

綜合 線性代數

廖亦德 著

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & j \\ h & k \\ i & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

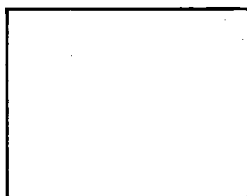
$$g \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$j \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

綜合 線性代數

廖亦德 著

翻
印
必
究



版
權
所
有

綜合線性代數

定價 300 元

~~~~~

著 者：廖 亦 德

發行人：羅 蕙 蓮

●發行所：巨德出版社（局版台業字第 4004 號）

台北市永吉路 30 巷 151 弄 12 號 2 樓

台北郵箱 78-90 號

電 話：(02) 7687342

郵政劃撥：01721550 號廖玉華帳戶

印刷所：大 廣 打 字 印 刷 品 行

台北市龍泉街 37 號 2 樓

總經銷：學 英 文 化 事 業 有 限 公 司

台北市羅斯福路 3 段 269 巷 36 號

電 話：(02) 3946693

~~~~~

中 華 民 國 七 十 六 年 十 月 初 版

本書若發現缺頁倒裝等現象可隨時退換

序

線性代數範圍廣濶，教科書林立；在許多國內外的教本之間，取材也各不相同，有的偏重邏輯體系的嚴謹，有的偏重應用；有的刪除 Jordan form，有的不包含內積；有的只是入門課程，有的却是百科大全。對一位有心研習線性代數的同學來說，面對著這許多的選擇，在有限的時間精力之下，他要用什麼方法，才能對線性代數的衆多主題建立起足夠的認識呢？

這本綜合線性代數之所以稱為綜合，就是要使同學們可以用讀一本書的精力，達到讀遍羣書的果效。本書的取材，以國立大學工學院研究所的要求為標準，刪除太過形式或太過冷僻的題材，再重新整編各書所討論的範圍，配上適當的範例及習題，使一般中上程度的同學都能夠由自修了解到九成以上。通常數學書總是課文簡略，習題困難，本書針對這種流弊，特別把一些學習要素都安置在正文中，使讀者們弄懂課文後就能解出大部分的題目。

爲了要達到足夠的廣度，本書的內容涵蓋了相當於三學期的課程份量。以如此的份量，讀者在初次學過後，覺得不熟，是很正常的現象。這時候不要灰心，請務必再從頭讀一次。通常唸線性代數總必須在讀第二回時才能達到融會貫通、左右逢源的境界，不要因為別人說線性代數簡單，就對自己失去信心。

這本書並不是獨立完成的。由於游世賢兄惠允我使用他的線性代數作藍本，使我能在現成的基礎上立刻邁進著作的第二階段。我必須承認，若不是靠著游老師的心血結晶作基礎，我這本書至少還要在一年以後才能達到現有的成熟度。另外，因著衆多學友們的支持與愛護，使我有一再增訂教材的機會，俗語說教學相長，我實在感謝同學們在不知不覺間爲這本書所做成的重大貢獻。

廖亦德 謹誌

民國七十六年十月

目 錄

1. 向量幾何	1-1 ~ 1-24
向量加法與係數積 1 ; 向量內積, 長度, 夾角 3 ; 內積的性質 4 ; Schwarz 不等式 5 ; 三角不等式 6 ; 面積, 體積, 投影, 距離 7 ; 面積求算法 8 ; 外積 9 ; 投影點與對稱點之求算 11 三向量積 12 ; R^n 中的超平面與直線 16 ; 對平面求對稱點 18 ; 對直線求對稱點 19 ; 各種距離公式 20	
2. 矩陣	2-1 ~ 2-24
矩陣的定義 1 ; 方陣的跡 2 ; 矩陣的加, 係數積 3 ; 矩陣乘法與方陣 的乘冪 4 ; 直切原理 8 ; 橫切原理 10 ; 矩陣的運算性質 12 ; 逆矩陣 13 ; 逆矩陣相乘公式 15 ; 矩陣方程式 17 ; 方陣的多項式 18 ; 方陣 的有理式 19 ; 轉置, 共軛 21 ; 轉置的運算公式 22 ; 對稱矩陣, 正交矩 陣 23	
3. 列運算	3-1 ~ 3-27
線性聯立方程組 1 ; 解的存在性與唯一性 4 ; 基本列運算 5 ; 梯形與 列簡化 6 ; 線性方程式的列運算求解法 7 ; 解的判別 15 ; 逆矩陣的求 算法 16 ; 基本列矩陣 18 ; 列運算與左乘可逆矩陣的關係 20 ; 基本行運 算與基本行矩陣 24	
4. 行列式	4-1 ~ 4-25
排列, 奇排列, 偶排列, 逆序 1 ; 奇偶性判別法 2 ; 行列式的定義 3 ; 行列式的運算定理 5 ; 子矩陣與餘因式 10 ; 行列式降階公式 11 ; 行 列式運算範例 12 ; Vandermonde 行列式 16 ; 古典伴隨矩陣 19 ; Cramer 公式 21 ; 行列式的方塊運算 24	

