

全国高等职业技术教育
卫生部规划教材

供临床、护理、医学影像技术、
口腔医学技术、药学、检验等专业用

数 学

(第2版)

主 编 张爱芹

副主编 张洪红

周汉伟



人民卫生出版社

全国高等职业技术教育 卫生部规划教材

供临床、护理、医学影像技术、
口腔医学技术、药学、检验等专业用

数 学

(第 2 版)

主 编 张爱芹

副主编 张洪红 周汉伟

编 者 (以姓氏笔画为序)

万志超 (漯河医学高等专科学校)

付冬丽 (江西护理职业技术学院)

刘宝山 (黑龙江省卫生学校)

刘家英 (重庆医药高等专科学校)

张立志 (淄博科技职业学院)

张洪红 (临汾职业技术学院)

张爱芹 (滨州职业学院)

周汉伟 (无锡卫生高等职业技术学校)

胡志敏 (广州医学院护理学院)

人 民 卫 生 出 版 社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学/张爱芹主编.—2版.—北京:人民卫生出版社,
2010.1

ISBN 978-7-117-12456-0

I. 数… II. 张… III. 数学-高等学校:技术学校-
教材 IV. 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 222519 号

门户网: www.pmph.com 出版物查询、网上书店
卫人网: www.ipmph.com 护士、医师、药师、中医师、卫生资格考试培训

本书本印次封底贴有防伪标。请注意识别。

数 学
(第 2 版)

主 编: 张爱芹

出版发行: 人民卫生出版社 (中继线 010-67616688)

地 址: 北京市丰台区方庄芳群园 3 区 3 号楼

邮 编: 100078

E - mail: pmph@pmph.com

购书热线: 010-67605754 010-65264830

印 刷: 北京市卫顺印刷厂

经 销: 新华书店

开 本: 787×1092 1/16 印张: 13.25

字 数: 330 千字

版 次: 2004 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 2 版第 7 次印刷

标准书号: ISBN 978-7-117-12456-0/R·12457

定 价: 22.00 元

版权所有, 侵权必究, 打击盗版举报电话: 010-87613394

(凡属印装质量问题请与本社销售部联系退换)

全国高等职业技术教育第2轮卫生部规划教材

修 订 说 明

为适应我国医学专科教育改革和基层卫生工作改革发展的需要,卫生部教材办公室2009年决定对全国高等职业技术教育卫生部规划教材进行第2轮修订,本次修订的是本系列教材的公共基础课和临床基础课教材,共14门。临床课教材不再修订,学校可采用第6轮高职高专临床医学专业卫生部规划的临床课教材(3年制)。

2009年5月,卫生部教材办公室在湖北省襄樊市主办了全国高等职业技术教育第2轮卫生部规划教材主编人会议,此次会议上进一步明确了编写原则,即以专业培养目标为导向,以职业技能的培养为根本,基本理论和基本知识以“必须、够用”为度,继续坚持“三基、五性、三特定”的原则。

本系列教材主要适合于“五年一贯制”医学类专科学校使用。

全国高等职业技术教育第2轮卫生部规划教材(供临床、护理、医学影像技术、口腔医学技术、药学、检验等专业用)共14门课:

1.《语文》	主编 王 峰	副主编 禹 琳 丁慎国
2.《英语》	主编 段晓静	副主编 于 红 赵 旦
3.《数学》	主编 张爱芹	副主编 张洪红 周汉伟
4.《物理》	主编 楼渝英	副主编 肖擎纲 朱世忠
5.《化学》	主编 杨艳杰	副主编 何丽针
6.《计算机应用基础》	主编 陈吴兴	副主编 徐晓丽
7.《体育与健康》	主编 成明祥	副主编 张晓云 焦方芹
8.《医学生物学》	主编 康晓慧	副主编 张淑玲 王学民
9.《系统解剖学与组织胚胎学》	主编 刘文庆 吴国平	副主编 全晓红 秦 毅
10.《生理学》	主编 彭 波	副主编 潘丽萍 王加真
11.《生物化学》	主编 何旭辉	副主编 赵汉芬 朱 霖
12.《病原生物与免疫学》	主编 许正敏 杨朝晔	副主编 姜凤良 吴松泉
13.《病理学》	主编 丁运良	副主编 杨 红 周 洁
14.《药理学》	主编 谭安雄	副主编 李秀丽 郭春花



本书第一版自 2004 年出版发行以来,经众多高等职业学院及卫生学校的教学使用,反映良好。为了进一步适应教育部关于高职高专教学改革的要求,更好地培养高等技术应用型人才,结合我国医学教育的实际情况,我们对原版教材进行了认真地修改和完善。具体有以下几个方面:

