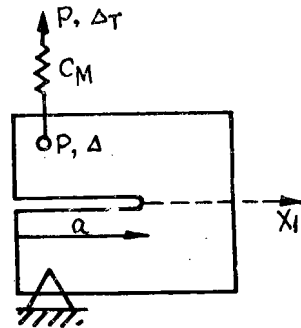


图 1 串联有线性弹簧的带裂纹物体

其它情况而言, J 均相同。设 P 为 Δ 和 a 的函数, (3) 式化为

$$J = - \int_0^{\Delta} \frac{\partial P}{\partial a} (\bar{\Delta}, a) d\bar{\Delta} \quad (4)$$

或设 Δ 为 P 和 a 的函数, (3) 式变为

$$J = \int_0^P \frac{\partial \Delta}{\partial a} (P, a) dP \quad (5)$$

* 本文是作者在加拿大第七届应用力学会议 (CANCAM) (1979年5月27日—6月1日)上的大会报告。

上面两个式子是Rice导出的^[6]。Rice还把 J 表示为一个其值与途径无关的线积分表示式:

$$J = \int_{\Gamma} (W n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) dS \quad (6)$$

式中 Γ 为任一围绕裂纹顶端的、逆时针方向的周线, u_i 为位移向量, n_i 为 Γ 的单位外法线向量, ds 为线元长度。

虽然 J 是服从变形理论的带裂纹物体的能量释放率, 但是它还有一个与非线性断裂力学密切有关的其它作用。它可作为裂纹顶端奇异应力应变场的幅度。例如, 假设当 $\varepsilon \gg \varepsilon_0$ 时单轴应力-应变曲线为

$$\varepsilon/\varepsilon_0 \sim \alpha(\sigma/\sigma_0)^n \quad (7)$$

式中 σ_0 为屈服应力, $\varepsilon_0 = \sigma_0/E_0$ 为屈服应变。而且还假定(7)式按 J_2 的变形理论推广到多轴状态, 即

$$\varepsilon_{ij}/\varepsilon_0 \sim \frac{3}{2} \alpha (\sigma_e/\sigma_0)^{n-1} S_{ij}/\sigma_0,$$

$$\sigma_e^2 = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (8)$$

式中 S_{ij} 为应力偏量。因而裂纹顶端应力应变场的渐近表达式为^[7,8]

$$\sigma_{ij} \sim \sigma_0 \left\{ \frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right\}^{\frac{1}{n+1}} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (9)$$

$$\varepsilon_{ij} \sim \alpha \varepsilon_0 \left\{ \frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right\}^{\frac{n}{n+1}} \bar{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \quad (10)$$

式中 r 和 θ 为以裂纹顶端为中心的极坐标。 $\bar{\sigma}_{ij}$ 和 $\bar{\varepsilon}_{ij}$ 为 θ 的无量纲变数, 它们与规范化的常数 I_n 一样, 取决于应力应变场对裂纹的对称性以及平面应变还是平面应力起主要作用。

裂纹两表面分离的大小, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 以 $r^{1/(n+1)}$ 的方式变化。我们把 45° 线与裂纹面相交处的分离大小(见图2)定义为有效的裂纹顶端张开位移 δ_t , 其表示式为:

$$\delta_t = d(\varepsilon_0, n) \frac{J}{\sigma_0} \quad (11)$$

Shih^[9]对平面应变和平面应力情况分别给出了 d 的值。在平面应变情况下, d 值可从 $n \rightarrow \infty$ 时的0.8左右到 $n=3$ 时的0.3的范围內变化, 而随 ε_0 的变化则不大。对于平面应

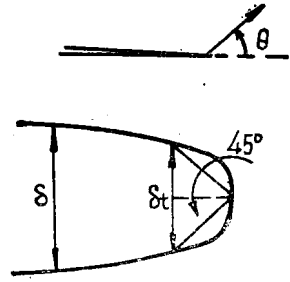


图2 裂纹顶端张开位移

力的情况, 相应的变化是从1.0到0.4左右。在应变硬化很小的区域内, d 随 n 变化相当大。对于应变硬化很小或为零的材料而言, 在平面应变情况下, 文献中报道的^[9,10]有限元计算的结果是 d 从0.8到0.5左右变化。虽然 δ_t 和 J 的关系并没有如予料的那么确定, 但(11)式告诉我们, δ_t 也可作为裂纹顶端应力应变场强度的度量。

裂纹顶端应力应变场起主要作用的区域以及单参数作为裂纹顶端特征量的局限性

对于单一载荷作用下的静态裂纹, 在载荷单调增加时, 可以预料到, 塑性加载大体上是成比例的。因此, 变形理论的解应是相应的塑性增量理论解的一个很好的近似。不少数值计算的结果表明情况确是如此。特别是, 若在塑性区域内采用标准的增量理论, J 的线积分表达式(b)基本上是与途径无关的。采用 J 或 δ_t 的临界值来确定裂纹扩展的起始点的理由(与其它几何的和载荷的参数无关)是假设, 裂纹顶端应力应变场的(9)式和(10)式在裂纹顶端附近的有限应变和断裂过程的区域(这里(9)式和(10)式已不再成立)周围起主要作用(即为其很好的近似)。因为该有限应变的区域(通常也是断裂过程区)的大小与 δ_t 为同一数量级, 因此, (9)式和(10)式起主要作用的区域必须比 δ_t 大很多。

McMeeking^[10]以塑性力学有限应变的 J_2 流动理论为依据,应用有限元法研究了平面应变条件下I型裂纹顶端附近小范围屈服的特性。(小范围屈服指塑性区与裂纹长度及面内的其它有关的长度量来比是很小的渐近情况。I型指应力应变场对裂纹面是对称的。)McMeeking发现,当初始屈服应变值小于0.01的情况下,有限应变的影响在约两倍或三倍 δ_t 的距离内是重要的。在距裂纹顶端超过 $3\delta_t$ 的区域内,小应变理论得到的结果是准确的, J 积分基本上与途径无关。在小应变的问题中应用 R 来代表裂纹顶端应力应变场的(9)式和(10)式起主要作用的区域的尺寸(半径)。由McMeeking的著作中可以推出,应用 J 或 δ_t 作为描写裂纹顶端附近平面应变特性的、与结构形状无关的单参数的必须条件大致为:

$$R > 3\delta_t \quad (12)$$

近来一些研究工作^[11,12]试图确定在有裂纹物体整体屈服的大范围屈服条件下,裂纹顶端应力应变场起主要作用的区域的尺寸 R 。作为这些研究工作的基本材料,我们记得,当人们刚开始讨论把 J 作为大范围屈服条件下进行断裂分析的可能的强度度量时,McClintock^[13]就指出过 J (或其它任意单参数,如 σ_t)的下列局限性。他指出,对于整体屈服条件下的弹性-全塑性物体而言,裂纹顶端附近的应力或应变场,均与结构形状无关。图3给出了裂纹顶端附近应力应变场完全不同的两种平面应变滑移线场的例子。对于有边缘裂纹的受弯板条而言,在裂纹顶端有很强三轴性和很大的正应力,这与众所周知的Prandtl滑移线场的情况相类似。对于有中心裂纹的拉伸板条来说,裂纹顶端前面的应力是平面应变拉伸屈服应力,比在其它情况下得到的应力要低得多。在有中心裂纹的板条中,这种应变场与集中在从裂纹顶端开始的、与裂纹成 45° 的平面内的应变是不同的。

