綜合 線性代數

廖亦德 著

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g & j \\ h & k \\ i & l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

$$g\begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix}+h\begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix}+i\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$j\begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix}+l\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

綜合 線性代數

廖亦德 著

綜合線性代數　　定價 300 元

著　者：廖　亦　德
發行人：羅　蕙　蓮
發行所：巨德出版社（局版台業字第 4004 號）
台北市永吉路 30 巷 151 弄 12 號 2 樓
台北郵箱 78-90 號
電　話：(02) 7687342
郵政劃撥：01721550 號廖玉華帳戶
印刷所：大廣打字印刷品行
台北市龍泉街 37 號 2 樓
總經銷：學英文化事業有限公司
台北市羅斯福路 3 段 269 巷 36 號
電　話：(02) 3946693

中華民國七十六年十月初版

序

線性代數範圍廣濶，教科書林立；在許多國內外的教本之間，取材也各不相同，有的偏重邏輯體系的嚴謹，有的偏重應用；有的删除 Jordan form ，有的不包含內積；有的只是入門課程，有的却是百科大全。對一位有心研習線性代數的同學來說，面對著這許多的選擇，在有限的時間精力之下，他要用什麼方法，才能對線性代數的衆多主題建立起足夠的認識呢？

這本綜合線性代數之所以稱爲綜合，就是要使同學們可以用讀一本書的精力，達到讀遍羣書的果效。本書的取材，以國立大學工學院研究所的要求爲標準，删除太過形式或太過冷僻的題材，再重新整編各書所討論的範圍，配上適當的範例及習題，使一般中上程度的同學都能夠由自修了解到九成以上。通常數學書總是課文簡略，習題困難，本書針對這種流弊，特別把一些學習要素都安置在正文中，使讀者們弄懂課文後就能解出大部分的題目。

爲了要達到足夠的廣度，本書的內容涵蓋了相當於三學期的課程份量。以如此的份量，讀者在初次學過後，覺得不熟，是很正常的現象。這時候不要灰心，請務必再從頭讀一次。通常唸線性代數總必須在讀第二回時才能達到融會貫通、左右逢源的境界，不要因爲別人說線性代數簡單，就對自己失去信心。

這本書並不是獨立完成的。由於游世賢兄惠允我使用他的線性代數作藍本，使我能在現成的基礎上立刻邁進著作的第二階段。我必須承認，若不是靠著游老師的心血結晶作基礎，我這本書至少還要在一年以後才能達到現有的成熟度。另外，因著衆多學友們的支持與愛護，使我有一再增訂教材的機會，俗語說教學相長，我實在感謝同學們在不知不覺間爲這本書所做成的重大貢獻。

廖亦德　　謹誌

民國七十六年十月

目 錄

1　向量幾何

1.　**定義：**

對於向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)\in R^n$ 及純量 $k\in R$，定義

①$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1, a_2=b_2, \cdots\cdots, a_n=b_n$

②$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, \cdots\cdots, a_n\pm b_n)$ ………向量和，差

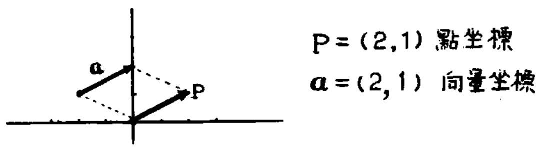
③$k\boldsymbol{a}=(ka_1, ka_2, \cdots\cdots, ka_n)$ ………係數積

④$\boldsymbol{o}=(0, 0, \cdots\cdots, 0)$ ………零向量

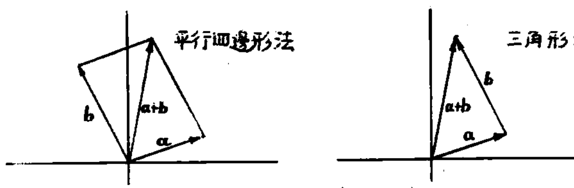
⑤$-\boldsymbol{a}=(-1)\boldsymbol{a}=(-a_1, -a_2, \cdots\cdots, -a_n)$