1. 书中每一个重要概念,都是从实际出发,以激发学生的求知欲,提高教学效果。
2. 教材内容上,在适度注意保持数学自身系统性与逻辑性及充分调查大部分院校教学时数的基础上,对教材内容重新进行了整合、优化,使教材更具实用性。
3. 对函数的极限与连续、导数及其应用、一元函数的积分学等内容进行了重新编写,用尽量简明的语言文字和直观的图形描述定义,去掉了复杂的例题,尽量用简单的例子来实践基本数学思想。
4. 教材内容及例题、习题的选择尽可能地结合了医学知识,以激发学生的学习兴趣,提高学生对学习数学重要性的认识。
5. 增加了利用计算器解决问题的能力,以提高学生使用基本计算工具的能力。

本教材分十二章编写。教学时数约为 144 课时。

主要包括:集合与简易逻辑、不等式、函数、三角函数、数列、直线、排列组合与二项式定理、概率初步、统计初步、导数与微分、导数的应用、定积分。

每节后的思考与练习分 A、B 两组,以满足不同层次的学生学习;每章后配有自我检测题,以检验学生的学习情况。

真诚地欢迎使用本教材的师生们多提宝贵意见,以便进一步修改和完善,为建设适用、先进的教材奉献力量。

主编 张爱芹

2009 年 11 月 15 日

目 录



第一章 集合与简易逻辑	1
第一节 集合	1
第二节 简易逻辑	7
第二章 不等式	15
第一节 不等式的概念和性质	15
第二节 不等式的解法	18
第三章 函数	26
第一节 函数	26
第二节 幂函数和指数函数	34
第三节 对数函数	40
第四章 三角函数	49
第一节 角的概念推广与角的度量	49
第二节 任意角的三角函数	53
第三节 诱导公式	58
第四节 正弦函数的图像和性质	62
第五节 正弦型函数的图像	65
第五章 数列	70
第一节 数列的概念	70
第二节 等差数列	73
第三节 等比数列	77
第六章 直线	83
第一节 直线方程	83
第二节 两条直线的位置关系	87
第七章 排列、组合与二项式定理	92
第一节 两个基本原理	92
第二节 排列	94
第三节 组合	98
第四节 二项式定理	101

第八章 概率初步	105
第一节 随机事件的概率	105
第二节 互斥事件有一个发生的概率	110
第三节 相互独立事件同时发生的概率	112
第四节 离散型随机变量的概率分布与数字特征	116
第九章 统计初步	125
第一节 随机抽样	125
第二节 用样本估计总体	127
第三节 变量间的相关关系	133
第十章 导数和微分	140
第一节 函数的极限与连续	140
第二节 导数的概念	144
第三节 函数的和、差、积、商的求导法则	147
第四节 复合函数的导数	149
第五节 高阶导数	152
第六节 函数的微分	153
第十一章 导数的应用	159
第一节 函数的单调性	159
第二节 函数的极值与最值	161
第十二章 定积分	168
第一节 定积分的概念和性质	168
第二节 牛顿—莱布尼兹公式	172
第三节 定积分的计算	175
第四节 定积分的应用	178
附录一 随机数表	185
附录二 思考与练习答案	188

第一章



集合与简易逻辑

集合和简易逻辑是数学中的通用语言. 使用这些语言, 不仅有助于简洁、准确地表达数学内容, 还可以用来刻画和解决生活中的许多问题, 从而提高我们运用数学语言去理解和处理问题的能力.

第一节 集 合

一、集合的概念及表示法

【引例】考察下面几组对象:

- (1) 某校药剂班的全体学生;
- (2) 抛物线 $y = x^2$ 上的所有点;
- (3) 组成盐酸金霉素滴眼液的药物成分;
- (4) 所有的直角三角形;
- (5) 小于 10 大于 1 的偶数.

可以看出, 它们分别是一些人、一些点、一些药物的成分、一些图形、一些数的全体.

一般地, 把一些能够确定的对象看成一个整体, 我们就说, 这个整体是由这些对象的全体构成的集合. 构成集合的每个对象都叫做集合的元素. 例如(1)是由某校药剂班的全体学生构成的集合, 其中每个学生都是这个集合的元素; 又如(3)是由盐酸金霉素滴眼液的药物成分构成的集合, 构成这个集合的元素是盐酸金霉素、硼酸、硼砂、硫酸钠.

集合一般用大写英文字母 $A, B, C \dots$ 表示, 集合的元素一般用小写英文字母 $a, b, c \dots$ 表示.

如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a 属于 A , 记作 $a \in A$, 读作“ a 属于 A ”; 如果 a 不是集合 A 的元素, 就说 a 不属于 A , 记作 $a \notin A$, 读作“ a 不属于 A ”.