这些结果看来与下列说法有矛盾:当给定 J 后,应力应变场(9)式和(10)式唯一地确定

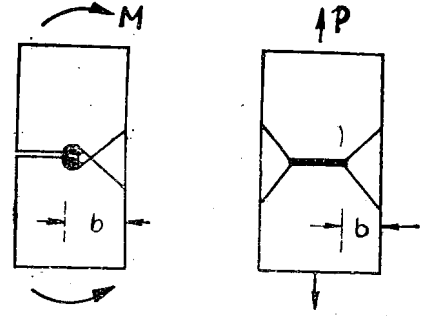


图3 整体屈服的有边缘裂纹的受弯板条和有中心裂纹的拉伸板条

定了裂纹顶端的渐近条件。上面的说法取决于一定程度的应变硬化(即 n 值为有限)。在弹性-全塑性特性的($n \rightarrow \infty$)这一极限情况下,未予考虑的一些奇异项变得有可能与(9)式和(10)式一样重要。换言之, θ 的函数 $\bar{\sigma}_{ij}$ 和 $\bar{\epsilon}_{ij}$ 仅当 n 为有限时才是唯一确定的。这一点在图3给出的两种情况中得到了反映。一般来说,如果要用如 J 或 σ_t 等单参数来描写大范围屈服条件下不同开裂形状的断裂现象,需要一定程度的应变硬化。

关于单参数法的局限性(如关于应变硬化和形状的依赖性),近来才在文献中出现定量的估计。有边缘裂纹的受弯板条看来很便于应用。为了便于这种讨论,把标准紧凑拉伸试样视为一种弯曲型的几何形状。

McMeeking和Parks^[11]应用了上面提到的有限应变的有限元程序。指出,对于全塑性的有边缘裂纹的受弯板条,如果在相应的 J 值下满足

$$b > 25J/\sigma_0 \quad (13)$$

那么其裂纹顶端附近的应力应变场基本上与小范围屈服下求得的相同。这个条件看来与初始屈服应变的依赖关系不大。更重要的是下列事实:即使在没有应变硬化时,上面的对应关系也是成立的。条件(13)在这之前已经提出过,并已得到了间接的实验证明^[2,14]。因为对于低到中等的应变硬化 n ,在平面应变条件下,有 $\delta_t \approx 0.6J/\sigma_0$,因此,由(13)式可知,未开裂的韧带 b 必须(近似)满足

$$b > 40\delta_t \quad (14)$$

在全塑性的条件下, 如果假定屈服限于在韧带发生, 则前面讨论的区域 R 的大小必定是未开裂韧带 b 的某一分数。这种函数关系取如下形式:

$$R = g(n, \varepsilon_0) b \quad (15)$$

上面的讨论表明, 对于有边缘裂纹的受弯板条而言, g 对于 n 或 ε_0 的依赖关系均不十分大。比较 (12) 式和 (14) 式, 注意到 (15) 式, 可得 $g \cong 0.07$ 。关于 J 起支配作用的条件这一更基本的表达式, 即 $R = 0.07b$ 再加上 $R > 3\delta_t$, 消去 R , 即得大家比较熟悉的关系式 (14) 式或 (13) 式。Shih 和 German 的论文^[12]更进一步证实了 (15) 式内的 $g \cong 0.07$ 这一值。他们采用小应变的有限元程序, 把所计算的受弯曲载荷作用的全塑性的有边缘裂纹板条的应力应变场, 在相应的 J 值下, 与奇异性起支配作用的应力应变场 (9) 式和 (10) 式作了比较。在距裂纹顶端距离大致小于 $R \cong 0.07b$ 时, 对于两种硬化指数 $n = 3$ 和 $n = 10$, 两者符合得相当好。

另一极端情况是有中心裂纹的平面应变拉伸板条。如前所述, 由于在弹性-全塑性的极限情况下, 其裂纹顶端附近的应力应变场根本不同于 (9) 式和 (10) 式相应的极限, 因此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, (9) 式和 (10) 式起主要作用的区域的半径 R 应趋于零。这方面的研究工作^[11, 12]表明, 对于有中心裂纹拉伸板条, 在较低的应变硬化率 ($n = 10$) 下整体屈服时, 与 (13) 式相应的关系式可以取为:

$$b > 200J/\sigma_0 \quad (16)$$

在这一应变硬化率下, 由 (12) 式、(14) 式和 (15) 式, 可以求得 $g \cong 0.01$ 。也就是说, 当 $n = 10$ 时, 奇异场起主要作用的区域仅占未开裂韧带的 1%。对于全塑性的有中心裂纹拉伸板, 条件 (16) 给单一的特征参数的应用加上了很严格的限制。这一点我们下面要进一步加以讨论。

裂纹扩展的起始

J 有可能把工程断裂力学推广到大范围屈服的场合。这一点, 在 J 刚引入时立即被人认识到了^[6, 15, 16]。但是只是由于 Begley 和 Landes^[15, 16] 革新的实验工作, 这才确立了使用 J 的可能性, 并为最近五年来的许多工作 (包括上一节描写的部分工作) 提供了最初的动力。

Begley 和 Landes 指出, 在大范围屈服条件下, 可能用各种类型的试样, 确定断裂韧度。用 K_{IC} 代表断裂韧度 (即在平面应变小范围屈服的试验中确定的裂纹起裂时的应力强度因子), 在起裂时相应的 J 值为^[6]:

$$J_{IC} = (1 - \nu^2) K_{IC}^2 / E \quad (17)$$

式中 ν 为泊松比。Begley 和 Landes 的一系列试验证实了这个关系式。随后, 许多实验室的实验工作对于这些初步的研究进一步作了改进 (见文献 [2] 中的讨论以及文献 [17] 中的参考文献)。现在一般人看来都同意, 弯曲试验的试样可在大范围屈服的条件下用来确定断裂韧度。单就试验的目的而言, 这已是一大成就, 因为对于高韧度和中等屈服强度的金属, 采用这种方法测定断裂韧度就无需乎应用小范围屈服试验中所要求的大型试样了。

(11) 式描写的是裂纹起裂点处裂纹顶端张开位移 δ_t^* 和 J_{IC} 之间的关系。测量的结果在一定程度上证实了这个关系式 (见文献 [18] 及文献 [10] 中的讨论)。作这种比较的困难之点乃是 (11) 式中的 d 对于应变硬化的依赖关系看来很强。 δ_t^* 的典型值分布在高强度低韧度金属的 0.01 毫米到中强度高韧度金属的十分之几毫米的范围内。对于弯曲试样而言, 如果 $\delta_t^* = 0.2$ 毫米, (14) 式要求未开裂的韧带应至少为 8 毫米。对于同样材料的中心裂纹拉伸试样, (16) 式要求的韧带为上面给出的 8 倍左右。如果按照在小范围屈服条件下起裂的要求 (即有效 K_{IC} 试验的条件) 选择这两种试样的尺寸, 则其韧带至少约为 250 毫米左右。

因此, 采用全塑性弯曲试样的优点是显而易见的。

在Begley和Landes初始工作结束不久, Rice、Paris和Merkle^[19]对于深边缘裂纹弯曲试样(如图4所示), 求得了一个非常有用的 J 的公式。对于深裂纹的试样, 他们求得的 J 的公式是严格的, 它是用试验中定量测得的载荷和位移来表达的。用 Δ_{nc} 代表图4中的试样当无裂纹($a=0$)载荷为 P 时载荷点的挠度, 则令

$$\Delta_c = \Delta - \Delta_{nc} \quad (18)$$

式中 Δ 为有裂纹时的总挠度。(与试样串联的弹簧是供下面讨论稳定性时用的。如前所述, 这种弹簧并不改变 J 与 P 或 Δ 之间的关系)。文献[19]中的结果为

$$J = \frac{2}{b} \int_0^{\Delta_c} P d\Delta_c \quad (19)$$

由于有如(19)式那样简单的公式, 使得采用 J 作为裂纹顶端的参数比起采用其它并无这种类似简单公式的一些参数来说更为可取了。

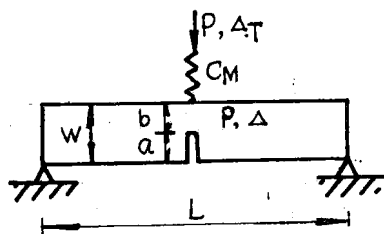


图4 与线性弹簧串联加载的三点弯曲试样

J控制的裂纹扩展

Paris等人^[20]和Garwood等人^[21]根据下面要描述的试验结果, 提出了一个分析有限稳定准静态裂纹扩展的比较简单的方法。在确定 J 在起裂时的临界值(在平面应变条件下为 J_{IC})的试验中, 一些试验人员^[17]应用(19)式或类似的公式来测定 J 和裂纹少量扩展量 Δ_a 之间的关系。图5绘出了典型的中强度高韧度钢的 J 阻力曲线 $J_R(\Delta_e)$ 。在图5中减去了起裂前由于裂纹顶端钝化而引起的少量