【要訣】(1)在幾何意義上，向量是一個具有“大小”（即長度）與“方向”的有向線段，它本身不具有位置，所以向量又稱爲“自由向量”（意即可自由地作平行移位）。當把向量的起點設在坐標系的原點時，其終點指到一個點上，此時這個向量就被稱爲那個點的“位置向量”。位置向量與其終點常不加區分，符號也相同。

(2)向量乘 k 倍，在幾何上是長度變 $|k|$ 倍，若 $k<0$，則還要把方向倒轉。



(3)向量的加法在幾何上可用平行四邊形法，或三角形法。



(4) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ ； $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

(5)高中時用幾何方向定義向量，及向量的運算；再導出代數上的運算公式。而在線性代數課程中通常是以代數方式作定義，再解釋幾何意義。

(6)設 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OQ}$ ，$\overrightarrow{PQ}$ 線段的中點爲 M，則

$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ （中點公式）

2. 定理：向量空間的八個基本性質。

① $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ （向量加法交換律）

② $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ （向量加法結合律）

③ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ （向量加法單位元素）

④ $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{o}$ （向量加法反元素）

⑤ $(h+k)\boldsymbol{a}=h\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a}$ （係數積對純量加法的分配性）

⑥ $h(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=h\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{b}$ （係數積對向量加法的分配性）

⑦ $(hk)\boldsymbol{a}=h(k\boldsymbol{a})$ （純量乘法的結合性）

⑧ $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ （ preservation of scale ）

【要訣】(1)①～④是向量加法的性質；⑤、⑥是向量加法與係數積的關係；⑦、⑧是係數積的性質。

(2)以後要用這八個基本性質當做基本公理（Axiom）來定義抽象

的向量空間。

【證】略（讀者自行以定義代入驗證之）

3. 定義

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n$ ………內積、點乘積

②$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ ……長度

③若 $\|\boldsymbol{a}\|=1$，則稱 $\boldsymbol{a}$ 爲單位向量

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{i}_1=(1,0,0,\cdots\cdots,0)\\ \boldsymbol{i}_2=(0,1,0,\cdots\cdots,0)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{i}_n=(0,0,0,\cdots\cdots,1)\end{array}\right\}\text{標準基向量 (base vector)}$$

④$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\cos^{-1}\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|}$ ………夾角

⑤若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，則稱 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 正交（orthogonal）

【要訣】(1)在高中時是由長度及角度定義內積：

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|\cdot\cos\theta$；$\theta$ 爲 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 之夾角

再導出代數公式，但在線性代數通常先以代數公式作爲定義，再定義長度及角度。

又 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\cos^{-1}\left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}\right)$

(2)由內積可定義長度及角度，由長度可定義單位向量及單位基底，由角度可定義正交。

(3)由內積所定義之角度爲無向角，角度自 0° 至 180°（即 0 到 π）

(4)把非零向量 $\boldsymbol{a}$ 化爲單位向量的過程（$\boldsymbol{a}\to\dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$）稱爲單位化或標準化（normalize）

(5)設 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OQ}$，則 P，Q 的距離爲

$\|\overrightarrow{PQ}\|=\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|$　（距離公式）

(6)線代中通常不稱垂直，而稱正交

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

$\boldsymbol{o}$ 向量可視爲垂直於任何向量

(7)對非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\exists k\ni\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$

$k>0$ 時稱同向，$k<0$ 時稱反向

$\boldsymbol{o}$ 可視爲平行於任何向量

4. 範例：（成大 69 土研）

$\boldsymbol{a}=(1,0,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,1)$，$\boldsymbol{c}=(-1,1,0)$

(a)求 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所夾之銳角　(b)若 $\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$ 與 $\boldsymbol{c}$ 垂直求係數 α 之值