对集合的概念, 再作如下说明:

(1) 对于一个给定的集合, 集合中的元素都是确定的. 例如, 小于 10 大于 1 的偶数的全体构成一个集合, 显然 2、4、6、8 都是这个集合的元素, 而 3、5、7、9 都不是这个集合的元素. 换句话说, 不能确定的对象, 就不能构成集合. 例如, 某校全科医学一班高个子同学的全体, 就不能构成集合. 这是由于没有规定多高才算是高个子, 因而, “高个子同学”不能确定.

(2) 对于一个给定的集合, 集合中的元素是互异的. 这就是说, 集合中的任何两个元素都是不同的对象, 相同的对象归入任何一个集合时只能算作这个集合的一个元素. 例如, 由

1、2、3、4、1 构成的集合,应该说这个集合共有 4 个元素,相同的对象“1”应算一个.

由数构成的集合叫做数集.我们约定用一些大写英文字母,表示常用到的一些数集.

全体自然数的集合称为自然数集,记作 $\mathbf{N}$;

全体正整数的集合称为正整数集,记作 $\mathbf{N}^*$ (或 $\mathbf{N}_+$);

全体整数的集合称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$;

全体有理数的集合称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;

全体实数的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

集合的表示法常用的有列举法和描述法.

将集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法,叫做列举法.

例如,由 1、2、3、4、5 组成的集合,可表示为

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

又如,由中国古代的四大发明构成的集合,可表示为

$$\{\text{指南针, 造纸, 活字印刷, 火药}\}.$$

注意 a 与 $\{a\}$ 的含义是完全不同的: a 表示一个元素; $\{a\}$ 表示一个集合,这个集合只含有一个元素 a , 它们之间是从属关系,即 $a \in \{a\}$.

用列举法表示集合时,不必考虑元素的前后顺序.例如,集合 $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{3, 1, 2\}$ 表示同一个集合.

把集合中元素的共同属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法,叫做描述法.具体表示方法是在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式,再划一条竖线,在竖线的右边写上这个集合的元素的共同属性.一般写成 $\{x | p(x)\}$ 的形式,其中, x 表示集合的元素, $p(x)$ 表示元素的共同属性.

例如,由不等式 $x-3 \geq 2$ 的所有解组成的集合(即不等式 $x-3 \geq 2$ 的解集),可表示为 $\{x | x-3 \geq 2, x \in \mathbf{R}\}$. 由抛物线 $y = x^2 + 1$ 上所有点组成的集合,可表示为 $\{(x, y) | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$.

在某种约定下, x 的取值集合可省略不写.例如,在实数集 $\mathbf{R}$ 中取值, $x \in \mathbf{R}$ 常省略不写.上述集合可分别写作 $\{x | x-3 \geq 2\}$ 与 $\{(x, y) | y = x^2 + 1\}$.

有时为了方便,像正偶数这样的集合,可以表示为 $\{\text{正偶数}\}$. 也就是说,可以省去竖线及其左边的部分.又如,所有的直角三角形构成的集合,可表示为 $\{\text{直角三角形}\}$.

例 1 用适当的方法表示下列集合:

- (1) 由小于 7 的自然数构成的集合;
- (2) 大于 3 的实数构成的集合;
- (3) 由直线 $y = 2x + 1$ 上所有点构成的集合;
- (4) 由 0.5、3.7、-1.3、4.902 构成的集合;
- (5) 方程 $x^2 - 8 = 0$ 的解构成的集合.

解: (1) 列举法: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(2) 描述法: $\{x | x > 3\}$;

(3) 描述法: $\{(x, y) | y = 2x + 1\}$;

(4) 列举法: $\{0.5, 3.7, -1.3, 4.902\}$;

(5) 描述法: $\{x | x^2 - 8 = 0\}$.

含有有限个元素的集合叫做有限集,如上例中的(1)、(4)、(5);含有无限个元素的集合

叫做无限集,如上例中的(2)和(3).

只含有一个元素的集合叫做单元素集,例如 $\{1\}$ 、 $\{0\}$;不含任何元素的集合叫做空集,用符号 $\varnothing$ 表示,例如 $\{x|x^2=-1\}=\varnothing$.

二、集合之间的关系

【引例】观察下面几个例子,你能发现两个集合之间的关系吗?

(1) $A=\{\text{数学,语文,解剖}\}$, $B=\{\text{数学,语文,政治,解剖}\}$;

(2) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$.

容易看出,(1)中集合 A 的任一元素都是集合 B 的元素.这时我们说集合 A 与集合 B 有包含关系.(2)中的集合 A 与集合 B 也有这种关系.