的表观扩展。对于这类钢, 为使 J 达到 J_{IC} 的两倍所要求的裂纹扩展量 D 一般小于几毫米。这些曲线用来外推从而求得起裂值 J_{IC} 。但是人们有理由相信, 在一定的限制条件下(称之为 J 控制的裂纹扩展), J 阻力曲线可以认为是不依赖于几何形状的材料特征曲线——例如见Rice的综述文章^[3]中的讨论。

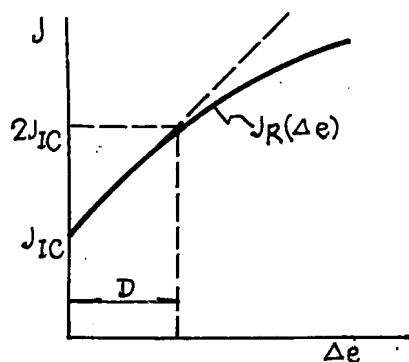


图5 J 阻力曲线

J 积分基于塑性力学的变形理论, 它无法计及弹性卸载或高度非比例的塑性加载的影响。因此, J 控制的裂纹扩展应满足如下条件: 弹性卸载和非比例加载的区域(其半径约为 Δ_a)处在(9)式和(10)式描写的奇异应力应变场内部, 并为该奇异应力应变场所控制, 如图6所示。 J 控制裂纹扩展的两个条件为^[22]:

$$\Delta a \ll R \quad (20)$$

以及

$$D \ll R \quad (21)$$

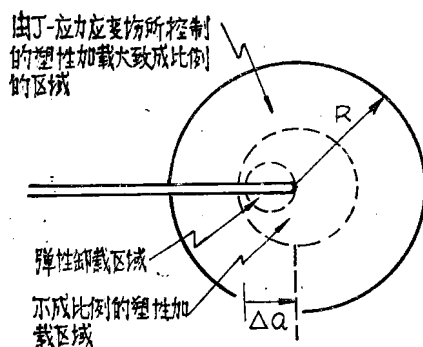


图6 J 控制裂纹扩展的裂纹顶端附近条件的示意图

式中 D 如图5所示, 为

$$D = J_{IC} / (dJ_R/da)_C \quad (22)$$

第一个条件是显而易见的。第二个条件(21)式保证 J 随裂纹扩展足够快地增加, 从而使在 R 内部一个环形区域(如图6所示)内, 变形理论可以成为一个很好的近似。

对于如图3所示的整体屈服形状而言, 屈服区限于未开裂的韧带, R 和 b 的关系服从(15)式。这时, 条件(21)式可以用无量纲的形式表示为:

$$\omega = \frac{b}{J_{IC}} \left[\frac{dJ_R}{da} \right]_C \gg 1 \quad (23)$$

根据(20)式以及关于 R 尺寸的讨论可以判断, 在 J 控制的条件下, 裂纹可能扩展的量是很小的。但是对于许多中强度合金来说, 由于 D 很小, 因此在 J 控制的条件下 J 仍可能高出 J_{IC} 很多。直至最近, 才有人试图改进条件(20)式和(23)式。对于边缘裂纹弯曲试样, Shih和Dean^[28]进行了数值计算, 据此提出了尝试的建议: (20)式和(23)式应近似为

$$\Delta a < 0.06b \quad (24)$$

$$\omega > 10 \quad (25)$$

对于有中心裂纹拉伸试样而言, 可以预料到这些条件要严格得多, 正如一些试验所表明的那样^[24]。

J-控制裂纹扩展的稳定性

Paris 及其合作者^[20]提出了一个基于 J 阻力曲线的稳定性分析, 在基本思想上与线弹性断裂力学的阻力曲线分析相类似。如果仅容许裂纹少量扩展, 相应的 J 的增加又较大, 则确定裂纹扩展是否稳定就是一个十分重要的问题。

为了说明文献[20]和[22]提出的方法, 研究了图4的系统。假设加载点总位移 Δ_T 是给定的。线性弹簧的柔度 C_M 可以取为试验机的柔度或者是把载荷传至有裂纹构件的周围结构的柔度。假定裂纹已扩展 Δa , 再加载使之继续扩展, 即

$$J = J_R(\Delta a) \quad (26)$$

在给定 Δ_T 的情况下, 为使状态处于稳定, 要求

$$\left[\frac{\partial J}{\partial a} \right]_{\Delta_T} < \frac{dJ_R}{da} \quad (27)$$

这也就保证了裂纹的任意“偶然的”小的扩展能够为材料的撕裂阻力所制止。Paris 等人^[20]引入了无量纲的撕裂力和撕裂阻力:

$$T = \frac{E}{\sigma_o^2} \left[\frac{\partial J}{\partial a} \right]_{\Delta_T} \quad \text{和} \quad T_R = \frac{E}{\sigma_o^2} \frac{dJ_R}{da} \quad (28)$$

因此稳定的条件成为

$$T < T_R \quad (29)$$

对于图4所示的系统得到了 T 的一个比较简单的公式, 它在深裂纹的极限情况下是精确的^[22]。对于整体屈服的、弹性-全塑性的有裂纹的梁, 结果为

$$T = \frac{4EP^2}{\sigma_o^2 b^2} (C_{nc} + C_M) - \frac{EJ}{\sigma_o^2 b} \quad (30)$$

式中 P 为有裂纹梁的极限载荷, C_{nc} 为无裂纹梁的弹性柔度。可以预料, 系统柔度通过 T 对稳定性有很大的影响, 但不影响 J 。当然, 在固定的载荷下($C_M \rightarrow \infty$), 整体屈服的全塑性梁是不稳定的。

Paris 等人^[28]进行了一系列试验, 在试验中在上述的深裂纹弯曲试样之上串联插入可调节柔度的弹簧。对与不同柔度弹簧串联的一些同样试样进行一系列的试验, 验证了稳定性条件(29)式的正确性。他们用的材料在起裂时的撕裂阻力为 $T_R \cong 36$, $D \cong 1.2$ 毫米, 并且其试样满足 $\omega = 15$ 的条件(25)式。他们的试验确实发现, 当 T 值很接近 $T_R = 36$ 时, 稳定过渡到不稳定。

在文献[20]中编集了在不同温度下许多钢种的 T_R 的值。对于高强度低韧度合金而言, T_R 通常很小, 1左右或低于1。另一方面, 许多中强度钢的 T_R 值超过30, 有些则可高达200。在许多情况下 T 值要小得多, 因此裂纹扩展量少时可安全地得到制止。为了说明起见, 研究了一无限物体中的有限裂纹, 其材料在简单拉伸下有如下关系: $\varepsilon/\varepsilon_o = (\sigma/\sigma_o)^n$ 。