5. 向量空間與子空間 5-1 ~ 5-24

體 1 ; 向量空間的定義 3 ; 向量空間的實例 4 ; 向量的性質 7 ; 線性組合 8 ; 子空間 9 ; 子空間的判別 9 ; 矩陣的列空間與行空間 14 ; 矩陣的左核空間, 右核空間 18 ; 子空間的交集 21 ; 子空間的聯集 23 ; 子空間的和 23

6. 基底與坐標化 6-1 ~ 6-38

生成集 1 ; 生成集的求算 3 ; 生成集的性質 5 ; 利用生成集求算和空間 6 ; 生成與映成的關係 8 ; 相關集與獨立集 8 ; 線性相關的性質 10 ; 獨立性的判別法 11 ; 獨立與一對一的關係 16 ; 生成集與獨立集的個數關係 17 ; 維度定理 18 ; 生成集裁員定理 19 ; 獨立集擴編定理 20 ; 基底的求法 21 ; 和空間的維度公式 22 ; 維度求算法 23 ; 坐標 27 ; 坐標變換公式 32

7. 線性映射與矩陣表示 7-1 ~ 7-34

線性映射, 線性算子, 線性泛函 1 ; 線性條件之各種變型 2 ; 線性映射的一般型 5 ; 線性映射的判別 7 ; 矩陣表示 11 ; 矩陣表示的求算 12 ; 線性映射的坐標公式 22 ; 矩陣表示的換底公式 I 27 ; 相似矩陣 30 ; 矩陣表示的換底公式 II 33

8. 映射理論 8-1 ~ 8-32

直像的計算 1 ; 反像的計算 2 ; 軌跡的映像 2 ; 子空間的直像, 反像 3 ; 核空間, 值域, 零數, 秩 4 ; 一對一判別定理 6 ; Sylvester's law 7 ; rank 定理 12 ; 秩的性質 14 ; 可逆的等價性質 15 ; $Ax=b$ 有解的判別條件 16 ; 線性映射之間的計算 19 ; 線性映射空間 21 ; 可逆映射 23 ; 獨立集的直像 29 ; 一對一保獨立 30 ; 映成保生成 30 ; 算子的多項式函數 31

9. 內積 9-1 ~ 9-30

各種標準內積 1 ; 抽象內積 2 ; 正交補集, 長度, 單位化 5 ; 內積的

坐標型 9 ; 長度的性質 11 ; Schwarz 不等式與三角不等式 12 ; 正投影 15 ; Gram-Schmidt 正交化 20 ; QR 分解 24 ; 正投影公式 28

10. 形式 10-1 ~ 10-27

雙線式與形式 1 ; 形式的一般型 4 ; 算子與形式的關係 5 ; 形式的矩陣表示 5 ; 形式的坐標計算公式 6 ; 同餘矩陣 8 ; Hermitian 矩陣 9 ; Hermitian 形式 12 ; 正半定與正定 16 ; 形式的秩 17 ; 正定的判別 23 ; 伴隨算子 25

11. 空間分解 11-1 ~ 11-33

獨立子空間, 直和 1 ; 獨立的判別條件 4 ; 投影算子 9 ; 投影的對角化 15 ; 正交子空間 16 ; 正交補空間的性質 18 ; 正交投影 21 ; 不變子空間 28 ; 方塊對角化 31

12. 對角化 12-1 ~ 12-27

特徵向量 1 ; 算子的行列式 5 ; 特徵值, 特徵子空間, 特徵多項式, 光譜 6 ; 特徵多項式計算公式 14 ; 對角化 16 ; 代數重數, 幾何重數 20 ; 可對角化的判別條件 22 ; 光譜定理 26