一般地,对于两个集合 A 和 B ,如果集合 A 的任一元素都是集合 B 的元素,那么,集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$ (或 $B\supseteq A$),读作“ A 含于 B ”(或“ B 包含 A ”).

在数学中,我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合,这种图称为文氏图.这样,上述集合 A 与集合 B 的包含关系,可以用图1-1表示.

对于任何一个集合 A ,显然有 $A\subseteq A$.即任何一个集合都是其本身的子集.

我们规定空集是任一集合的子集,也就是说,对于任何集合 A ,都有 $\varnothing\subseteq A$.

如果集合 A 是集合 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A ,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集.记作 $A\subsetneq B$ (或 $B\supsetneq A$),读作“ A 真含于 B ”(或“ B 真包含 A ”).

例如,观察 $A=\{a,c\}$, $B=\{a,b,c,d,e\}$,显然,集合 A 是集合 B 的子集,但 $b\in B$, $b\notin A$,所以集合 A 是集合 B 的真子集,即 $A\subsetneq B$.

对于两个集合 A 和 B ,如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,那么我们就说这两个集合相等,记作 $A=B$,读作“ A 等于 B ”.

例如,设 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}$, $B=\{2,3\}$,则 $A=B$.

例2 写出集合 $A=\{1,2,3\}$ 的所有子集和真子集.

解:集合 A 的所有子集是: $\varnothing$ 、 $\{1\}$ 、 $\{2\}$ 、 $\{3\}$ 、 $\{1,2\}$ 、 $\{1,3\}$ 、 $\{2,3\}$ 、 $\{1,2,3\}$;在上述子集中,除去集合 A 本身,即 $\{1,2,3\}$ 外,其余都是 A 的真子集.

例3 判断以下两个集合之间的关系:

(1) $A=\{1,2,4,5,7,9\}$, $B=\{1,2,5\}$;

(2) $C=\{1,-1\}$, $D=\{x|x^2-1=0\}$;

(3) $M=\{\text{偶数}\}$, $N=\{\text{整数}\}$.

解:(1) $A\supsetneq B$; (2) $C=D$; (3) $M\subsetneq N$.

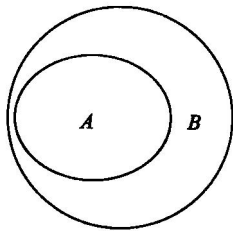


图 1-1

三、集合的运算

【引例1】观察下列各个集合,你能发现集合 C 与集合 A 、 B 之间的关系吗?

(1) $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e,f\}$, $C=\{c,d\}$;

(2) $A=\{2,4,6,8,10\}$, $B=\{3,4,8,12\}$, $C=\{4,8\}$.

显然,集合 C 是由那些既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的.

一般地,对于两个集合 A 与 B , 由既属于 A 又属于 B 的所有公共元素组成的集合,叫做 A 、 B 的交集,记作 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”。

可用图 1-2 的阴影部分表示 A 与 B 的交集。

这样,引例 1 中, $A \cap B = C$ 。

由交集的定义容易推出,对于任何集合 A 、 B , 都有

$$A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A.$$

例 4 已知 $A = \{6 \text{ 的正约数}\}$, $B = \{10 \text{ 的正约数}\}$, 求 $A \cap B$ 。

解: 因为 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 5, 10\}$,

所以 $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\} \cap \{1, 2, 5, 10\} = \{1, 2\}$ 。

例 5 $A = \{\text{等腰三角形}\}$, $B = \{\text{直角三角形}\}$, 求 $A \cap B$ 。

解: $A \cap B = \{\text{等腰三角形}\} \cap \{\text{直角三角形}\} = \{\text{等腰直角三角形}\}$ 。

例 6 设 $A = \{x | x < 3\}$, $B = \{x | x > -1\}$, 求 $A \cap B$ 。

解: $A \cap B = \{x | x < 3\} \cap \{x | x > -1\} = \{x | -1 < x < 3\}$ 。

例 7 设 $A = \{(x, y) | x + 2y = 1\}$, $B = \{(x, y) | 4x + y = -3\}$, 求 $A \cap B$ 。

解: $A \cap B = \{(x, y) | x + 2y = 1\} \cap \{(x, y) | 4x + y = -3\}$

$$= \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + y = -3 \end{cases} \right. \right\} = \{(-1, 1)\}.$$

【引例 2】 观察下列各个集合, 你能发现集合 C 与集合 A 、 B 之间的关系吗?