若 ε^∞ 为远处垂直于裂纹面的单向应力引起的远处的应变, 则

$$T = h(n) (\varepsilon^\infty / \varepsilon_0)^{\frac{n+1}{n}} \quad (31)$$

式中 $h(n)$ 在 n 小于 10 时约为 3^{26} 。仅当总应变 ε^∞ 大致为有效屈服应变的 10 倍时, T 才超过 30。

Garwood, Robinson 和 Turner (文献 [25] 及未发表的论文) 也提出了一个与上述性质相仿的方法。

关于建立起裂和裂纹扩展的 裂纹顶端附近的统一标准 断裂准则方面的进展

上述的方法从本质上来说是经验的, 因为对于在各种条件下的每一种材料来说, J_{IC} 和阻力曲线都必须通过实验得到。再说, 这种方法虽然很重要, 但其可能的应用则是受到限制的, 特别是因为它仅限于裂纹少量扩展的情况。因此, 我们必须寻找一个裂纹顶端附近的断裂准则, 这个准则应以非常接近裂纹顶端的断裂过程为基础。这个问题不仅在科学方面是基本的, 而且在应用方面也是十分重要的。此问题现在离开“解决”尚很远, 但已有若干引人注目的工作。Rice 和 Johnson^[27] 的工作试图理解韧性裂纹起裂的力学过程, 这可能是在这方面最雄心勃勃的努力。他们对于一个空洞和裂纹顶端的会合过程作了近似的分析。此外, 还有人对于裂纹起始和扩展的总过程提出一些其它的方法^[28, 29, 30]。这些方法比起微观力学的断裂过程的处理方法仅高一个层次。

我们将利用 McClintock 关于面外剪切 (Ⅲ型) 的早期工作^[28, 29], 说明裂纹稳定扩展的来源, 并根据文献 [28] 和 [29] 中采用的那种裂纹顶端附近的断裂准则来预计裂纹的起始和扩展。用 γ 表示裂纹前面的总剪切应变, 裂纹扩展的条件为一临界应变准则:

$$\text{在 } r = r_c \text{ 处} \quad \gamma = \gamma_c \quad (32)$$

其中 r_c 为表征断裂过程区域的材料特征长度。

假定小范围屈服, 材料是弹性-全塑性的, 初始的屈服剪应力为 τ_0 , 屈服应变为 $\gamma_0 = \tau_0 / G$, G 为弹性剪切模量。采用 Mises 屈服条件。在裂纹起裂前, 在裂纹前面的塑性区内 ($r \leq r_p$, 其中 r_p 为裂纹前面塑性区的尺寸) 的应变为

$$\gamma = \gamma_0 \frac{\gamma_p}{\gamma} \quad \left(\text{其中 } r_p = \frac{2}{\pi} \frac{J}{\tau_0 \gamma_0} \right) \quad (33)$$

(33) 式代入 (32) 式, 得出裂纹起裂时的 J 值,

$$J_c = \frac{\pi}{2} r_c \gamma_c \tau_0 \quad \text{以及 } r_p^c = \beta r_c \quad (34)$$

其中

$$\beta = \gamma_c / \gamma_0 \quad (35)$$

其次研究了裂纹的稳态扩展。假定裂纹已向前扩展了相当距离, 可以认为 J 已保持为常数。这时裂纹前面的应变为^[28, 29, 6]:

$$\gamma = \gamma_0 \left[1 + \ln(r_p / r) + \frac{1}{2} \ln^2(r_p / r) \right] \quad (36)$$

Chitaley 和 McClintock 证明^[31], r_p 仍可由 (33) 式近似地给出。比较 (36) 式和 (33) 式表明, 在相同的 J 值下, 稳态扩展裂纹顶端附近的应变比静止裂纹前面相同距离处相应的应变要小得多。在 (36) 式中应变的奇异性很弱, 这是因为在扩展裂纹前面发生极不成比例的高速塑性流的缘故。塑性流对不成比例的加载有很大的阻力, 这是稳定裂纹扩展得以发生的主要原因。应用裂纹扩展的准则 (32) 式, 并用 (36) 式以及关于 J 和 r_p 关系的 (33) 式, 可以得到使裂纹处于稳态扩展条件所必需的 J 值:

$$J_{ss} = \frac{\pi}{2} r_c \gamma_0 \tau_0 \exp \left[\sqrt{2\beta - 1} - 1 \right] \quad (37)$$

J_{ss} 与 J_c 之比为:

$$\frac{J_{ss}}{J_c} = \frac{1}{\beta} \exp \left[\sqrt{2\beta - 1} - 1 \right] \quad (38)$$

$\beta = \gamma_c / \gamma_0$ 的较大值表明可能有相当大的稳态裂纹扩展。在文献 [29] 和 [6] 中报道了基于准则 (32) 式的完全的Ⅲ型 J 阻力曲线的近似计

算。这里我们仅仅介绍一下关于 J_R 曲线在起裂之后初始斜率的结果。这结果采用 McClintock 对于瞬态情况的分析得到的。它用无量纲形式表示为:

$$T_R = \frac{G}{\tau_0^2} \left[\frac{dJ_R}{da} \right]_c = \frac{\pi}{2} (\beta - 1 - \ln \beta) \quad (39)$$

$\beta = 1$ 的“完全脆性的”材料相应于 $T_R = 0$; 当 β 很大时, $T_R \cong \pi\beta/2$ 。材料的特征长度量 D 为:

$$D = \frac{J_c}{(dJ_R/da)_c} = r_c \frac{\beta}{\beta - 1 - \ln \beta} \quad (40)$$

有意思的是, 当 β 大于 10 时, D 基本上就是与断裂过程区有关的特征长度 r_c 。

这个模型证明了把宏观的断裂阻力与断裂过程区特征联系起来的某些含义。特别注意到, 在 (38) 式中的 J_{ss}/J_c 与 (39) 式中的无量纲撕裂模量 T_R 的比值均仅与 $\beta = \gamma_c/\gamma_0$ 有关。而且, 当 β 增大时 (对于很大的 β 值), J_{ss}/J_c 以指数方式增加, 而 T_R 则与 β 成线性关系。注意, 当 $\beta = 60$ 时, $T_R \cong 100$, 而 $J_{ss}/J_c \cong 1000$ 。当 β 取更大的值时, 对于典型的 γ_0 值, 在 $r = r_c$ 处, 小应变的假定不再满足。但是该模型的确说明了观察到的很大的 T_R 值的原因。当 β 很大时, J_{ss}/J_c 的值很大的原因, 正如已经说明的那样, 是由于弹塑性材料对非比例的应变有相当大的阻力的缘故。现在我们用简单的 Mises (在 III 型中是 Tresca) 的光滑屈服面来分析, 无疑会把这种非比例应变的影响估计过高。在这个意义上来说, 对于大的 β 求得的 J_{ss}/J_c 值可能要比观察到的值大很多。

Rice 和 Sorensen^[30] 研究了更困难的小范围屈服下的 I 型平面应变问题。从定性上来说, 此结论与 III 型的类似, 分析的一些特征也极相似。虽然准则 (32) 用于 III 型是很合理的, 但在平面应变 I 型的裂纹的前面, 临界应变的条件是无法采用的, 因为根据小应变的解, 在裂纹顶端的上下应变很高。因此, Rice 和 Sorensen 采用了另一准则, 它本质上利用了裂纹顶端附近应变的一个积分。他

们要求在距裂纹顶端某一小距离处的裂纹张开位移达到一临界值。利用数值计算的结果, 他们对于联系裂纹张开位移、裂纹扩展量和 J 的方程式作了近似的积分。由此确定了阻力曲线。只要合理地选择裂纹顶端附近的断裂准则, 就可以发现撕裂阻力是很大的, 这正是典型的观察结果。

参考文献

- [1] A. J. Carlsson, in Theoretical and Applied Mechanics, Proc. 14th IUTAM Congress, Delft, ed. W. T. Koiter, North-Holland, 317, 1976.
- [2] P. C. Paris, ASTM-STP 631, 3, 1977.
- [3] J. R. Rice, in Mechanics of Fracture, ASME-AMD, Vol. 19, 23, 1976.
- [4] J. R. Rice, J. Appl. Mech., 35, 379, 1968.
- [5] C. P. Cherepanov, Appl. Math. Mech. (PMM), 31, 476, 1967.
- [6] J. R. Rice in Fracture, An Advanced Treatise, ed. H. Liebowitz, 2, Academic Press, 191, 1968.
- [7] J. R. Rice and G. F. Hosengren, J. Mech. Phys. Solids, 16, 1, 1968.
- [8] J. W. Hutchinson, J. Mech. Phys. Solids, 16, 13, 1968.
- [9] C. F. Shih, "Relationships Between the J-Integral and Crack Opening Displacement for Stationary and Extending Cracks", General Electric Company Report, October 1978 (to be published).
- [10] R. M. McMeeking, J. Mech. Phys. Solids, 25, 357, 1977.
- [11] R. M. McMeeking and D. M. Parks, "On Criteria for J-Dominance of Crack Tip Fields in Large Scale Yielding" to be published in ASTM-STP 668, 1979.
- [12] C. F. Shih and M. D. German, "Requirements for a one Parameter Characterization of Crack Tip Fields by