13. 單式對角化 13-1 ~ 13-39

單式矩陣, 正交矩陣 1 ; 保長與保積 6 ; 三角化 9 ; 單式三角化 11 ; Schur's lemma 11 ; 正則算子 18 ; Hermitian 矩陣的性質 19 ; 單式對角化的充要條件 21 ; 正定的判別條件 26 ; 正半定的判別條件 27 ; 主軸定理 32 ; 矩陣的 norm 37 ; Rayleigh's 商 38

14. 冪零 14-1 ~ 14-34

冪零與指標 1 ; 下移矩陣 2 ; 局部冪零 3 ; Kernel Chain 3 ; Image Chain 5 ; Fitting's lemma 8 ; 循環子空間, 向量的高度 12 ; 循環基底 14 ; 循環分解定理, 不變集 17 ; 不變集的判定法 18 ; 冪

零區維度定理 25 ; 循環基底之求算 26

15. Jordan form 15-1 ~ 15-28

廣義特徵子空間 4 ; Jordan form 大部分解 7 ; Jordan Canonical form 9 ; Jordan form 的判定法 9 ; Jordan 基底的計算法 12 ; Jordan form 與矩陣的相似 25

16. 綜合論述 16-1 ~ 16-47

利用對角化計算矩陣多項式 3 ; e^{At} 的計算 11 ; 聯立線性微分方程組 20 ; 逆矩陣的特徵值 23 ; 矩陣的平方根 27 ; Cayley - Hamilton 定理 31 ; 最小多項式 37 ; 算子的質因式分解定理 40 ; 可對角化的最小多項式判別法 41 ; 最小多項式的求算 42

附錄 A 抽象代數概論 A-1 ~ A-11

$\mathbb{Z}$, 1 ; 結合性, 單位元素, 反元素, 交換性, 分配性, 封閉性 2 ; 群, 環, 體, 整域, 代數 3 ; 各種代數結構之實例 5 ; 子群, 子環, 理想 8 ; 子群的交集與聯集 10

1 向量幾何

1. 定義：

對於向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$ 及純量 $k \in R$, 定義

$$\textcircled{1} \mathbf{a} = \mathbf{b} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

$$\textcircled{2} \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots, a_n \pm b_n) \dots\dots\dots \text{向量和, 差}$$

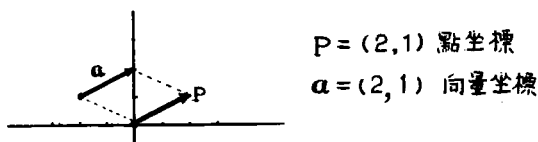
$$\textcircled{3} k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n) \dots\dots\dots \text{係數積}$$

$$\textcircled{4} \mathbf{o} = (0, 0, \dots, 0) \dots\dots\dots \text{零向量}$$

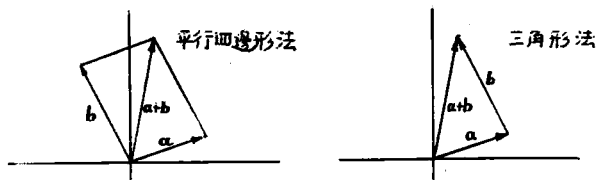
$$\textcircled{5} -\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$$

【要訣】(1)在幾何意義上，向量是一個具有“大小”（即長度）與“方向”的有向線段，它本身不具有位置，所以向量又稱為“自由向量”（意即可自由地作平行移位）。當把向量的起點設在坐標系的原點時，其終點指到一個點上，此時這個向量就被稱為那個點的“位置向量”。位置向量與其終點常不加區分，符號也相同。

(2)向量乘 k 倍，在幾何上是長度變 $|k|$ 倍，若 $k < 0$ ，則還要把方向倒轉。



(3) 向量的加法在幾何上可用平行四邊形法，或三角形法。



(4) $a - b = a + (-b)$; $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

(5) 高中時用幾何方向定義向量，及向量的運算；再導出代數上的運算公式。而在線性代數課程中通常是以代數方式作定義，再解釋幾何意義。

(6) 設 $a = \overrightarrow{OP}$, $b = \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{PQ}$ 線段的中點為 M , 則

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(a + b) \quad (\text{中點公式})$$