【解】(a) $\theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right)$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{1\cdot 2+0\cdot 1+(-1)\cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

(b) $(\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}\iff(\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$

$(1+2\alpha,\alpha,-1+\alpha)(-1,1,0)=0\Rightarrow\alpha=-1$

5. 定理：

對於向量，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in R^n$，純量 $h,k\in R$

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$　（內積的交換性）

② $(h\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=h\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+k\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

③ $\boldsymbol{a}\cdot(h\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c})=h\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

（②③ 內積的雙線性條件）

④ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geq 0$　（正定性）

⑤下三式彼此等價

(a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0$

(b) $\|\boldsymbol{a}\|=0$

(c) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$

【要訣】(1)通常以①～④作爲基本公理，用來定義抽象的內積空間。（見後）

(2)若佈於複數系，①～④還需稍加修飾。（見第九章）

(3)②③可分寫成

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

$k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b})$

【證】略（讀者自行驗證）

習題 5.1

試利用線性條件重解範例4（b）

6. **定理**：（Schwarz's inequality）

若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in R^n$，則

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\leq\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$

其中等式成立的充分必要條件爲“ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 至少有一爲 $\boldsymbol{o}$，或 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行”（可寫作：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ 或 $\exists k\ni\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$）

【要訣】(1)上式可表爲 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)$

(2) Schwarz's 不等式可寫爲

$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leq\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$

其中等式成立之充分必要條件相同。又可寫爲

$-\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\leq\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leq\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$

其中右邊等式成立之充分必要條件爲“ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 至少有一爲 $\boldsymbol{o}$，或 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 同向”；而左邊等式成立之充分必要條件爲“ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 至少有一爲 $\boldsymbol{o}$，或 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 反向”。

【證】1.若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中有一爲 $\boldsymbol{o}$，則定理顯然成立

以下設 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 皆不爲 $\boldsymbol{o}$。

2.令 $f(t)=\|t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2$，$t\in R$

則 $f(t)=(\boldsymbol{a}t-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}t-\boldsymbol{b})$

$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})t^2-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})t+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$

$=\|\boldsymbol{a}\|^2t^2-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})t+\|\boldsymbol{b}\|^2$

因 $f(t)\geq 0$　恒成立

以 $t=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$ 代入

即 $\|\boldsymbol{a}\|^2\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\right)^2-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}+\|\boldsymbol{b}\|^2\geq 0$

即 $\dfrac{-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2}+\|\boldsymbol{b}\|^2\geq 0$

$\therefore\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\geq(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$

3.若 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$，則

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=(k\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})^2=k^2\|\boldsymbol{b}\|^4=\|k\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$

∴等式成立

4.若等式成立，則2.中 $f(t)$ 有根，即存在 k 滿足 $f(k)=0$，即 $\|k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2=0$

∴ $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=0$

∴ $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$

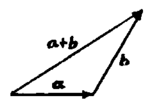
習題 6.1

試證要訣(2)（hint：依 $\boldsymbol{b}\cdot k\boldsymbol{a}$ 中 k 的正負討論。

7．**定理**：三角不等式

若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in R^n$，則

$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leq\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$



其中等式成立的充分必要條件爲“ $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 有一爲 $\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 同向”。

【要訣】$\big|\|\boldsymbol{a}\|-\|\boldsymbol{b}\|\big|\leq\|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\|\leq\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$

【證】$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$\leq\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=(\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2$

∴ $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leq\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$

其中等式成立之充分必要條件爲 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$，由定理 6 要訣(2)可知，在“ $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 有一爲 $\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 同向”時成立。

習題 7.1

Schwarz 不等式 $|X\cdot Y|\leq|X||Y|$ 中“＝”成立之條件是(1)，而三角不等式 $|X+Y|\leq|X|+|Y|$ 中“＝”成立之條件爲(2)。