(1) $A = \{a, c, d, e, f\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{a, b, c, d, e, f\}$;

(2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。

显然, 集合 C 是由集合 A 与集合 B 的所有元素合在一起组成的。

一般地, 对于两个集合 A 与 B , 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”。

可用图 1-3 中的阴影部分表示 A 与 B 的并集。

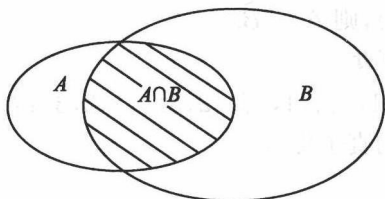


图 1-2

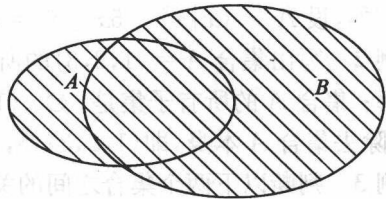


图 1-3

这样, 引例 2 中, $A \cup B = C$ 。

由并集的定义容易推出, 对于任何集合 A 、 B , 都有

$$A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A.$$

例 8 $A = \{\text{有理数}\}$, $B = \{\text{无理数}\}$, 求 $A \cup B$ 。

解: $A \cup B = \{\text{有理数}\} \cup \{\text{无理数}\} = \mathbf{R}$ 。

例 9 设 $A = \{x | -3 < x < 4\}$, $B = \{x | 0 < x < 5\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$ 。

解:

$$A \cap B = \{x | -3 < x < 4\} \cap \{x | 0 < x < 5\} = \{x | 0 < x < 4\},$$

$$A \cup B = \{x | -3 < x < 4\} \cup \{x | 0 < x < 5\} = \{x | -3 < x < 5\}.$$

在研究集合与集合之间的关系时,这些集合常常都是某一个给定集合的子集,那么,这个给定的集合可以看作全集,通常用 U 表示.也就是说,全集包含了我们要研究的各个集合的全部元素.在研究数集时,常常把实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集.

一般地,设 U 是全集, A 是 U 的一个子集(即 $A \subseteq U$),由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做集合 A 在 U 中的补集,记作 $\complement_U A$,读作“ A 在 U 中的补集”.

集合 A 在 U 中的补集 $\complement_U A$,可用图 1-4 中的阴影部分表示.图中的矩形表示全集 U ,圆表示它的子集 A ,阴影部分表示 $\complement_U A$.

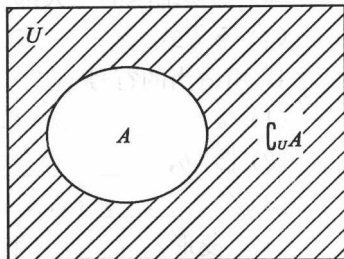


图 1-4

由补集的定义容易推出,对于全集 U 的任何子集 A 都有 $A \cup \complement_U A = U$, $A \cap \complement_U A = \emptyset$, $\complement_U(\complement_U A) = A$.

例 10 设全集 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, d, f\}$, 求 $\complement_U A$.

解: $\complement_U A = \{b, c, e\}$.

例 11 设 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, 求 $\complement_U A$, $A \cap \complement_U A$, $A \cup \complement_U A$.

解: $\complement_U A = \{1, 3, 5\}$, $A \cap \complement_U A = \emptyset$, $A \cup \complement_U A = U$.

例 12 已知 $U = \{\text{实数}\}$, $Q = \{\text{有理数}\}$, 求 $\complement_U Q$.

解: $\complement_U Q = \{\text{无理数}\}$.

例 13 已知 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x > 3\}$, 求 $\complement_U A$.

解: $\complement_U A = \{x | x \leq 3\}$.

思考与练习 1-1 A

1. 下列各题中的对象能否确定一个集合?

- (1) 某学校的体育教师;
- (2) 世界上最高的山峰;
- (3) 充分接近点 $P(2, 3)$ 的点;
- (4) 大于 100 的自然数;
- (5) 学习好的同学.

2. 用适当的符号 ($\in$ 、 $\notin$) 填空:

- (1) 4 _____ $\mathbf{N}$;
- (2) 3.14 _____ $\mathbf{Z}$;
- (3) $-\frac{3}{2}$ _____ $\mathbf{Q}$;
- (4) $\sqrt{2}$ _____ $\mathbf{R}$;
- (5) a _____ $\{a\}$;
- (6) 0 _____ $\emptyset$.

3. 用适当的方法表示下列集合:

- (1) 大于 2 小于 10 的奇数的全体;
- (2) 组成中国国旗图案的颜色的全体;
- (3) 小于 5 的实数的全体;
- (4) 一年中恰有 30 天的月份的全体;
- (5) 方程 $x^2 = 1$ 的解集;

(6) 抛物线 $y = 2x^2 - 3$ 上的所有点的全体;

(7) 梯形的全体;

(8) 动物细胞的三大部结构;

(9) 不等式 $5x - 3 < 7x + 4$ 的解集.