2. 定理：向量空間的八個基本性質。

- ① $a + b = b + a$ (向量加法交換律)
- ② $(a + b) + c = a + (b + c)$ (向量加法結合律)
- ③ $a + o = o + a = a$ (向量加法單位元素)
- ④ $a + (-a) = (-a) + (a) = o$ (向量加法反元素)
- ⑤ $(h + k)a = ha + ka$ (係數積對純量加法的分配性)
- ⑥ $h(a + b) = ha + hb$ (係數積對向量加法的分配性)
- ⑦ $(hk)a = h(ka)$ (純量乘法的結合性)
- ⑧ $1a = a$ (preservation of scale)

【要訣】(1)①~④是向量加法的性質；⑤、⑥是向量加法與係數積的關係；⑦、⑧是係數積的性質。

(2)以後要用這八個基本性質當做基本公理(Axiom)來定義抽象

的向量空間。

【證】略（讀者自行以定義代入驗證之）

3. 定義

① $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ 內積、點乘積

② $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ 長度

③ 若 $\|\mathbf{a}\| = 1$ ，則稱 $\mathbf{a}$ 為單位向量

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= (1, 0, 0, \cdots, 0) \\ \mathbf{i}_2 &= (0, 1, 0, \cdots, 0) \\ &\cdots \\ \mathbf{i}_n &= (0, 0, 0, \cdots, 1) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{標準基向量} \\ (\text{base vector}) \end{array}$$

④ $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos^{-1} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}$ 夾角

⑤ 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ，則稱 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 正交 (orthogonal)

【要訣】(1) 在高中時是由長度及角度定義內積：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \theta ; \theta \text{ 爲 } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 之夾角}$$

再導出代數公式，但在線性代數通常先以代數公式作為定義，再定義長度及角度。

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \cdot \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \right)$$

(2) 由內積可定義長度及角度，由長度可定義單位向量及單位基底，由角度可定義正交。

(3) 由內積所定義之角度為無向角，角度自 0° 至 180° （即 0 到 π ）

(4) 把非零向量 $\mathbf{a}$ 化為單位向量的過程 ($\mathbf{a} \rightarrow \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$) 稱為單位化或

標準化 (normalize)

(5) 設 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$ ， $\mathbf{b} = \overrightarrow{OQ}$ ，則 P ， Q 的距離為

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \quad (\text{距離公式})$$

(6) 線代中通常不稱垂直，而稱正交

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

$\mathbf{o}$ 向量可視為垂直於任何向量

(7) 對非零向量 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \exists k \ni \mathbf{b} = k\mathbf{a}$$

$k > 0$ 時稱同向， $k < 0$ 時稱反向

$\mathbf{o}$ 可視為平行於任何向量

4. 範例：(成大 G9 土研)

$$\mathbf{a} = (1, 0, -1), \mathbf{b} = (2, 1, 1), \mathbf{c} = (-1, 1, 0)$$

(a) 求 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 所夾之銳角 (b) 若 $\mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}$ 與 $\mathbf{c}$ 垂直求係數 α 之值

$$\text{【解】(a) } \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \right)$$

$$= \cos^{-1} \left(\frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)$$

$$(b) (\mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}) \perp \mathbf{c} \iff (\mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$$

$$(1 + 2\alpha, \alpha, -1 + \alpha) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

5. 定理：

對於向量， $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^n$ ，純量 $h, k \in R$

$$\text{① } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{內積的交換性})$$

$$\text{② } (h\mathbf{a} + k\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = h\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + k\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

$$\text{③ } \mathbf{a} \cdot (h\mathbf{b} + k\mathbf{c}) = h\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + k\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

} 內積的雙線性條件

$$\text{④ } \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0 \quad (\text{正定性})$$

⑤ 下三式彼此等價

$$(a) \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$$

$$(b) \|\mathbf{a}\| = 0$$

$$(c) \mathbf{a} = \mathbf{o}$$

【要訣】(1) 通常以①~④作為基本公理，用來定義抽象的內積空間。(見後)

(2) 若佈於複數系，①~④還需稍加修飾。(見第九章)

(3) ②③可分寫成

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$$

【證】略(讀者自行驗證)

習題 5.1

試利用線性條件重解範例 4(b)

6. 定理：(Schwarz's inequality)