- the HRR Singularity", General Electric Company Report, October 1978 (to be published).
- [13] F. A. McClintock, in *Fracture, An Advanced Treatise*, ed. H. Liebowitz, 3, Academic Press, 47, 1971.
- [14] J. A. Begley and J. D. Landes, *ASTM STP 560*, 170, 1974.
- [15] J. A. Begley and J. D. Landes, *ASTM-STP 514*, 1, 24, 1972.
- [16] K. B. Broberg, *J. Mech. Phys. Solids* 19, 407, 1971.
- [17] *Mechanics of Crack Growth*, *ASTM-STP 590*, 1976.
- [18] G. Green, R. F. Smith and J. F. Knott in *Mechanics and Mechanisms of Crack Growth*, ed. M. J. May, British Steel Corp, 58, 1973.
- [19] J. R. Rice, P. C. Paris and J. G. Merkel, *ASTM-STP 536*, 231, 1973.
- [20] P. C. Paris, H. Tada, A. Zahoor and H. Ernst, in *Elastic-Plastic Fracture*, *ASTM-STP 668*, to be published in 1979.
- [21] S. J. Garwood, J. N. Robinson and C. E. Turner, *Int. J. Fracture*, 11, 523, 1975.
- [22] J. W. Hutchinson and P. C. Paris, in *Elastic-Plastic Fracture*, *ASTM-STP 668*, to be published in 1979.
- [23] C. F. Shih and R. H. Dean, "On J-Controlled Crack Growth: Evidence, Requirements and Applications" in *Process of Preparation*.
- [24] J. A. Begley and J. D. Landes, *Int. J. Fracture*, 12, 1976.
- [25] P. C. Paris, H. Tada, A. Zahoor and H. Ernst, "A Treatment of the Subject of Tearing Instability", U. S. Nuclear Reg. Comm. Report MUREC-0311, August 1977.
- [26] J. W. Hutchinson, A. Needleman and C. F. Shih, in *Fracture Mechanics*, ed. N. Perrone, et. al., Univ. Press of Virginia, 515, 1978.
- [27] J. R. Rice and M. A. Johnson, in *Inelastic Behavior of Solids*, ed. M. F. Kanninen et al., McGraw-Hill, 614, 1970.
- [28] F. A. McClintock, *J. Appl. Mech.* 25, 581, 1958.
- [29] F. A. McClintock and G. R. Irwin, *ASTM-STP 381*, 84, 1965.
- [30] J. R. Rice and E. P. Sorensen, *J. Mech. Phys. Solids*, 26, 163, 1978.
- [31] A. D. Chitaley and F. A. McClintock, *J. Mech. Phys. Solids*, 19, 147, 1971.
- (王克仁译自"Proceeding of the Seventh Canadian Congress of Applied Mechanics", 1979)

弹性动态裂纹尖端应力场的分析

L. B. Freund

一、引言

裂纹本来存在一切结构材料之中,系自然缺陷或作为制造加工的结果。在许多情况中,裂纹足够小,其存在并不显著地降低材料的强度。然而,在另一些情况中,裂纹相当大,或由于疲劳、应力腐蚀开裂等原因,裂纹成为相当大,以致在决定强度时必须考虑它。为了分析有裂纹物体中的应力而发展起来的学科通称为断裂力学。所研究的大部分物理系统是准静态的。但是,由于加载情况和材料特性,许多断裂力学问题并不能视为准静态的,而必需考虑材料的惯性。在这门学科的发展过程中,没有充分地了解动载条件下的开裂过程和工程结构中裂纹的扩展过程。本文目的是综述在努力增进对动态断裂力学的了解中所获得的若干解析成果。

注意力局限于线弹性材料的物体。虽然介绍的一般成果适用于非均质各向异性的弹性材料,但所解决的特殊问题仅适用于均质各向同性的材料。并且,始终假定几何形状和加载条件均使得变形状态为平面应变状态。按断裂力学通常的术语来说,裂纹尖端变形场是Ⅰ型(平面拉伸型)和Ⅱ型(平面剪切型)的组合。就相对应应力三轴性非常大的这个意义来说,平面应变的约束使裂纹尖端处于最恶劣的状态。例如,对于一个静态平面应变的拉伸裂纹来说,众所周知,裂纹尖端的三个主应力大小都相等。因此,由塑性流引起的应力松弛的趋势减小,而裂纹脆断的趋势增加。当然,本文讨论的所有分析方法对Ⅲ型变形(非平面剪切型)也同样适用。

在所有的情况中,均假设弹性场是瞬态

的。所得到的全部结果都是线弹性动力学方程组的精确结果,这在第二节中加以评述。但是,值得注意的是,没有一个所得结果是直接利用通常的求解方法(诸如相似法或Wiener-Hopf法)从偏微分控制方程组导出。的确,对所考虑的主要问题,直接解析法是不适用的。全部结果均是以物理概念、反推和能量考虑为基础的方法得到的。Achenbach^[1]论述了主要的直接解析法在动态弹性断裂力学中的应用。

探讨了承受动载物体中的静止裂纹和裂纹在有应力物体中快速扩展的这二种情况。集中注意到裂纹尖端附近的弹性场(如第三节所述),而邻近尖端场是完全用动态应力强度因子表征的。应力强度因子是在线弹性断裂力学中很熟悉的概念,对它的抽象性质的评述或许在此也是适用的。裂纹尖端处奇异点的应力分布显然是数学理想化的,实际上没有一种真实材料具有这种应力分布。承认奇异的应力分布,而且应力场强度用应力强度因子度量,这种常用的合理情形是以小范围屈服概念为其根据的。因此假定,在裂纹尖端附近,潜在的巨大应力得由区域尺寸比裂纹长度、物体尺寸等小的塑性流来减少。并且进一步假定,邻近这个小塑性区的弹性材料的应力分布可用弹性力学解中主要的奇异项来描述。虽然这个论断并未对应力强度因子以物理解释,但它会意味着,如果符合小范围屈服的假定时,则由弹性力学解所计算的能量释放率(定义在第四节)表示实际的能量释放率。在任何情形中,线弹性分析在准静态断裂力学中应用所取得的巨大成功,对把这些基本概念推广到动态断裂力学中提

供了适当理由。

在一个带裂纹的承受动载的弹性体中, 仅有几个应力能是有用的。其中最值得注意的是, de Hoop^[2]分析了半无限裂纹附近平面-脉冲的绕射。Thau和Lu^[3]研究了有限长裂纹的等价问题。虽说本文中未包括时间-简谐型加载情形的稳态解, 但是必需注意到, 在这个领域中 Sih和Loeber^[4]取得了重大进展。关于正在扩展的裂纹的解, 依据扩展过程是稳态或瞬态可分为二类。在稳态情况中, Yoffe^[5]、Craggs^[6]、Chen和Sin^[7]都作出一些显著的贡献。Baker^[8]、Broberg^[9]、Achenbach和Nuismer^[10]、Freund^[11]研究了关于裂纹以不变速度扩展的瞬态问题。在文献[12]中介绍了获得以非均匀速率扩展的裂纹的动态应力强度因子的分析, 这在第六节中加以概述。Erdogan^[13]综述了直至1968年的关于裂纹扩展理论的发展。