4. 用适当的符号 ($\subseteq$, $\supseteq$, $=$) 填空:

(1) $\{a\}$ _____ $\{a, b, c\}$;

(2) $\{a, b, c\}$ _____ $\{b, c\}$;

(3) $\emptyset$ _____ $\{a, b\}$;

(4) $\{\text{菱形}\}$ _____ $\{\text{平行四边形}\}$;

(5) $\{2, 3\}$ _____ $\{3, 2\}$;

(6) $\{3, 5, 7, 9\}$ _____ $\{5, 9\}$.

5. 写出 $S = \{a, b, c\}$ 的所有子集, 并指出其中哪些是真子集.

6. 已知 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

7. 已知 $A = \{x | x - 4 = 0\}$, $B = \{x | x^2 = 16\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

8. 已知 $A = \{x | x - 6 < 0\}$, $B = \{x | 2x - 3 > 0\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

9. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 7, 8\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$, $\complement_U A \cap \complement_U B$, $\complement_U A \cup \complement_U B$.

思考与练习 1-1 B

1. 判定下列语句是否正确:

(1) 由 1, 2, 3, 3, 3 组成一个集合, 这个集合共有 5 个元素;

(2) 所有三角形组成的集合是无限集;

(3) 周长为 15cm 的三角形组成的集合是有限集;

(4) 中华人民共和国在某一时刻公民的全体组成的集合是无限集.

2. 求满足 $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ 的所有集合 A .

3. 指出下列各对集合之间的关系:

(1) $A = \{\text{等腰三角形}\}$, $B = \{\text{等边三角形}\}$;

(2) $C = \{\text{等腰直角三角形}\}$, $D = \{\text{有一个角是 } 45^\circ \text{ 的直角三角形}\}$;

(3) $E = \{\text{矩形}\}$, $F = \{\text{正方形}\}$;

(4) $G = \{\text{奇数}\}$, $H = \{\text{整数}\}$.

4. 用图示说明: 如果 $A \subseteq B$, 那么 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$.

5. 用适当的符号 ($\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\supseteq$, $=$) 填空:

(1) 2 _____ $\{\text{质数}\}$; (2) $\emptyset$ _____ $\{0\}$;

(3) $\{2, -2\}$ _____ $\{x | x^2 = 4\}$; (4) $\{0\}$ _____ $\mathbf{Z}$;

(5) $\sqrt{7}$ _____ $\mathbf{R}$; (6) $\mathbf{Q}$ _____ $\mathbf{N}$.

6. 已知 $A = \{\text{锐角三角形}\}$, $B = \{\text{钝角三角形}\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

7. 设 $A = \{(x, y) | 3x + 2y = 4\}$, $B = \{(x, y) | 2x + 3y = 1\}$, 求 $A \cap B$.

8. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | -3 < x < 3\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U A \cap U$, $\complement_U A \cup U$, $\complement_U A \cap A$, $\complement_U A \cup A$.

第二节 简易逻辑

一、命题及量词

【引例】分析下列语句的表述形式有什么特点？你能判断它们的真假吗？

- (1) 在第29届北京奥运会上，中国赢得51块金牌；
- (2) 地球绕着太阳转；
- (3) $2+3=6$ ；
- (4) 三角形的三个内角和等于 180° ；
- (5) 5能被2整除.

可以看到，这些语句都是陈述句，并且可以判断真假. 其中语句(1)、(2)、(4)判断为真，语句(3)和(5)判断为假.

一般在数学中，我们把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做**命题**. 其中判断为真的语句，叫做**真命题**，判断为假的语句，叫做**假命题**.

所以，在上面的语句中，(1)、(2)、(4)是真命题，(3)和(5)为假命题. 又如：

- (1) 祝你生日快乐！
- (2) 你去商场吗？
- (3) 你快离开！
- (4) $x>3$.

等都不是命题. 因为(1)、(2)、(3)分别是感叹句、疑问句、祈使句，都不是陈述句；(4)虽然是陈述句，但因不知 x 代表什么数，无法判断真假，所以它也不是命题.

像(4)这种含有变量的语句一般称为**开句**或**条件命题**. 在条件命题前加上含有量词的语句，就可使之变为可判断真假的命题.

例如，存在一个数 x ，使 $x-3=0$ ，就是一个真命题. 对任意实数 x ，都有 $x-3=0$ ，就是一个假命题.

“存在”和“任意”就是两个常用的量词.

例1 判断下列命题的真假：

- (1) 对任意实数 x ， $x^2 < 0$ ；
- (2) 存在一个实数 x ， $x^2 > 4$.