若 $a, b \in R^n$, 則

$$(a \cdot b)^2 \leq \|a\|^2 \|b\|^2$$

其中等式成立的充分必要條件為“ a, b 至少有一為 o , 或 a, b 平行”(可寫作： $a = o$ 或 $\exists k \ni b = ka$)【要訣】(1) 上式可表為 $(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)$

(2) Schwarz's 不等式可寫為

$$|a \cdot b| \leq \|a\| \|b\|$$

其中等式成立之充分必要條件相同。又可寫為

$$-\|a\| \|b\| \leq a \cdot b \leq \|a\| \|b\|$$

其中右邊等式成立之充分必要條件為“ a, b 至少有一為 o , 或 a 與 b 同向”；而左邊等式成立之充分必要條件為“ a, b 至少有一為 o , 或 a 與 b 反向”。【證】1. 若 a, b 中有一為 o , 則定理顯然成立以下設 a, b 皆不為 o 。2. 令 $f(t) = \|ta - b\|^2, t \in R$

$$\begin{aligned} \text{則 } f(t) &= (ta - b) \cdot (ta - b) \\ &= (a \cdot a)t^2 - 2(a \cdot b)t + (b \cdot b) \\ &= \|a\|^2 t^2 - 2(a \cdot b)t + \|b\|^2 \end{aligned}$$

因 $f(t) \geq 0$ 恒成立以 $t = \frac{a \cdot b}{\|a\|^2}$ 代入

$$\text{即 } \|a\|^2 \left(\frac{a \cdot b}{\|a\|^2} \right)^2 - 2(a \cdot b) \frac{a \cdot b}{\|a\|^2} + \|b\|^2 \geq 0$$

$$\text{即 } -\frac{(a \cdot b)^2}{\|a\|^2} + \|b\|^2 \geq 0$$

$$\therefore \|a\|^2 \|b\|^2 \geq (a \cdot b)^2$$

3. 若 $a = kb$, 則

$$(a \cdot b)^2 = (kb \cdot b)^2 = k^2 \|b\|^4 = \|kb\|^2 \|b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$$

∴ 等式成立

4. 若等式成立，則 2. 中 $f(t)$ 有根，即存在 k 滿足 $f(k) = 0$ ，即

$$\|ka - b\|^2 = 0$$

$$\therefore ka - b = 0$$

$$\therefore b = ka$$

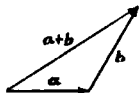
習題 6.1

試證要訣(2) (hint: 依 $b \cdot ka$ 中 k 的正負討論。

7. 定理：三角不等式

若 $a, b \in R^n$ ，則

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$



其中等式成立的充分必要條件為“ a, b 有一為 0 ，或 a 與 b 同向”。

$$\text{【要訣】 } |\|a\| - \|b\|| \leq \|a \pm b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

$$\begin{aligned} \text{【證】 } \|a + b\|^2 &= (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + 2a \cdot b + b \cdot b \\ &\leq a \cdot a + 2\|a\|\|b\| + b \cdot b = (\|a\| + \|b\|)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

其中等式成立的充分必要條件為 $a \cdot b = \|a\|\|b\|$ ，由定理 6 要訣(2)

可知，在“ a, b 有一為 0 ，或 a, b 同向”時成立。

習題 7.1

Schwarz 不等式 $|X \cdot Y| \leq |X| |Y|$ 中“=”成立之條件是(1)，而三角不等式 $|X + Y| \leq |X| + |Y|$ 中“=”成立之條件為(2)。

【解】(1) $X = 0$ 或 $Y = 0$ 或 $Y = cX$ ， c 為任意常數。

(2) $X = 0$ 或 $Y = 0$ 或 $Y = cX$ ，但 c 必須大於 0 。

習題 7.2

證明 $\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$

8. 定義：

設 $a, b, c \in R^n$, 定義

① $|a \wedge b|$ 爲 a, b 所張開之平行四邊形的面積。

(a, b 平行時, $|a \wedge b|$ 定爲 0)

② $|a \wedge b \wedge c|$ 爲 a, b, c 所張開之平行六面體的體積 (a, b, c 共面時, $|a \wedge b \wedge c|$ 定爲 0)

③ $b \neq 0$ 時, 令 $\text{comp}_b a = \frac{a \cdot b}{\|b\|}$, 稱爲 a 在 b 方向的(正)投影量。