二、线弹性动力学方程

2.1 运动方程

下面的分析, 主要与均质和各向同性弹性材料的无限小变形有关。在文献[14]第二章中可找到对于这类问题的控制方程的全部推导。本节列出了一些特殊的方程组, 把这些方程组用于建立所研究的弹性动态断裂力学问题的公式。全部变量都相对于笛卡尔坐标系 (x_1, x_2, x_3) 。采用了通常的笛卡尔符号标志法, 有几个重复的下标表示求和而 $()$, $\kappa \equiv \partial() / \partial x_\kappa$ 。关于时间的微商用上置圆点表示。

设(在一个笛卡尔直角坐标系中) σ_{ij} 、 F_i 和 u_i 分别表示应力张量、(材料单位体积的)体积力矢量和位移矢量的分量。运动方程为

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \dot{u}_i, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.1)$$

式中 ρ 是质量密度, 也采用关于重复下标表示求和的普通约定。作用在单位法线矢量为 n_i 的平面上的单位面积力的分量 T_i 为:

$$\sigma_{ij}n_j = T_i \quad (2.2)$$

对各向同性材料来说, 可用二个拉梅常数 λ 和 μ 来表述应力与应变之间的线性关系如下:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.3)$$

式中 δ_{ij} 是通常的 δ 函数。借助标量函数 ϕ 和矢量函数 ψ_k 表示位移如下后, 则许多弹性动力学问题的解得以大大简化:

$$u_i = \phi_{,i} + e_{ijk} \psi_{k,j}, \quad \psi_{k,k} = 0 \quad (2.4)$$

式中 e_{ijk} 是通常的交替符号。将式(2.4)代入式(2.3)后, 得到用位移势表示的应力表示式:

$$\sigma_{ij} = \lambda \sigma_{ij} \phi_{,kk} + 2\mu \phi_{,ij} + \mu (e_{ijk} \psi_{k,ij} + e_{ijk} \psi_{k,ji}) \quad (2.5)$$

用直接代入法表明: 如 ϕ 和 ψ_k 满足下列波动方程:

$$\phi_{,kk} - a^2 \ddot{\phi} = 0, \quad a^2 = \rho / (\lambda + 2\mu) \quad (2.6)$$

$$\psi_{j,kk} - b^2 \ddot{\psi}_j = 0, \quad b^2 = \rho / \mu \quad (2.7)$$

则根据式(2.5)和式(2.4)导出的应力和位移满足 $F_i = 0$ 的运动方程(2.1)。虽则上述论断可修改为包括不为零的体积力(参看[14]), 但是在所讨论的应用无需这个推广。文献[15]证明了表示这个弹性动态位移的表示式(2.4)成立。由于它是几种变形模式的组合, 所以 ϕ 和 ψ_k 为纵波势和剪切波势。由式(2.6)和式(2.7)可见, 纵向平面波或波阵面以速度 $C_l \equiv a^{-1} = [(\lambda + 2\mu) / \rho]^{1/2}$ 传播, 而剪切平面波或波阵面以速度 $C_s \equiv b^{-1} = [\mu / \rho]^{1/2}$ 传播。最后, 平面变形(平面应力或平面应变)的约束要求 ψ_k 具有单一的非零分量; 这个分量的大小可简单地用 ψ 表示。

2.2 功和能的关系

在研究线弹性断裂力学的若干领域中, 能量考虑起了重要作用。因此, 为了以后参考, 列出了几种能量和能率的总度量的定义。设物体占据空间的区域为 B , B 的边界为 ∂B 。占据 B 的材料的总应变能 U 和动能 T 为:

$$U = \int_B \frac{1}{2} \sigma_{ij} \cdot u_{ij} da \quad (2.8)$$

$$T = \int_B \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i da \quad (2.9)$$

式中 da 是体元。对平面问题来说,按照垂直于变形平面的单位长度来量度 U 和 T ,而 da 是平面内的面元。沿 ∂B 作用的拉应力的功率为:

$$P = \int_{\partial B} T_{ij} \dot{u}_i d\gamma \quad (2.10)$$

式中 $d\gamma$ 是三维情形中一个无限小的表面元,而对于平面问题来说,它是 ∂B 的弧元。

根据式(2.1)和式(2.2)可建立被称为虚速度原理的虚功原理的动态模拟。将式(2.1)内乘以速度 $\dot{u}_i$,所得表示式的第一项改写为

$$(\sigma_{ij} \dot{u}_i)_j - \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j}$$

将散度定理用于所得表示式的第一项,得到

$$\int_{\partial B} T_{ij} \dot{u}_i d\gamma = \int_B [\sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_i - F_i \dot{u}_i] da \quad (2.11)$$

在以后的分析中,此表达式在建立面积分与体积分之间的联系方面是特别有用的。

设 B_t 是 B 的子区, ∂B_t 是 B_t 的依赖于时间的边界。因而, B_t 内材料的总动能对时间的瞬间变化率 $\dot{T}$,等于 B_t 内动能对时间总的变化率加上通过边界 ∂B_t 的动能通量,即

$$\dot{T} = \int_{B_t} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i da + \int_{\partial B_t} \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i v_n d\gamma \quad (2.12)$$

式中 v_n 是 ∂B_t 上一点的速度在 ∂B_t 外法线方向的分量。对 B_t 内应变能对时间的变化率也可作出类似的论断。

2.3 拉普拉斯变换

鉴于弹性动力学方程的线性,运用拉普拉斯变换以去掉时间关系,就能迅速得到解。这种变换用一个上置补注符号 $\wedge$ 表示。其定义如下

$$\hat{\phi}(\dots, S) = \int_0^\infty e^{-st} \phi(\dots, t) dt \quad (2.13)$$

当 S 为实数和大于某 S_0 值时,假定积分(2.13)是收敛的。因此, $\hat{\phi}$ 是在半平面 $\text{Re}(S) > S_0$ 内的一个 S 的解析函数。逆变换积分式定义为:

$$\phi(\dots, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br_1} e^{st} \hat{\phi}(\dots, S) ds \quad (2.14)$$

式中 Br_1 是在 S 平面内,平行于虚轴的积分路径,且位于收敛区内。

三、裂纹尖端应力场

现在注意到,就至今所得到的全部平面弹性动态裂纹问题的解来说,在裂纹尖端邻近,应力分布依赖于空间坐标的特性是相同的。对扩展裂纹来说,应力的空间分布与速度有关,当裂纹速率为零时则简化为静止裂纹的相应表达式。本节的主要目的是论证,这是一般性的结果。也就是指出:对扩展的平面裂纹解来说,靠近裂纹尖端的应力场,在一个局部坐标系中都普遍具有空间关系,并且对于I型裂纹扩展给出了这种关系的明确形式。随不同特殊问题而变化的唯一的量是一个与时间有关的标量乘子,即应力强度因子。Irwin^[16]和 Williams^[17]首先对弹性静态断裂力学提出了与此相当的结果。Rice^[18]实质上用相同的方法,对裂纹常速扩展建立了等价的结果。最近 Achenbach 和 Bazant^[19]对于非均匀移动的裂纹采用了相同的方法。遵循文献[20]的渐近分析方法,本文得到所希望的结果。进行分析的假定是,物体的总内能(动能加势能)是有限值,这可解释为与可积分的内能密度等价。裂纹尖端运动是任意的,除此之外,裂纹尖端速率始终小于表示材料特征的瑞利波速。

笛卡尔坐标系是按如下方式规定的,使质点位移位于 X_1 、 X_2 平面内(如图1)。物体占据该平面的区域用 R 表示,外边界用 S 表示。除了邻近裂纹面端部外,内边界 R 由裂纹面 S_0 组成,裂纹面端部的边界还添加逐渐趋于零的绕裂纹尖端的环线 S_1 和 S_2 。在被研