解：(1) 令 $x=1$ ，则 $x^2=1$ ，而 $1>0$ ，所以这个命题是假命题；

(2) 令 $x=3$ ，则 $x^2=9$ ，而 $9>4$ ，所以这个命题是真命题.

命题的真假称为命题的**真值**. 命题常用小写的字母 $p, q, r \cdots$ 来表示.

二、逻辑联结词

【引例1】下面的三个命题间有什么关系？

- (1) 20能被4整除；
- (2) 20能被5整除；
- (3) 20能被4整除且能被5整除.

可以看到，命题(3)是由命题(1)、(2)使用联结词“且”联结得到的新命题.

一般用联结词“且”把命题 p 和命题 q 联结起来就得到一个命题,记作 $p \wedge q$,读作“ p 且 q ”.

它的真值表为:

p	q	$p \wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

根据此表,可由 p 、 q 的真假,判断 $p \wedge q$ 的真假.其规律是只有当 p 和 q 都是真命题时,新命题 $p \wedge q$ 才是真命题,如果 p 和 q 中有一个是假命题,那么新命题 $p \wedge q$ 就是假命题.

例如,设命题 p :6 是 2 的倍数, q :6 是 3 的倍数,用联结词“且”联结得新命题

$p \wedge q$:6 是 2 的倍数且是 3 的倍数.

因为 p 、 q 都是真命题,根据 $p \wedge q$ 的真值表可知,命题“6 是 2 的倍数且是 3 的倍数”应是真命题.

【引例 2】下面的三个命题间有什么关系?

- (1) 12 是 4 的倍数;
- (2) 12 是 3 的倍数;
- (3) 12 是 4 的倍数或是 3 的倍数.

可以看到,命题(3)是由命题(1)、(2)使用联结词“或”联结得到的新命题.

一般用联结词“或”把命题 p 和命题 q 联结起来就得到一个命题,记作 $p \vee q$,读作“ p 或 q ”.

它的真值表为:

p	q	$p \vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

根据此表,可由 p 、 q 的真假,判断 $p \vee q$ 的真假.其规律是只有当 p 和 q 都是假命题时,新命题 $p \vee q$ 才是假命题,如果 p 和 q 中有一个是真命题,那么新命题 $p \vee q$ 就是真命题.

例如,设命题 p : $5 > 3$, q : $5 = 3$,用联结词“或”联结得新命题

$p \vee q$: $5 > 3$ 或 $5 = 3$.

上式又通常记作 $5 \geq 3$.

因为 p 是真命题, q 是假命题,根据 $p \vee q$ 的真值表可知,命题“ $5 \geq 3$ ”应是真命题.

又如,设命题

p :明天刮风, q :明天下雨.

用“或”联结构成一个新命题

明天刮风或明天下雨.

根据 $p \vee q$ 的真值表知,这个新命题当“明天刮风不下雨”、“明天下雨不刮风”、“明天刮风又下雨”三种情况中,有一种情况出现时,都是真命题.只有当明天既不刮风又不下雨时,才是假命题.

例 2 判断下列命题中,“ p 且 q ”和“ p 或 q ”的真假:

(1) $p: 2+3=6, q: 3>2$;

(2) $p: 27$ 是 3 的倍数, $q: 27$ 是 9 的倍数.

解: (1) 因为 p 假 q 真,所以由 $p \wedge q$ 、 $p \vee q$ 的真值表可知

命题“ $2+3=6$ 且 $3>2$ ”是假命题,命题“ $2+3=6$ 或 $3>2$ ”是真命题;

(2) 因为 p 真 q 真,所以由 $p \wedge q$ 、 $p \vee q$ 的真值表可知

命题“ 27 是 3 的倍数且是 9 的倍数”是真命题,命题“ 27 是 3 的倍数或是 9 的倍数”也是真命题.

例 3 判断下列命题的真假:

(1) $5 \geq 5$;

(2) $4 \leq 2$.

解: (1) $5 \geq 5$ 的含义是 $5>5$ 或 $5=5$,因为 $5=5$ 是真命题,所以 $5 \geq 5$ 是真命题.

(2) $4 \leq 2$ 的含义是 $4<2$ 或 $4=2$,因为这两个命题都是假命题,所以 $4 \leq 2$ 是假命题.

【引例 3】 下面的两个命题间有什么关系?

(1) 25 能被 5 整除;

(2) 25 不能被 5 整除.

p	$\neg p$
真	假
假	真

可以看到,命题(2)是命题(1)的否定.

一般对一个命题 p 全盘否定,就得到一个命题,记作 $\neg p$,读作“非 p ”(或 p 的否定).