【解】(1) $X=\boldsymbol{0}$ 或 $Y=\boldsymbol{0}$ 或 $Y=cX$，c 爲任意常數。

(2) $X=\boldsymbol{0}$ 或 $Y=\boldsymbol{0}$ 或 $Y=cX$，但 c 必須大於 0。

習題 7.2

證明 $\|\boldsymbol{a}\|-\|\boldsymbol{b}\|\leq\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$

8. 定義：

設 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c} \in R^n$，定義

① $|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}|$ 爲 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所張開之平行四邊形的面積。
（$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行時，$|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}|$ 定爲 0）

② $|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}|$ 爲 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 所張開之平行六面體的體積（$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面時，$|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}|$ 定爲 0）

③ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ 時，令 $\operatorname{comp}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}$，稱爲 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向的(正)投影量。

④ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ 時，令 $\operatorname{proj}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{b}$，稱爲 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向的(正)投影向量。

⑤對點 P，Q，定義 P，Q 之間的距離爲

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

⑥對點 P，Y 爲直線或平面，定義 P，Y 之間的距離爲

$$d(P,Y) = \min\{d(P,Q) \mid Q \in Y\}$$

⑦設 X，Y 爲直線或平面，定義 X，Y 之間的距離爲

$$d(X,Y) = \min\{d(P,Q) \mid P \in X, Q \in Y\}$$

【要訣】(1) $\operatorname{comp}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \dfrac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|} = \|\boldsymbol{a}\| \cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}\right) \frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|} = \operatorname{comp}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} \frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

(2)設 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 皆不爲 0，令 $\theta = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，則

$$0 \le \theta < \frac{\pi}{2} \iff \operatorname{comp}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} > 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \iff \operatorname{comp}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi \iff \operatorname{comp}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} < 0$$

9. 定理：

設 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b} \in R^n$，$\theta = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，則有

① $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$

② $|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$

③ $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 + |\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2$

【要訣】③式爲計算 $|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|$ 之基礎

【證】讀者自證。

10.範例：

①若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$

試證：$|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|=\text{abs}\left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ （abs 表示絕對值）

②若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$

試證：$|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|=\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$

③對 $\boldsymbol{a}=(1,0,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,0,-1)$ 求 $|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|$

【要訣】(1) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所展出之三角形面積爲 $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|$

(2)對 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in R^n$，若 $n\leq 3$，則可套公式，若 $n\geq 4$，則應以上個定理的③求算。

(3)②中令 $a_3=b_3=0$，則公式退化成①。

【解】①讀者自證。

② $|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$

$$
\begin{aligned}
&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\\
&\quad-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\
&=\cdots\cdots\cdots\text{（展開並對消）}\\
&=a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2+a_1^2b_3^2+a_3^2b_1^2\\
&\quad-2a_1b_1a_3b_3+a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2-2a_2b_2a_3b_3\\
&=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2\\
&=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2
\end{aligned}
$$

故得證。

③ $\|\boldsymbol{a}\|^2=1+1+4=6$，$\|\boldsymbol{b}\|^2=1+1+1=3$

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=1-2=-1$

$\therefore |\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|^2=6\cdot 3-(-1)^2=17$

$\therefore |\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|=\sqrt{17}$

習題 10.1

求由$A(2,3,4)$，$B(-1,3,2)$，$C(1,-4,3)$，$D(4,-4,5)$四點所成的平行四邊形的面積。

Ans：$\sqrt{638}$

11. 定義：外積；叉乘積

①設$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)\in R^3$，則

定義 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

②若 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$

則 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$

其中 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$

【要訣】(1)①，②只是表示法不同，本質上是一樣的。

(2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$

$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$

$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|$

$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

(4) $\boldsymbol{a}\times(h\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c})=h\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

$(h\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=h\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+k\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

(5) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$

(6) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

(7)內積定義在任何維度的 R^n 之中，但只有 R^3 中才能定義外積。