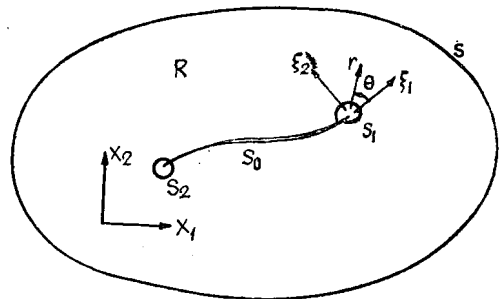


图1 有一个扩展裂纹的二维物体在任一瞬间的形状

究的裂纹尖端按这样引进一个局部的笛卡尔坐标系 (ξ_1, ξ_2) , 使得裂纹尖端速度矢量沿 ξ_1 方向。环线 S_1 和 S_2 可为任意形状, 但它们相对于每个裂纹尖端的局部坐标系是固定的。设边界 S 承受拉力 T_i 或承受由于在 S 上分布拉力 T_i 产生的位移边界条件, 或者受二者适当组合的作用。裂纹的表面不受拉力。

把注意力转移到被环线 S_1 围绕的裂纹尖端。用指定依赖时间变量的坐标方法 (例 $x_1 = l(t)$ 和 $x_2 = m(t)$) 来确定裂纹尖端位置。本讨论中, 引进了以裂纹尖端为极点, 而 $\theta = 0$ 与 ξ_1 轴重合的一个局部的极坐标系 (r, θ) 。本节得到如下结论: 总内能有限的扩展裂纹的全部平面弹性动态解, 当 $r \rightarrow 0$, 具有如下性质:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I(t)}{(2\pi r)^{1/2}} \Sigma_{ij}^I(\theta, v) + \frac{K_{II}(t)}{(2\pi r)^{1/2}} \Sigma_{ij}^{II}(\theta, v) + o(1) \quad (3.1)$$

式中 v 是裂纹尖端速率 $(\dot{l}^2 + \dot{m}^2)^{1/2}$ 。上下标 I 或 II 表示 I 型裂纹或 II 型裂纹扩展的作用。就相对于 $\theta = 0$ 的对称性在这两种情形中是相反的这个意义上说, 这些作用是互相无关的。详细研究了在式 (3.10) — (3.12) 给出的函数 $\Sigma_{ij}^I(\theta, v)$ 。显然, 式 (3.1) 中的应力分量是相对于局部坐标系的。

借助于标准的渐近法, 结果式 (3.1) 是作为边界问题的内渐近展开式而导出的。首先建立了一个由空间固定坐标系变为固定于裂纹尖端坐标系的坐标变换公式。该公式定义如下:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= [x_1 - l(t)] \cos \beta + [x_2 - m(t)] \sin \beta \\ \xi_2 &= -[x_1 - l(t)] \sin \beta + [x_2 - m(t)] \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

式中 β 是 x_1 轴与 ξ_1 轴之间的夹角, 即 $\tan \beta = \dot{m}/\dot{l}$ 。因此认为 ϕ 是 (ξ_1, ξ_2, t) 的一个函数。用局部极坐标表示 $r^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ 和 $\xi_2/\xi_1 = \tan \theta$ 。

为了推导出当 $r \rightarrow 0$ 时应力渐近展开式的首项, 如遵循标准程序, 则必须重新给出长度定标, 使得原来靠近裂纹尖端 (r 很小) 的

区域扩大。为此引进新坐标 (η_1, η_2) , 而 $\eta_1 = \xi_1/\epsilon$ 和 $\eta_2 = \xi_2/\epsilon$ 。参数 ϵ 是一个任意小的正数。当 (ξ_1, ξ_2) 包括靠近裂纹尖端 (η_1, η_2) 的值时, 在 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 的极限情形中, 则包括整个平面。如 $\epsilon \rightarrow 0^+$, 则裂纹线占据整个负 η_1 轴。例如现在认为纵向势 ϕ 是 (η_1, η_2, t) 的函数。因而, 当 $\epsilon \rightarrow 0^+$, 波动方程 (2.6) 变为如下形式:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_1^2} \left(1 - \frac{v^2}{c_1^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_2^2} = 0 \quad (3.3)$$

式中仍有 $v = (\dot{l}^2 + \dot{m}^2)^{1/2}$, c_1 是纵波波速。当 (ξ_1, ξ_2) 保持固定而 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 时, 就找到求解这个方程的渐近展开式。也求出在 (η_1, η_2) 范围内当 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 的解。在 ϵ 的幂级数形式的渐近解中支配零次项的方程, 就是乘以因子 $\alpha_1 = (1 - v^2/c_1^2)^{1/2}$ 的 η_2 坐标的拉普拉斯方程。这个方程的一般解为:

$$\phi = \operatorname{Re}[F(\xi_1)], \quad (3.4)$$

式中 $\xi_1 = \eta_1 + i\alpha_1\eta_2$, F 是在以负实轴为界限的 ξ_1 平面内一个任意解析函数。根据类似的论断推导出剪切波势的等价表示式

$$\psi = \operatorname{Im}[G(\xi_s)] \quad (3.5)$$

式中 $\xi_s = \eta_1 + i\alpha_s\eta_2$, G 是 ξ_s 平面内的解析函数, $\alpha_s = (1 - v^2/c_s^2)^{1/2}$, c_s 是剪切波波速。因为限于 I 型裂纹扩展的作用, F 和 G 都有对称性质 $F(\bar{\xi}_1) = \overline{F(\xi_1)}$ 和 $G(\bar{\xi}_s) = \overline{G(\xi_s)}$, 式中上置横线表示共轭复数。

在物理平面中裂纹面上的拉力为零的条件, 就产生 ξ 平面内负实轴上下和 G 必须满足的边界条件。如应力由位移势表述 (如式 (2.5)) 时, 则坐标产生相应的变化, 当 $\epsilon \rightarrow 0$, 在 $\eta_1 < 0$ 、 $\eta_2 = 0^{\pm}$ 的边界条件为如下形式:

$$(1 + \alpha_s^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = 0, \quad (3.6)$$

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta_2^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta_1^2} = 0$$

当边界条件 (3.6) 由 F 和 G 表述, 即可得到解析函数理论中一个标准边界值。这个问题等于求函数 F 和 G , 使 F 和 G 在以负实轴为界

限的整个平面内都是解析的, 并在 $\eta_1 < 0, \eta_2 = 0$ 区域满足如下不连续条件:

$$(1 + \alpha_s^2)[F_+''(\eta_1) + F_-''(\eta_1)] + 2\alpha_s \times [G_+''(\eta_1) + G_-''(\eta_1)] = 0 \quad (3.7)$$

$$2\alpha_l[F_+''(\eta_1) - F_-''(\eta_1)] + (1 + \alpha_s^2) \times [G_+''(\eta_1) - G_-''(\eta_1)] = 0 \quad (3.8)$$

下标加号和减号表示由 η_2 的正值或负值趋于该分量界割线时取值, 撇号表示求微商。

满足式(3.7)和式(3.8)的, 并在裂纹尖端导出积分内能密度的最一般的解析函数是

$$F''(\xi_l) = \frac{\Delta(\xi_l)}{(\xi_l)^{1/2}}, G''(\xi_s) = \frac{-2\alpha_l A(\xi_s)}{(1 + \alpha_s^2)(\xi_s)^{1/2}} \quad (3.9)$$

式中 A 是一个整函数。为了使内和外渐近展开式匹配, 也要求应力, 特别在 A 处, 当 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时必需有界。如果是这种情况, 则刘维尔定理暗示 A 必需是一个常数。事实上, A 是整函数, 就足以建立式(3.1)结果。为了清楚地写出式(3.1)中 Σ_{ij} 各项的显式, 引用符号 $\xi_l = r_l \exp(i\theta_l)$ 和 $\xi_s = r_s \exp(i\theta_s)$ 是方便的。因此

$$\Sigma_{11}^I = B \left\{ (1 + 2\alpha_l^2 - \alpha_s^2) \frac{\cos(\theta_l/2)}{r_l} - \frac{4\alpha_l \alpha_s}{(1 + \alpha_s^2)} \frac{\cos(\theta_s/2)}{r_s^{1/2}} \right\} \quad (3.10)$$

$$\Sigma_{11}^I = 2B\alpha_l \left\{ \frac{\sin(\theta_l/2)}{r_l^{1/2}} - \frac{\sin(\theta_s/2)}{r_s^{1/2}} \right\} \quad (3.11)$$

$$\Sigma_{22}^I = B \left\{ -(1 + \alpha_s^2) \frac{\cos(\theta_l/2)}{r_l^{1/2}} + \frac{4\alpha_s \alpha_l}{1 + \alpha_s^2} \frac{\cos(\theta_s/2)}{r_s^{1/2}} \right\} \quad (3.12)$$