上边的真值表,可表示 p 与 $\neg p$ 的关系.根据此表,可由 p 的真假,判断 $\neg p$ 的真假.易知, p 与 $\neg p$ 不能同真、同假,其中一个为真,另一个必为假.

例 4 写出下列命题的否定,并判断其真假:

(1) $p: 8$ 是偶数;

(2) $q: 对任意实数 x, 都有 x^2 + 2x + 1 \geq 0$;

(3) $r: 存在一个实数 x, 使 x^2 - 4 = 0$.

解: (1) $\neg p: 8$ 不是偶数, $\neg p$ 为假命题.

(2) $\neg q: 存在一个实数 x, 使 x^2 + 2x + 1 < 0$.

因为 $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$, 对任意实数 x 都成立,

所以不存在一个实数 x , 使 $x^2 + 2x + 1 < 0$ 成立,即 $\neg q$ 为假命题.

(3) $\neg r: 对任意实数 x, x^2 - 4 \neq 0$.

因为存在 $x=2$, 使 $2^2 - 4 = 0$ 成立,所以 $\neg r$ 是假命题.

注: ① 在例 4(3)中,我们证明 $\neg r$ 是假命题的方法,叫做举反例.因为 $\neg r$ 表述的是对所

有实数 x , $x^2 - 4 \neq 0$, 所以我们只要找到一个实数 x , 使 $x^2 - 4 = 0$, 就可判定 $\neg r$ 是假命题. 另外我们还经常通过判断 $\neg p$ 、 $\neg q$ 、 $\neg r$ 的真假来判断 p 、 q 、 r 的真假. ② 在例 4 中, 可发现“存在一个实数”, 在命题的非中, 变为“任意实数”, 反之, 也是如此.

有时, 我们还经常遇到形式为

“如果 p , 那么 q ”

的命题, 记作 $p \rightarrow q$. 其中 p 称为命题的条件, q 称为命题的结论.

例如, 设命题 p : 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, q : 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \angle C$, 则

$p \rightarrow q$: 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $AB = AC$, 那么 $\angle B = \angle C$.

因为在 $\triangle ABC$ 中, 由 $AB = AC$, 可推出 $\angle B = \angle C$, 所以, $p \rightarrow q$ 是正确的命题.

例 5 已知下列各对命题, 写出用“如果……那么……”联结所得的新命题, 并判断它们的真假.

(1) $p: a = 0$, $q: ab = 0$;

(2) p : 一个数是负数, q : 这个数的立方是正数;

(3) $p: \alpha$ 、 β 是对顶角, $q: \alpha = \beta$.

解: (1) 如果 $a = 0$, 那么 $ab = 0$.

因为由 $a = 0$, 能推出 $ab = 0$, 所以此命题是真命题.

(2) 如果一个数是负数, 那么这个数的立方是正数.

显然, 这个命题是假命题.

(3) 如果 α 、 β 是对顶角, 那么 $\alpha = \beta$.

由初中几何可知, 我们可由 α 、 β 是对顶角, 推出 $\alpha = \beta$, 所以这个命题是真命题.

三、充分条件与必要条件

上面我们讨论了“如果 p , 那么 q ”形式的命题, 其中, 有的命题为真, 有的命题为假. 当“如果 p , 那么 q ”是真命题时, 我们就说 p 可推出 q , 记作 $p \Rightarrow q$, 读作“ p 推出 q ”.

如果由 p 可推出 q , 我们又称 p 是 q 的充分条件, 或 q 是 p 的必要条件.

如果由 p 可推出 q , 同时由 q 可推出 p , 那么我们就称 p 是 q 的充分且必要条件(简称充要条件), 记作 $p \Leftrightarrow q$.

显然, 如果 p 是 q 的充要条件, 那么 q 也是 p 的充要条件.

例 6 指出下列各组命题中, p 是 q 的什么条件:

(1) $p: x = y$, $q: x^2 = y^2$;

(2) $p: x^2 > 0$, $q: x > 0$;

(3) p : 三角形的三条边相等, q : 三角形的三个内角相等.

解: (1) 因为由 $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$, 即由 $p \Rightarrow q$, 所以 p 是 q 的充分条件;

(2) 因为由 $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$, 即由 $q \Rightarrow p$, 所以 p 是 q 的必要条件;

(3) 因为由三角形的三条边相等 $\Rightarrow$ 三角形的三个内角相等, 即由 $p \Rightarrow q$, 同时, 由三角形的三个内角相等 $\Rightarrow$ 三角形的三条边相等, 即由 $q \Rightarrow p$, 所以 $p \Leftrightarrow q$, 因此 p 是 q 的充要条件.

思考与练习 1-2 A

1. 判断下列语句或式子是否是命题:

(1) 祝你身体健康!