④ $b \neq 0$ 時, 令 $\text{proj}_b a = \frac{a \cdot b}{b \cdot b} \cdot b$, 稱爲 a 在 b 方向的(正)投影向量。

⑤ 對點 P, Q , 定義 P, Q 之間的距離爲

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

⑥ 對點 P, Y 爲直線或平面, 定義 P, Y 之間的距離爲

$$d(P, Y) = \min\{d(P, Q) \mid Q \in Y\}$$

⑦ 設 X, Y 爲直線或平面, 定義 X, Y 之間的距離爲

$$d(X, Y) = \min\{d(P, Q) \mid P \in X, Q \in Y\}$$

【要訣】(1) $\text{comp}_b a = a \cdot \frac{b}{\|b\|} = \|a\| \cos \angle(a, b)$

$$\text{proj}_b a = \left(a \cdot \frac{b}{\|b\|}\right) \frac{b}{\|b\|} = \text{comp}_b a \frac{b}{\|b\|}$$

(2) 設 a, b 皆不爲 0, 令 $\theta = \angle(a, b)$, 則

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \iff \text{comp}_b a > 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \iff \text{comp}_b a = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \iff \text{comp}_b a < 0$$

9. 定理：

設 $a, b \in R^n$, $\theta = \angle(a, b)$, 則有

$$\textcircled{1} a \cdot b = \|a\| \cdot \|b\| \cos \theta$$

$$\textcircled{2} |a \wedge b| = \|a\| \cdot \|b\| \sin \theta$$

$$\textcircled{3} (a \cdot b)^2 + |a \wedge b|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$$

【要訣】③式為計算 $|a \wedge b|$ 之基礎

【證】讀者自證。

10. 範例：

①若 $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$

試證： $|a \wedge b| = \text{abs} \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ (abs 表示絕對值)

②若 $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$

試證： $|a \wedge b| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$

③對 $a = (1, 0, 1, 2)$, $b = (1, 1, 0, -1)$ 求 $|a \wedge b|$

【要訣】(1) a, b 所展出之三角形面積為 $\frac{1}{2}|a \wedge b|$

(2) 對 $a, b \in R^n$, 若 $n \leq 3$, 則可套公式, 若 $n \geq 4$, 則應以上個定理的③求算。

(3) ②中令 $a_3 = b_3 = 0$, 則公式退化成①。

【解】①讀者自證。

$$\begin{aligned}
 ② \quad |a \wedge b|^2 &= \|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2 \\
 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
 &\quad - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\
 &= \dots\dots\dots (\text{展開並對消}) \\
 &= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 \\
 &\quad - 2a_1 b_1 a_3 b_3 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 b_2 a_3 b_3 \\
 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 \\
 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2
 \end{aligned}$$

故得證。

$$③ \quad \|a\|^2 = 1 + 1 + 4 = 6, \quad \|b\|^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$(a \cdot b) = 1 - 2 = -1$$

$$\therefore |a \wedge b|^2 = 6 \cdot 3 - (-1)^2 = 17$$

$$\therefore |a \wedge b| = \sqrt{17}$$

習題 10.1

求由 $A(2, 3, 4)$, $B(-1, 3, 2)$, $C(1, -4, 3)$, $D(4, -4, 5)$ 四點所成的平行四邊形的面積。

Ans : $\sqrt{638}$

11. 定義：外積；叉乘積

① 設 $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$, 則

$$\text{定義 } a \times b = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

② 若 $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$\begin{aligned} \text{則 } a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k \end{aligned}$$

其中 $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$

【要訣】(1)①, ②只是表示法不同, 本質上是一樣的。

$$(2) a \cdot (a \times b) = 0$$

$$b \cdot (a \times b) = 0$$

$$\|a \times b\| = |a \wedge b|$$

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \angle(a, b)$$

$$(3) a \times b = -b \times a$$

$$(4) a \times (hb + kc) = ha \times b + ka \times c$$

$$(ha + kb) \times c = ha \times c + kb \times c$$

$$(5) i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j$$

$$j \times i = -k, k \times j = -i, i \times k = -j$$

$$i \times i = 0, j \times j = 0, k \times k = 0$$

$$(6) a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

(7) 內積定義在任何維度的 R^n 之中, 但只有 R^3 中才能定義外積。