式中 $B = (1 + \alpha_s^2)r^{1/2}/D$,

$$D = 4\alpha_s \alpha_l - (1 + \alpha_s^2)^2 \quad (3.13)$$

表示式(3.10-3.12)已标准化, 因此 $\Sigma_{22}^I(0, v) = I_0$ 。因此式(3.1)中的系数 K_I 与 I 型裂纹应力强度因子的通常定义是一致的, 即

$$K_I(t) = \lim_{r \rightarrow 0} [(2\pi r)^{1/2} \sigma_{22}(r, 0, t)] \quad (3.14)$$

也可由式(3.9)导出裂纹尖端附近各点连续场。对于裂纹扩展的 I 型分量, 其结果为:

$$\dot{u}_1 = - \frac{vBK_I}{\mu(2\pi r)^{1/2}} \left\{ \frac{\cos(\theta_l/2)}{r_l^{1/2}} - \frac{2\alpha_l \alpha_s}{(1 + \alpha_s^2)} \frac{\cos(\theta_s/2)}{r_s^{1/2}} \right\} \quad (3.15)$$

$$\dot{u}_2 = - \frac{vB\alpha_l K_I}{\mu(2\pi r)^{1/2}} \left\{ \frac{\sin(\theta_l/2)}{r_l^{1/2}} - \frac{2}{(1 + \alpha_s^2)} \frac{\sin(\theta_s/2)}{r_s^{1/2}} \right\} \quad (3.16)$$

最后, 对于 II 型的裂纹分量, 也可由式(3.16)推导出类似于式(3.9)的结果。但是为了简便, 以后各节中探讨的全部特殊问题, 都假定为 I 型裂纹扩展, 省略 II 型结果。

四、能量考虑

4.1 守恒定律

以能量变分为基础的分析, 在动态断裂力学发展中起着重要作用。本节扼要叙述了若干最新成果。这些成果用于发展求解方法(如第五节); 用于阐明以能量平衡断裂判据为基础的其他分析结果(如第六节)。某些能量概念是以守恒定律为基础的, 借助一些物理量对这些定律的阐述, 已成为研究断裂力学的极为有力的分析工具。Eshelby^[21]的一篇很有意义的讨论论文就是以这些守恒定律为主题的。

设一力学系统由矢量 u_i 和占据 B 区域的空间梯度 $u_{i,j}$ 表征, 并由如下形式的变分原理决定:

$$\delta \left\{ \int_B L(u_i, u_{i,j}) da + \text{边界项} \right\} = 0 \quad (4.1)$$

式中变分与相容函数的全部约束相符。在适当的假定下, 下式是式(4.1)的必要条件:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \quad (4.2)$$

用对乘积求导数的标准公式, 可写出 L 的空间梯度

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} \right) u_{i,i} +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} u_{i,l} \right) \quad (4.3)$$

考虑到式(4.2), 式(4.3)关系式可改写为:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[L \delta_{lj} - \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} u_{i,l} \right] = 0, \quad (l=1, 2, 3) \quad (4.4)$$

式(4.4)的主要特征是, 要求某一个散度的表达式为零。因此, 如对 B 的任何子区(比如 B^*)积分式(4.4), 运用散度定理即可得到守恒定律:

$$\int_{\partial B^*} \left[L n_l - \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} u_{i,l} n_j \right] d\gamma = 0 \quad (4.5)$$

式中 ∂B^* 是 B^* 的边界, 而 n_i 是 B^* 的外法线。表示式(4.5)是, Knowles和Sternberg^[22]对弹性力学守恒定律作深入的数学研究中得到的一般结论的特殊情况。当然, 虽用于许多问题的求解, 但守恒定律必需有若干相同的物理含义。

在断裂力学研究中很有用的是 $l=1$ 的式(4.5)形式的守恒定律的一个特例。该特例为, 平面弹性理论中静态势能是支配变分原理情形下得到的结果。因此函数 L 是应变能密度 $W(u_{(i,j)})$, 根据 $\sigma_{ij} = \partial W / \partial u_{(i,j)}$, $u_{(i,j)}$

$= \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}]$ 可由 W 得出应力。如无体积分

力时, 守恒定律有如下形式:

$$\oint_c [W n_l - \sigma_{ij} n_j u_{i,l}] d\gamma = 0 \quad (4.6)$$

式中 c 是包围平面物体的一个单联区域的任一封闭路径。由守恒定律式(4.6)可得到熟知的断裂力学的 J 积分^[23,24]。设在二维弹性体中不受拉力的尖锐裂纹与 x_1 轴对准(如图2所示)。假设 c 由二个围绕裂纹尖端的环线和沿裂纹上下表面的直线段组成。由于裂纹面上 n_1 和 T_1 均为零, 即可得到积分

$$J = \int_r [W n_l - T_l u_{i,l}] d\gamma \quad (4.7)$$

对任意一个绕裂纹尖端环线都具有相同的积分值, 式中 n_l 是指向离开裂纹尖端的 Γ 的法线。积分式(4.7)是平面弹性静力学中熟知的与路径无关的积分。

4.2 动载下与路径无关的积分

现时有如下一个明显的问题: 对于瞬态

弹性裂纹问题能否推导出一个等价的与路径无关的积分? 回答是不能的, 这可由 Atkinson和Eshelby^[25]给出的简单论证中看出。研究了图2的几何形状, 假定在某一瞬间有任意弹性波能源开始作用在 r_1 之外的某处。在短时间之后, 能源对 r_1 有影响, 改变了那里的弹性场, 但对 r_2 无影响。因为能源完全是任意的, 所以具有泛函形式的任何积分在弹性场中将沿二条路径有不同的值, 即与路径有关。这个否定的结论可能与如下事实有关: 与静态问题的椭圆方程相比, 决定瞬态问题的偏微分方程是双曲线型的。在静态问题中, 力学效应平滑地传递到整个物体。另一方面, 在瞬态问题中, 力学效应仅传递到以特征表面为界的某一区域, 穿过此特征面的弹性场可能是不连续的。

众所周知, 应用对时间的拉普拉斯变换(式(2.13)), 可把弹性动力学的双曲线方程变换为椭圆方程。假定初始状态是均匀的, 就可看出, 所得到的拉普拉斯变换的基本方程与式(4.1)形式的变分陈述完全等价, 在无体力时, 式中括号内的第一项是在拉普拉斯变换后的位移 $\hat{u}_i$ 的范围内的泛函, 由下式给出:

$$V = \int_B \left[\frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ij} \hat{u}_{i,j} + \frac{1}{2} \rho s^2 \hat{u}_i \hat{u}_i \right] da \quad (4.8)$$

显然, V 并不是弹性体内能的拉普拉斯变换式, 但它是一个类似能量的表达式。由于与推导出与路径无关的积分式(4.7)相同的理由, 可以说明下列积分:

$$J' = \int_p \left[\frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ij} \hat{u}_{i,j} n_l + \frac{1}{2} \rho s^2 \hat{u}_i \hat{u}_i n_l - \hat{T}_l \hat{u}_{i,l} \right] d\gamma \quad (4.9)$$

对于在图2所示的二维物体内围绕一个静止裂纹尖端的路径来说, 是与路径无关的。Nilsson^[26]首先提出并应用了这个与路径无关的积分 J' 。

J' 有二个重要性质建立在下节研究的求解技术的基础上。Nilsson在文献[26]中论证